

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ АТМОСФЕРЫ ИМ. А.М. ОБУХОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# **ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ И ОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В АТМОСФЕРЕ**

**Под редакцией О.Г. Чхетиани, М.Е. Горбунова,  
С.Н. Куличкова, И.А. Репиной**

Москва  
ГЕОС  
2017

УДК 574.2:574.22/615.9  
ББК 26.323

**Динамика волновых и обменных процессов в атмосфере.** Под ред. О.Г. Чхетиани, М.Е. Горбунова, С.Н. Куличкова, И.А. Репиной. М.: ГЕОС, 2017. 508 с.

ISBN 978-5-89118-734-4

В настоящей книге представлены результаты экспериментальных, теоретических и модельных исследований динамики волновых и обменных процессов в атмосфере, выполненных в последние годы в Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, в том числе в рамках проекта Российского Научного Фонда № 14-27-00134. Рассматривается широкий круг вопросов: взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью; развитие, распространение и взаимодействие волн, вихревых структур и турбулентности в толще атмосферы от приземного слоя до нижней термосферы и систематическое влияние этих процессов на результаты дистанционного зондирования. В соответствии с затрагиваемыми темами книга состоит из 4 глав: Атмосферная турбулентность, Атмосферный пограничный слой, Взаимодействие атмосферы и океана, Верхняя атмосфера.

Книга будет полезна широкому кругу читателей: специалистам, работающим в данной области знания, аспирантам и студентам, изучающим науки о Земле.

© Институт Физики Атмосферы им. А.М. Обухова  
Российской Академии Наук, 2017

© Коллектив авторов, 2017

© ООО «Издательство ГЕОС», 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
Памяти А.С. Гурвича .....	7
<b>Глава 1. Атмосферная турбулентность</b> .....	11
1.1. Экспериментальные исследования пограничного слоя в ИФА за 60 лет (Б.М. Копров) .....	12
1.2. Спиральность атмосферных процессов (М.В. Курганский) .....	33
1.3. Потoki завихренности и спиральности в атмосферном пограничном слое (О.Г. Чхетиани, Б.М. Копров, В.М. Копров) .....	39
1.4. Турбулентная спиральность и потенциальный вихрь в приземном слое атмосферы пограничном слое (Б.М. Копров, Б.М. Копров, О.А. Соленая, О.Г. Чхетиани, Е.А. Шишов) .....	58
1.5. Статистические характеристики пространственно-временной изменчивости направления ветра в приземном слое (Е.А. Шишов, О.А. Соленая, Б.М. Копров, В.М. Копров) .....	70
1.6. Явления обратного каскада энергии в турбулентности со спиральностью (Е.Б. Гледзер, О.Г. Чхетиани) .....	84
<b>Глава 2. Атмосферный пограничный слой</b> .....	111
2.1. Вертикальная структура городского «острова тепла» по данным микроволнового дистанционного зондирования (М.И. Варенцов, В.П. Юшков, Е.А. Миллер, П.И. Константинов) .....	113
2.2. Оценки крупномасштабной спиральности в АПС по данным акустического зондирования (Н.В. Вазаева, О.Г. Чхетиани, Р.Д. Кузнецов, М.А. Каллистратова, В.Ф. Крамар, В.С. Люлюкин, Д.Д. Кузнецов) .....	130
2.3. Рэлей-тейлоровская неустойчивость и ее структурные элементы в геофизических течениях (В.П. Гончаров, В.И. Павлов) .....	147
2.4. Генерация внутренних гравитационных волн вихревыми возмущениями в сдвиговых течениях (М.В. Калашник, О.Г. Чхетиани) .....	178
2.5. Содарные исследования волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых струйных течениях (М.А. Каллистратова, В.С. Люлюкин, Р.Д. Кузнецов, И.В. Петенко, Д.В. Зайцева, Д.Д. Кузнецов) .....	212
2.6. Исследование внутренних гравитационных волн от атмосферных фронтов (С.Н. Куличков, И.П. Чунчuzов, В.Г. Перепелкин) .....	260
<b>Глава 3. Взаимодействие атмосферы и океана</b> .....	277
3.1. Взаимодействие атмосферы и океана при различных фоновых условиях (И.А. Репина, А.Ю. Артамонов) .....	279
3.2. Диффузия в поле ветровых волн (Г.С. Голицын, О.Г. Чхетиани) .....	310
3.3. Процессы в приводном и пограничном слоях атмосферы над морем. Наблюдения инфразвуковых колебаний (голос моря) (В.Г. Перепелкин, С.Н. Куличков, И.А. Репина) .....	328

3.4. Полуфеноменологические модели приводного слоя атмосферы (В.Г. Полников) . . . . .	341
3.5. Трансформация холодной воздушной массы над океаном в Арктике во время холодных вторжений (Д.Г. Чечин) . . . . .	370
<b>Глава 4. Верхняя атмосфера</b> . . . . .	<b>383</b>
4.1. Тонкая слоистая структура стратосферы и нижней термосферы по данным инфразвукового зондирования (С.Н. Куличков, И.П. Чунчужов) . . . . .	385
4.2. Радиозатменное зондирование атмосферы (М.Е. Горбунов) . . . . .	407
4.3. Фронтальные структуры в ионосферных спорадических слоях E (О.Г. Чхетиани, С.Л. Шалимов) . . . . .	458
4.4. Диффузия и вертикальный транспорт ионов и атомов металлов в об- ласти термосферы нижней мезосферы (С.Л. Шалимов, О.Г. Чхетиани) . . . . .	479
4.5. Горизонтальный перенос ионов и атомов металлов в нижней ионосфере (С.Л. Шалимов) . . . . .	497

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге представлены результаты экспериментальных, теоретических и модельных исследований динамики волновых и обменных процессов в атмосфере, выполненных в последние годы в Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, в том числе в рамках проекта Российского Научного Фонда № 14-27-00134. Рассматривается широкий круг вопросов: взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью; развитие, распространение и взаимодействие волн, вихревых структур и турбулентности в толще атмосферы от приземного слоя до нижней термосферы и систематическое влияние этих процессов на результаты дистанционного зондирования.

Исследование атмосферной турбулентности является одной из важнейших задач физики атмосферы. Знания о структуре атмосферной турбулентности необходимы для решения задач климатического моделирования, переноса примесей и оценки загрязнения атмосферы, дистанционного зондирования атмосферы, распространения сигналов в атмосфере и обеспечения безопасности полетов гражданской авиации. Основы теории атмосферной турбулентности были разработаны в середине прошлого века, в том числе и в Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, на основе специализированных экспериментов и теоретических построений, и работы в этой области активно продолжаются. В этой связи особый интерес представляет публикуемый здесь очерк истории развития экспериментальных исследований турбулентности пограничного слоя в ИФА за 60 лет.

Ряд разделов посвящен турбулентной спиральности, интерес к которой, в частности, в атмосферном пограничном слое (АПС) в последнее время всё возрастает. В этой области ИФА является одним из лидеров как в теоретических подходах, так и в эксперименте. Следует отметить, что первые в мире измерения спиральности в натуральных условиях были выполнены именно в ИФА в 2004 году.

Особое внимание уделено исследованию взаимодействия вихревых и волновых структур различных масштабов. Мезомасштабные вихревые структуры играют принципиальную роль в процессах переноса примесей, во взаимодействии тропосферы с верхними слоями атмосферы, в установлении крупномасштабной циркуляции и турбулентного режима всей атмосферы, а также влияют на распространение радиоволн, света и звука в атмосфере. Исследование физических механизмов образования этих структур и их статистических закономерностей позволяет сделать шаг вперед в параметризации их влияния на динамику атмосферы, которое необходимо учитывать в моделях общей циркуляции атмосферы и переноса примесей, а также при прогнозировании распространения акустических и электромагнитных волн в атмосфере. Анализ динамики вихревых структур в атмосфере проводится с использованием оригинальных численных вихререзающих и мезомасштабных моделей и с привлечением нелинейных методов в рамках гамильтоновой динамики. Для оценки эмпирических коэффициентов в разрабатываемых схемах замыкания проведены натурные эксперименты по измерениям характеристик атмосферной турбулентности в приземном слое атмосферы над различными поверхностями.

Приведены результаты оригинальных экспериментальных исследований АПС, касающиеся: вертикальной структуры городского «острова тепла» – много-точечное микроволновое дистанционное зондирование поля температур над Москвой в апреле-июле 2015 г. (эксперимент "Триада-2"); регистрация волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых струйных течениях в АПС по данным акустической локации в разных регионах – аридные и степные области юга России, прибрежная зона Чёрного моря, Антарктика; наблюдения внутренних гравитационных волн от атмосферных фронтов.

Отдельная глава посвящена комплексным экспериментальным исследованиям взаимодействия атмосферы и океана при различных фоновых условиях: при сильных/ слабых береговых ветрах и при наличии поверхностных неоднородностей. Рассмотрены современные подходы к развитию ветро-волновых моделей, приведены результаты моделирования структуры и динамики атмосферного пограничного слоя над морской поверхностью, а также изучены вопросы диффузии примесей и границ обнаружения пятен загрязнения. Представлены наблюдения инфразвуковых колебаний – "голос моря".

В главе, посвященной верхней атмосфере, представлены уникальные наблюдения тонкой слоистой структуры стратосферы и нижней термосферы, связываемые с развитием анизотропных турбулентно-волновых структур, полученные по данным инфразвукового зондирования. Рассмотрены вопросы о механизмах формирования квазипериодических структур в ионосферных спорадических слоях, процессы диффузии и транспорта ионов.

Отдельный раздел посвящен изложению теоретических основ радиозатменного зондирования – одного из важнейших современных источников данных, как для численного прогноза погоды, так и для исследования глобальных изменений климата. Изложение ведется в рамках геометрооптического приближения. Предложение об использовании для зондирования атмосферы Земли высокостабильных сигналов систем спутниковой навигации, было выдвинуто впервые в 1987 году А.С. Гурвичем и Т.Г. Красильниковой.

Мы надеемся, что эта книга будет интересной и полезной широкому кругу читателей: специалистам, работающим в данной области знания, аспирантам и студентам, изучающим науки о Земле. Представленные здесь результаты позволяют разрабатывать теоретические основы современной системы комплексного мониторинга структуры и пространственно-временных вариаций состояния атмосферы на различных высотных уровнях с использованием интегрированных дистанционных методов и новейших технологий зондирования в диапазонах частот оптических, радио и акустических волн для последующих прогнозных оценок состояния атмосферы и её климатических изменений на различных высотных уровнях.

*О.Г. Чхетиани, М.Е. Горбунов, С.Н. Куличков, И.А. Репина*

## Памяти А.С. Гурвича



**Александр Сергеевич Гурвич** (1929–2016 гг.), выдающийся физик-экспериментатор, один из мировых лидеров в области распространения электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах, доктор физико-математических наук, профессор, автор 250 научных работ, соавтор двух монографий, одного открытия, лауреат Государственной премии СССР. В 1952 г. он закончил физический факультет МГУ и с 1956 г. по 2016 г. работал в Институте физики атмосферы РАН: в 1978–1997 гг. заведующим отделом распространения волн в атмосфере ИФА, в 1997–2016 гг. – главным научным сотрудником.

В начале своей деятельности Александр Сергеевич занимался исследованиями характеристик турбулентности в приземном слое атмосферы. Его работы в соавторстве с В.М. Бовшеверовым, В.И. Татарским, Л.Р. Цвангом, М.А. Каллистратовой по созданию приборов и проведению микропульсационных измерений температуры и скорости ветра имели огромное значение для бурно развивавшихся в то время исследований турбулентности в атмосфере. Наряду с этим Александр Сергеевич занимался исследованиями эффектов, возникающих при распространении оптических и акустических волн в турбулентной атмосфере, и методами восстановления характеристик турбулентности. Его эксперименты по насыщению сильных флуктуациях интенсивности света вызвали огромный поток

экспериментальных и теоретических работ и являются классикой в этой области науки.

Многогранность научного таланта Александра Сергеевича проявилась и в том, что он параллельно активно занимался проблемами исследования Земли по ее собственному излучению в радиодиапазоне. Плодотворное сотрудничество с учеными из ИРЭ А.Е. Башариновым и С.Т. Егоровым привело к запуску в 1968 г. спутника «Космос-243», который на несколько лет опередил аналогичный американский спутник «Nimbus-5». Результаты этого эксперимента были опубликованы в 1974 г. в монографии «Радиоизлучение Земли, как планеты», сохранившей свою актуальность и по сей день.

С появлением промышленных образцов лазеров Александр Сергеевич активно использует их для исследования распространения когерентного излучения в модельных и атмосферных турбулентных средах. Он первым предложил и использовал жидкостные кюветы с сильной конвективной турбулентностью, которые позволяли моделировать в лабораторных условиях многокилометровые атмосферные трассы. Александр Сергеевич в течение многих лет организовывал и проводил измерения на приземных трассах в экспедициях на Звенигородской и Цимлянкой научных станциях ИФА. Полученные им пионерские результаты в измерениях статистических характеристик флуктуаций интенсивности лазерного излучения до сих пор являются базовыми и в этой области науки. Часть этих результатов опубликована в монографии: А.С. Гурвич, А.И. Кон, В.Л. Миронов, С.С. Хмелевцов «Лазерное излучение в турбулентной атмосфере», вышедшей в 1976 г. Среди работ по распространению света в турбулентной атмосфере особое место занимает цикл, посвященный эффекту усиления обратного рассеяния, и в 1988 г. было зарегистрировано открытие А.С. Гурвича, С.С. Кашкарова, Ю.А. Кравцова, В.И. Татарского, А.Г. Виноградова «Закономерность увеличения обратного рассеяния волн».

За выдающиеся достижения в исследованиях распространения света Александру Сергеевичу с соавторами была присуждена Государственная премия СССР за 1990 г. в области естественных наук за цикл работ «Установление фундаментальных закономерностей прохождения волн через турбулентные среды».

В последние годы Александр Сергеевич много внимания уделял проблемам спутникового зондирования атмосферы в радио и оптическом диапазоне длин волн. Он одним из первых предложил и рассмотрел возможности использования системы навигационных спутников как источников для радиопросвечивания атмосферы. В дальнейшем Александр Сергеевич неизменно проявлял живейший интерес к этой теме. В сотрудничестве со своим учеником М.Е. Горбуновым он разработал метод обратного распространения, позволяющий существенно повысить точность обработки данных. Также он занимался статистическим анализом накопленных массивов радиозатменных наблюдений.

В тесном сотрудничестве с Г.М. Гречко и С.А. Савченко Александром Сергеевичем на орбитальных станциях Салют-6, Салют-7 и Мир были поставлены многочисленные эксперименты по наблюдения атмосферной рефракции и мерцаний звезд. В 1996 г. на орбитальную станцию Мир был доставлен сконструированных под его руководством звездный фотометр ЭФО-2, характеристики которого позволили детально исследовать структуру флуктуаций плотности в стратосфере. Тонкие эксперименты Александра Сергеевича всегда сопровождалась

глубокой теоретической разработкой явления. Он разработал модели 3D спектров атмосферных неоднородностей и методы восстановления параметров моделей по данным измерений мерцаний звезд. Эти алгоритмы, использованные для анализа данных измерений ЭФО-2, затем были использованы для восстановления параметров турбулентности и внутренних волн по измерениям мерцаний звезд быстрыми фотометрами на европейском спутнике GOMOS/ENVISAT. Несколько сотен тысяч звездных оккультаций составляют базу восстановленных данных COMOS. Широкая мировая известность работ Александра Сергеевича подкреплялась его тесным сотрудничеством с коллегами из Франции, Англии, США и Финляндии. Многие из них с гордостью называют себя его учениками.

В 2010 году Александр Сергеевич принимал участие в эксперименте IRDAS по просвечиванию атмосферы лазерным излучением на трассе длиной около 140 км, поставленным группой ученых под руководством Г. Кирхенгаста из центра им. Вегенера по глобальным изменениям климата в Австрии. По предложению Александра Сергеевича аппаратура была существенно доработана, чтобы измерять динамические двумерные поля интенсивности лазерного излучения. Это позволило не только оценить спектры атмосферных неоднородностей, но и подтвердить гипотезу замороженной турбулентности.

С 2009 по 2015 год Александр Сергеевич участвовал в проекте DELICAT по лидарному зондированию турбулентности ясного неба с борта самолета с целью обеспечения безопасности полетов. В результате анализа эксперимента Александр Сергеевич высказал замечательную идею усовершенствования схемы измерений на основе использования эффекта усиления обратного рассеяния.

Александр Сергеевич активно работал до самых последних дней своей жизни. Он был наделен редким даром – быть генератором научных идей. Хотя ряд его блестящих идей остался, к сожалению, не реализованным, но многие из них нашли воплощение в работах его учеников. Он был научным руководителем у 14 кандидатов наук и до последнего дня он продолжал активно работать с молодыми коллегами. Его многочисленные ученики и последователи, его научная школа – это такой же весомый вклад в мировую науку, как и его выдающиеся научные достижения.



# **Глава 1. Атмосферная турбулентность**

## 1.1. Экспериментальные исследования пограничного слоя в ИФА за 60 лет

**Б.М. Коприв**

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

### Предисловие

Будучи в 1956 году студентом 5-го курса физфака МГУ, я слушал лекции А.М. Обухова по основам гидродинамики и теории турбулентности на кафедре физики атмосферы. Его курс произвел на меня сильное впечатление. Мне захотелось заниматься именно этим аспектом физики атмосферы. В результате я стал дипломником Обухова с темой "Внутренние волны в двухслойной бароклинной атмосфере", а после окончания университета в марте 1958 года – аспирантом Обухова в теоретическом отделе Института физики атмосферы АН СССР, созданного Обуховым в 1956 году. К лету 1957 года диплом был уже написан, и я собирался работать по обслуживанию участников проходившего в Москве Всемирного фестиваля молодежи и студентов, проживавших в Доме студентов МГУ на Ленинских горах. Вместо этого летом 1957 года, по настоянию Обухова, я стал участником экспедиции в Цимлянск и вошел в отряд турбулентности С.И. Кречмера.

С.И. Кречмер реализовал в Цимлянске опыт 10 лет экспериментальных работ по приземному слою в составе отряда атмосферной турбулентности ГЕОФИАН под руководством Обухова. Этими работами, включая рытье землянок, мне и пришлось заниматься в экспедиции 1957 года. Кроме того, мне удалось ознакомиться с замечательным устройством – акустическим анемометром В.М. Бовшеверова [1], испытаниями которого он занимался со своим инженером В.П. Вороновым.

В 1959 году я вместе с Л.Р. Цвангом участвовал в летной экспедиции Института прикладной геофизики (ИПГ), которой руководил Н.И. Вульфсон. Л.Р. Цванг продолжил начатые ранее измерения спектров вариаций температуры, а я начал измерять спектры перегрузок самолета в пограничном слое. (К этому времени я изготовил кварцевый акселерометр по схеме В.И. Скацкого из ИПГ и выполнил расчеты спектральной передаточной функции самолета ИЛ-14 [2]). Предполагалось по измеренному в полетах спектру перегрузок рассчитывать спектр вариаций вертикальной компоненты скорости воздушного потока.

Это и было сделано, но результаты оставляли немало вопросов, и я задумался о том, чтобы поставить на самолете акустический анемометр для измерения вертикальной скорости. Совместно с С.Л. Зубковским был разработан самолетный вариант анемометра с миниатюрными конденсаторными микрофонами. Проведя испытания анемометра в аэродинамической трубе на самолетных скоростях, мы нашли удовлетворительный вариант защиты конденсаторных микрофонов от аэродинамических помех. На этой основе была разработана методика измерения вертикальной скорости с борта самолета и измерен профиль турбулентного потока тепла [3].

Эти работы потребовали такого серьезного погружения в инженерные расчеты, электронные схемы и интерпретацию получаемых результатов, что оттеснили

на долгие годы чисто теоретические задачи. Надо сказать, что сформулированное А.М. Обуховым кредо института состояло во внедрении в арсенал исследования физики атмосферы лучших достижений физики и математики. При этом под физикой понималось и создание новых приборов и средств исследований. Обухов как руководитель аспиранта этому не только не препятствовал, но, напротив, активно поддерживал, по-видимому, предполагая получить для института в моем лице, выпускника физфака, вместо теоретика теоретически подкованного экспериментатора. К тому же я понимал, что как по математической подготовке, так и по способностям далеко уступаю ведущим теоретикам отдела, таким как Обухов, Монин, Яглом и Дикий. Это я предметно ощутил, когда в середине моего аспирантского срока вышла статья А.С. Монины и А.М. Обухова “Малые колебания атмосферы и адаптация метеорологических полей” [4], которая перекрывала мои теоретические еще не опубликованные исследования в рамках аспирантского плана. Так из несостоявшегося теоретика я превратился в экспериментатора.

Развитию экспериментальных исследований по физике пограничного слоя способствовало создание по инициативе А.М. Обухова и постоянное совершенствование механической мастерской, что позволяло предлагаемые исследователями идеи приборов и устройств доводить до уровня действующих макетов. Впоследствии в порядке участия в международных экспедициях по сравнению приборов для исследования турбулентности (Ванкувер, 1968 год [5], Цимлянск, 1970 [6], Австралия, 1976 год [7]), созданные в институте штучные приборы (“макеты”) – термоанемометр, термометр сопротивления переменного тока, акустические анемометры, оптический гигрометр, а также устройства для регистрации и обработки, – успешно конкурировали с зарубежными фирменными приборами того времени.

В сотрудничестве с С.Л. Зубковским, Д.Ю. Соколовым, Л.Г. Елагиной, Ф.-М. А.Ермолаевым были созданы новые приборы и устройства, а также методики для исследования турбулентного обмена как с вехи Фруда, так и с борта большого научно-исследовательского судна. На этой основе были выполнены исследования в Черном и Средиземном морях, а впоследствии и в тропической Атлантике (ТРОПЭКС-72 [8], ПИГАП-74 [9]) и был получен ряд новых результатов.

При исследовании турбулентности я ставил своей целью проверять не только следствия, но и исходные предположения теоретических предсказаний. Например, оказалось, что предположение о локальной изотропии температуры в приземном слое не соответствует действительности, несмотря на то, что некоторые следствия его подтверждают. Для объяснения пришлось отказаться от чисто статистического подхода в описании гидродинамики приземных течений и обратиться к исследованию пространственной структуры индивидуальных неоднородностей. Было обращено внимание на роль поглощения радиации в формировании температурной стратификации приземного слоя. Для этого необходимо было перейти от одноточечных измерений к многоточечным. Как следствие такого подхода, были получены новые результаты, касающиеся, в частности, когерентных структур поля температуры, ротора, спиральности и потенциального вихря в приземной турбулентности.

Настоящий обзор касается преимущественно экспериментальных исследований приземного (и приводного) слоя в ИФА за 60 лет его существования.

## 1. Основы теории и методики исследования приземного слоя к концу 50-х годов 20-го века



*А.Н. Колмогоров    А.М. Обухов    А.М. Яглом    С.И. Кречмер    А.В. Перепелкина*

Интенсивные экспериментальные исследования в области атмосферной турбулентности начались в нашей стране с момента создания в 1946 году в составе ГЕОФИАНа Лаборатории атмосферной турбулентности, в которую вышли ее первый руководитель А.Н. Колмогоров и четыре сотрудника: А.М. Обухов, А.М. Яглом, С.И. Кречмер и А.В. Перепелкина. В 1947 году А.М. Обухов защитил докторскую диссертацию и возглавил Лабораторию атмосферной турбулентности. ИФА выделился из ГЕОФИАНа по распоряжению Президиума АН СССР от 6 января 1956 года. В этом же году была создана Цимлянская научная станция, задуманная как полигон для исследований по атмосферной турбулентности и атмосферной акустике.

Первоначально исследования турбулентности были направлены на проверку предсказаний теории локально-изотропной турбулентности Колмогорова-Обухова [10, 11]. Важнейшие из них – это квадратичный закон для структурной функции скорости второго порядка при малых значениях аргумента (вязкий интервал) и “закон 2/3” для инерционного интервала, где изотропия имеет место, но вязкость уже не проявляется. Для этой же области Обуховым был предсказан “закон 4/3” [10] для коэффициента турбулентного обмена, установленный ранее эмпирически Ричардсоном. Граница раздела между вязким и инерционным интервалами определяется масштабом  $\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$ , получившим название колмогоровского микромасштаба турбулентности (здесь  $\varepsilon$  – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло,  $\nu$  – кинематическая вязкость). Несколько позднее открытие Обуховым “закона 2/3” для структурной функции температуры второго порядка [12] заложило основу теории локально-изотропных скалярных полей.

Огромное влияние на дальнейшее развитие исследований приземной турбулентности оказало создание Обуховым и Мониным теории приземного слоя. Согласно этой полуэмпирической “анизотропной” теории [13], при стационарности и горизонтальной однородности подстилающей поверхности режим приземного слоя определяется четырьмя размерными параметрами:  $z, g/T, \overline{w'T'}, \overline{u'w'}$  (при трех независимых размерностях). Здесь  $z$  – высота,  $g/T$  – параметр плавучести,  $w', u', T'$  – временные вариации вертикальной и продольной компонент скорости и температуры, черта сверху означает временное осреднение. В этих предположениях нормированные одноточечные статистических моменты температуры и

скорости ветра зависят от единственного безразмерного параметра  $\zeta = z / L$ , где  $L$  – параметр длины, известный как масштаб приземного слоя Обухова – Монина. Теория Монина–Обухова предсказала асимптотическое поведение некоторых безразмерных функций (например, вертикальных профилей температуры и скорости). В то же время, большое число различных важных для теории и приложений констант и безразмерных функций (в том числе спектральных) необходимо было определить из эксперимента, что и составило предмет для многих экспериментальных исследований последующих десятилетий.

Еще до начала экспедиционных работ в Цимлянске С.И. Кречмером под руководством Обухова были разработаны микротермометр сопротивления [14] для измерения  $T'$  и термоанемометр оригинальной конструкции [15], позволявший измерять совместно  $u'$  и  $w'$ . Регистрация велась на многоканальный шлейфный осциллограф, т. е. на движущуюся ленту из фотобумаги. Цифровые отсчеты получались путем замера отклонений от скользящего среднего с помощью циркуля-измерителя. Вторые моменты, т.е. квадраты и произведения вычислялись с помощью примитивных калькуляторов. Была хорошо разработана методика измерений профилей температуры и скорости ветра. Со времен прежних экспедиций под руководством Обухова измерительная аппаратура размещалась в подземных укрытиях (землянках или блиндажах), чтобы не создавать нарушений однородности поверхности.

Столь капитальные теоретический и экспериментальный заделы создали прочную основу развития исследований пограничного слоя на базе Цимлянского полигона.

## **2. Развитие Цимлянского полигона**

Найденный лично Обуховым участок невозделанной степи площадью  $700 \times 700$  м на окраине поселка Цимлянск стал с 1956 полигоном института для исследования пограничного слоя. В конце 50-тых – начале 60-тых годов на полигоне были построены жилой дом, веранда для отдыха, столовая с кухней и два домика для лабораторных работ. Вблизи центра полигона появились три блиндажа различного назначения, у южной границы полигона был создан солнечный павильон для исследования так называемого астроклимата. а около юго-западного угла полигона была установлена 70-метровая мачта с пятью балконами для градиентных датчиков и большим ( $10 \times 10$  м) блиндажом под ее основанием (рис. 1). В ходе исследований характеристик приземной турбулентности обязательно выполнялись градиентные измерения. Градиентное оборудование разрабатывалось и обслуживалось в ходе экспедиций специальным (градиентным) отрядом, которым многие годы руководила А.В. Перепелкина, а позднее – Д.Ф. Тимановский. В некоторые сезоны для зондирования пограничного слоя использовались шары-пилоты и подвесной аэростат.

Впоследствии 70-метровая мачта была оборудована подъемником, позволявшим перемещать измерительный комплекс по высоте в пределах 10–60 м. Мачта использовалась в основном в ходе совместных измерений характеристик турбулентности с самолета и с вершины мачты. Самолет (ИЛ-14 или ЛИ-2) базировался в Ростове (рис. 2). Летные экспедиции 1960-го и 61-го годов были посвящены



Рис. 1. Цимлянская база. 50-е годы



Рис. 2. Самолет ИЛ-14



Рис. 3. Установка измерительной аппаратуры

главным образом методическим вопросам. Исследовательские полеты осуществлялись площадками, обеспечивая за 5 часов трехкратное зондирование пограничного слоя от 50 до 3000 м.

В 80-х годах 70-метровая мачта была разобрана, и в обиход вошли раздвижные 40-метровые мачты “Унжа” (рис. 3). Они предназначались изначально толь-

ко для градиентных измерений, т. е. сглаженных временным осреднением профилей скорости ветра и температуры в слое до 40 метров.

Впоследствии одна из них была оборудована подъемником для перемещения по высоте пульсационной аппаратуры, а позднее и устройством для размещения на заданных высотах набора малоинерционных термометров, что положило начало исследованию когерентных структур поля температуры.

Кроме градиентного, в состав экспедиции входило еще несколько отрядов, в том числе пульсационный (он же турбулентный) и летный, состоявший из наземного и самолетного подотрядов.

### **3. Развитие инструментальной базы и методики исследований, средств регистрации и статистической обработки**

#### **а) Аналоговые приборы для исследования статистических характеристик турбулентности**

Отсутствие в начальный период надежных средств регистрации измеренных турбулентных пульсаций поставило задачу разработки аналоговых приборов, позволяющих непосредственно в процессе измерений производить статистический анализ. Самыми важными в этом ряду оказались *перемножитель* и *частотный анализатор автоспектра*, разработанные В.М. Бовшеверовым, А.С. Гурвичем, В.И. Татарским и Л.Р. Цвангом [16].

##### а1) Перемножитель

Для вычисления среднеквадратических значений измеряемых вариаций вертикальной и горизонтальной компонент скорости  $\sigma_w^2, \sigma_u^2$  и температуры  $\sigma_T^2$ , а также их средних произведений  $\overline{w'T'}, \overline{w'u'}$  и других были созданы аналоговые электронные перемножители. Перемножитель реализует следующий принцип перемножения. Представим себе последовательность прямоугольных импульсов с фиксированным периодом  $T$ , скважностью  $S$  и амплитудой  $U$ . Постоянная составляющая такой последовательности, отсчитанная от нижнего уровня напряжения в импульсах, задается формулой  $u = U / S = (U / T)\tau$ . Таким образом, если величину  $\tau$  линейно связать с одним из сигналов, которые нужно перемножить, а  $U$  – с другим, то  $u$  будет пропорционально произведению этих двух сигналов. Мой личный вклад в схему состоял в замене однополярного ключа на балансный, что почти на порядок снизило дрейф нуля. Нуль прибора устанавливается при  $\tau = T / 2$ .

##### а2) Анализатор спектра

Анализатор был собран на ламповых двойных триодах 6Н8 по схеме параллельного анализа. Аналоговый сигнал, пройдя через широкополосный входной усилитель подается на входы 25 активных полуктавных RC-фильтров. Они представляют собой избирательные усилители с двойным Т-образным мостом в цепи отрицательной обратной связи. Добротность такого фильтра  $Q = f_i / \Delta f_i$ , где  $\Delta f_i$  – полоса пропускания по половинной мощности, которая определяется выражением  $\Delta f_i = f_i (\sqrt[4]{2} - 1 / \sqrt[4]{2})$ , так что  $Q = 2,87$ . К выходу каждого фильтра подключен линейный детектор, собранный по мостовой схеме, с нагрузки которого сигнал поступает на интегрирующую ячейку с постоянной времени 100 сек. Для

измерения этих сглаженных показаний выводы емкостей этих интегрирующих ячеек поочередно подключаются с помощью шагового искателя к сеткам выходного двойного триода, нагруженного на регистрирующий прибор, либо просто на стрелочный прибор для ручной записи. В самолетном варианте анализатора 25 таких фильтров охватывают полосу от 0,01 до 50 Hz.

Изготовление и настройка многочисленных низкочастотных фильтров очень трудоемка. Кроме того, принципиальная трудность состоит в том, что при анализе процессов с зависящей от частоты спектральной плотностью в получаемую оценку вносится систематическая ошибка. Чтобы ее учесть, требуется согласовывать добротность и форму частотной характеристики фильтров анализатора с предполагаемым (но, возможно, заранее неизвестным) наклоном спектра.

Теоретические расчеты для случая степенного закона изменения спектральной плотности типа  $f^{-\alpha}$  с помощью подобных фильтров позволили вычислить эту ошибку, оказавшуюся функцией двух переменных  $Q$  и  $\alpha$  [17]. Для конкретного значения добротности  $Q = 2,87$ , при  $\alpha = 5/3$  ошибка составляет около 10%

#### **б). Методика измерений вертикальной компоненты скорости с борта самолета**

Любая измерительная аппаратура не может функционировать на борту самолета, если радиостанция самолета работает на передачу. Кроме того, она испытывает помехи от работы электрических цепей агрегатов самолета. Измерения вертикальной компоненты скорости и температуры с борта самолета подвержены также действию аэродинамических и акустических помех. Первые приводят к хаотическим вариациям амплитуды синусоидальных сигналов, принимаемых конденсаторными микрофонами-приемниками, что не позволяет измерять разность фаз, несущую информацию о вариациях скорости. От этой помехи удалось избавиться, защитив приемные и излучающие микрофоны цилиндрическим экраном из металлической сетки с размером ячеек порядка 5  $\mu$ . Акустический шум от винтов устранялся за счет высокой избирательности микрофонных усилителей акустического анемометра, настроенных на частоту 100 kHz.

Принципиальной проблемой является реакции самого самолета на вариации вертикальной компоненты скорости в набегающем потоке воздуха. Для ее учета использовались акселерометр и центральная гировертикаль. Акселерометр был установлен внутри фюзеляжа в носовой части самолета. Интегрирование сигнала перегрузки давало аналоговый сигнал вертикальной скорости. Гировертикаль, установленная в центре тяжести самолета, вырабатывала аналоговый сигнал, пропорциональный углу тангажа. Было разработано аналоговое суммирующее устройство для внесения в сигнал, измеренный датчиком вертикальной скорости, корректирующих сигналов для учета влияния вариаций угла тангажа и вертикальных движений центра тяжести самолета. Устройство было испытано в аэродинамической трубе Авиационного института в Москве с помощью изготовленной для этой цели “качалки“, позволявшей имитировать вариации угла тангажа и перегрузки самолета.

#### **в). Термометр сопротивления**

Термометр сопротивления переменного тока для пульсационных измерений, разработанный С.И. Кречмером и работавший на батарейных лампах прямого

накала [14], стал в дальнейшем базовым образцом при разработке многочисленных модификаций малоинерционного термометра: самолетной, корабельной и других. Термометры сопротивления отличает высокая линейность, большой динамический диапазон и возможность создания весьма миниатюрных датчиков. Важнейший параметр прибора – его постоянная времени  $\tau$  определяется скоростью ветра и толщиной нити датчика. При умеренном ветре толщине нити  $d = 20$  мкм соответствует  $\tau = 10^{-2}$  сек [18], при  $d = 5$  мкм постоянная времени  $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$  сек [19], а диаметру сечения нити  $d = 0.63$  мкм отвечает  $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$  сек [20].



Рис. 4. В 50-х и 60-х годах под руководством В.М. Бовшеверова были разработаны направленные излучатели и приемники звука

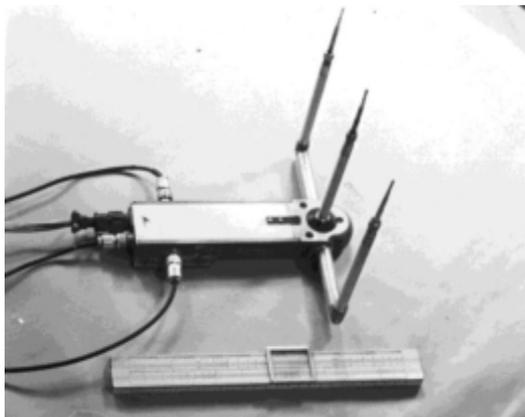


Рис. 5. “Головка” анемометра, разработанной автором для измерения вертикальной компоненты скорости с борта самолета на скоростях до 300 км/час

При измерении вертикального турбулентного потока тепла в приземном слое атмосферы верхнюю границу  $f_s$  полосы частот, воспроизводимых датчиками температуры и скорости, можно ограничить, исходя из условия  $\Omega \leq 10$ , (где  $\Omega = f_s z / \bar{u}$ ,  $\bar{u}$  – скорость ветра,  $z$  – высота), так что при  $z = 3$  м,  $\bar{u} = 5$  м/сек имеем  $f_s = 15$  Гц. Такую полосу имеет датчик, имеющий  $d = 20$  мкм. Вольфрамовый датчик из проволоки такого диаметра в основном и использовался для этих целей, в том числе и на самолете при скоростях до 300 км/час и на высотах от 50 до 4000 м.

В самолетный термометр Л.Р. Цвангом было введено устройство, обеспечивающее плавное автоматическое слежение за средней температурой воздуха. Оно позволяет сохранять одинаковую и достаточно высокую чувствительность к пульсациям температуры, несмотря на значительное изменение средней температуры при изменении высоты.

Использование установленного на борту комплекта аппаратуры, состоявшего из термометра конструкции Л.Р. Цванга, описанного ниже самолетного анемометра, дополненного устройством для учета реакции самолета на турбулентные возмущения поля скорости воздуха, и аналогового перемножителя позволило впервые в мире измерить профиль турбулентного потока тепла в слое от 50 до 2000 м [3].

Термометр с 20-микронным датчиком использовался и в международных экспедициях по сравнению приборов для исследования турбулентности, проведен-

ных 1968 году в Ванкувере (Канада) [5] и в Цимлянске в 1970 году [6], где получил в обоих случаях высокую оценку.

Впоследствии было создано несколько вариантов термометров переменного тока на интегральных схемах для измерений в более широкой полосе частот. Один из них использовался впервые в зимней экспедиции в Колтушах в 1976 году [19], а затем в Международной экспедиции по сравнению приборов в Австралии в 1976 году [7], где был признан лучшим из представленных там термометров.

Особенно высоким требованиям удовлетворял термометр, разработанный Г.В. Азияном для измерения флуктуаций температуры в полосе частот, включающей интервал диссипации [20]. Его характеристики: толщина нити датчика – 0.63 *мкм*, длина около 0,4 *мм*, коэффициент шума – не хуже 1,2. Полоса частот 0–4 *кГц*.

### г) Акустические преобразователи

В 50-х и 60-х годах под руководством В.М. Бовшеверова были разработаны направленные излучатели и приемники звука (рис. 4) и начались исследования по рассеянию звука на неоднородностях температуры и скорости [22] Это положило основу для создания акустических локаторов (сонаров) и разработки ряда новых методов дистанционного зондирования пограничного слоя.

### д) Акустический анемометр

Как упомянуто в Предисловии, в Цимлянской экспедиции 1957 года проходили полевые испытания первый образец акустического анемометра, который его авторы В.М. Бовшеверов и В.П. Воронов называли акустическим флюгером [1]. Обладая абсолютной калибровкой, линейностью и малой инерционностью, а также способностью четко выделять нужную компоненту скорости, акустический анемометр имеет в условиях приземного слоя очевидные преимущества перед термоанемометрами. Действие анемометра основано на использовании эффекта сложения скоростей звуковой волны со скоростью среды. Прибор работал на принципе непрерывного излучения и измерял фазовым методом две горизонтальные компоненты скорости с использованием цилиндрических конденсаторных микрофонов конструкции В.М. Бовшеверова. Центральный микрофон излучает ультразвуковую волну с частотой 100 *кГц*, а два микрофона, расположенные по обе стороны от него на расстоянии 0,1 *м*, принимают этот сигнал. Звуковая волна проходит это расстояние за различное время в зависимости от компоненты *v* скорости среды вдоль линии микрофонов. Нетрудно убедиться, что эта разность равна  $\Delta t = 2lv / (c^2 - v^2)$ , где *l* – расстояние от излучателя до приемника, *c* – скорость звука. Влияние температуры на  $\Delta t$  и искажение линейной зависимости  $\Delta t$  от скорости описывается членами порядка  $T' / T$  и  $v^2 / c^2$  по сравнению с единицей. (Здесь  $T'$  – это разность температуры на противоположных отрезках между излучателем и приемником). Таким образом, можно считать, что  $\Delta t = 2lv / c_0^2$ . Измерение  $\Delta t$  производится с большой точностью старт-стопным триггером. Шкала прибора  $V_{из}$  определяется длительностью одного периода излучаемого сигнала  $1/f$ . Заменяя в выражении для  $\Delta t$  эту величину на  $1/f$ , получаем  $V_{из} = c_0^2 / 2lf$ , так что при  $l = 0,1$  *м* имеем  $V_{из} = 11,2$  *м/сек*.

Электронная схема этого анемометра включала операцию гетеродинирования, которая позволяла перенести измерение фазы на более низкую частоту, что дава-

ло выигрыш в точности. Этот конкретный экземпляр прибора стал образцом для анемометров, предназначенных для работы в приповерхностном слое воздуха над сушей и океаном, на самолете, а также других акустических приборов, созданных в ИФА.

На рис. 5 представлен вид “головки” анемометра, разработанной автором для измерения вертикальной компоненты скорости с борта самолета на скоростях до 300 км/час. Этот анемометр использовался в экспериментах по измерению профиля турбулентного потока тепла в пограничном слое атмосферы [3]. В качестве излучателей и приемников использовались конденсаторные микрофоны собственной разработки. Одной из обкладок в таком микрофоне является слой металлической фольги, наклеенный на две противоположные грани четырехгранной призмы из диэлектрика со стороной сечения 2 мм и высотой 10 мм. Второй обкладкой является слой золота, нанесенный в вакууме с помощью испарения в электрическом разряде на 3–5-микронную териленовую пленку. Собственная емкость микрофона порядка 100 пФ.

Внутри головки были размещены два усилителя на миниатюрных лампах, с выходов которых усиленные сигналы по кабелю передавались на схему фазометра. Кроме этого, в ней находился трансформатор для повышения напряжения, подаваемого на излучатель до уровня 30–40 эфф. вольт. Как на излучатель, так и на приемники подавалось напряжение поляризации 100 вольт. При использовании на самолете микрофоны закрывались цилиндрическими экранами диаметром 6 мм из мелкой латунной сетки для защиты от действия ветрового напора.

Образец акустического датчика вертикальной скорости с измерительной базой около 3 см был создан А.С. Гурвичем для исследования спектра в высокочастотной области [23].

Для измерений продольной компоненты скорости в приземном слое С.Л. Зубковский использовал анемометр, подобный самолетному, в котором линия излучатель-приемник была ориентирована вдоль ветра. В ходе измерений в аэродинамической трубе, было установлено, что при соотношении диаметра микрофона к расстоянию между ними 2/100 систематическая ошибка измерения продольной компоненты скорости за счет аэродинамической тени составляет примерно 7%. С таким датчиком С.Л. Зубковский выполнил серию измерений спектров продольной компоненты скорости в приземном слое [24].

Позднее (около 1965 года) было изготовлено 5 двухкомпонентных анемометров с крестообразным расположением микрофонов (рис. 8), пред назначенных для совместного измерения вертикальной и продольной (вдоль ветра) компонент скорости. К этому времени был разработан также 4-канальный магнитный регистратор с полосой записи–воспроизведения 0–20 Гц и аналоговый коспектр-анализатор. Кроме того, построенная ранее 70-метровая мачта бала оборудована подъемником, позволявшим перемещать измерительную установку по высоте в пределах 10–60 м. Это позволило в 1967 году выполнить измерения (по-видимому, впервые в мире) коспектров  $F_{uw}(f)$ ,  $F_{wT}(f)$  на 4 уровнях: 4, 12, 37 и 53 метра [25].

Как было отмечено по итогам этих измерений, крестообразный датчик давал заметное искажение коспектра  $F_{uw}(f)$ , состоявшее в изменении знака этой функции в области частот около одного герца. Это же было зафиксировано при сравнении коспектров, полученных по показаниям нашего анемометра и анемометра

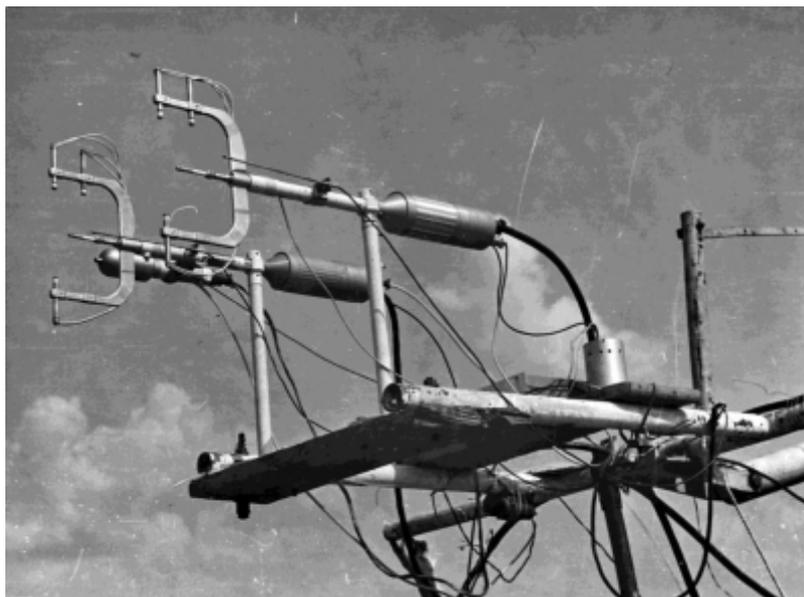


Рис. 6. Двухкомпонентный анемометр с X-образным расположением микрофонов

японской фирмы Кайо-денки, в ходе международного эксперимента по сравнению приборов, проведенного в Ванкувере, Канада осенью 1968 года [5].

Этот опыт привел к созданию нового X-образного датчика. Один из более поздних вариантов конструкции датчика двухкомпонентного анемометра с X-образным расположением микрофонов показан на рис. 6. При частоте излучения 100 кгц этот датчик шкалы измерений:  $\pm 5,9$  м/сек – для  $w$  и  $\pm 10,2$  м/сек для  $u$ . Влияние температуры компенсируется с точностью до пространственной изменчивости температуры на расстояниях порядка половины длины базы.

Угловая диаграмма X-образного датчика в области углов  $\pm 20^\circ$  вокруг направления ветра отклоняется от идеальной косинусной на 1–2%, тогда как для крестообразного – на 7% и от случая к случаю заметно меняется. Фактически эта диаграмма имеет глубокий провал вблизи угла  $0^\circ$ , что делает датчик  $u$  чувствительным к  $w$ . Это и объясняет отмеченные выше искажения коспектра  $F_{uw}(f)$ .

X-образный датчик с микрофонами как на рис. 6 показал хорошие результаты при измерении ковариации  $u'w'$  и соответствующего коспектра в Цимлянкой международной экспедиции 1970 года (рис. 7) по сравнению приборов [6].

Первый всепогодный трехкомпонентный анемометр с пьезокерамическими микрофонами, разработанный совместно с КБ института Океанологии, впервые использовался в экспедиции Атэп 74 в 1974 году [9] (рис. 8) в комплексе с термометром сопротивления и инфракрасным гигрометром для измерения турбулентных потоков тепла, влаги и количества движения с борта судна.

Этот прибор позднее был представлен советской стороной в международном эксперименте ИТСЕ по сравнению приборов в Австралии в 1976 году [7]. В ходе эксперимента выяснилось, что он отличается заметным низкочастотным трендом, вызванным низким качеством керамических микрофонов. Тем не менее, при вычитании скользящего среднего мы с успехом использовали этот прибор для из-



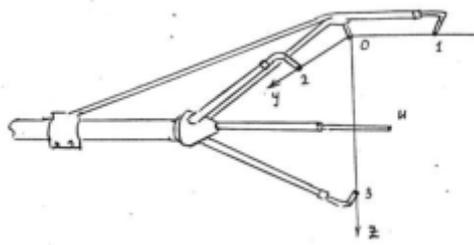
Рис. 7. Участники экспедиции 1970 года в Цимлянске



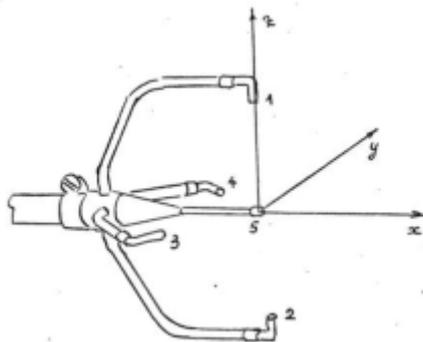
Рис. 8. Здесь 1 – инфракрасный гигрометр, 2 – акустический анемометр, 3 – микротермометр, 4 – гиостабилизированная платформа, 5 – акселерометр

мерения пульсаций как на суше, так и в океане. Схема этого датчика показана на рис. 9.

Еще один вариант трехкомпонентного анемометра непрерывного излучения с конденсаторными микрофонами фирмы Briel & Kjer был предложен В.М. Бовшеверовым (рис. 10) [26]. Результаты измерений многих лет, выполненных в Цимлянске с использованием этого датчика, составили содержание ряда публи-



**Рис. 9.** Трехкомпонентный датчик акустического анемометра, применявшийся в эксперименте по сравнению приборов в Австралии в 1976 году. 0, 1 – микрофоны для  $u$ -компоненты, 0, 2 – для  $v$ , 0, 3 для  $w$ . Длина отрезка 0-1 10 см, отрезков 0-2 и 0-3 по 17 см



**Рис. 10.** Трехкомпонентный датчик с микрофонами Briel@Kjer. 5 – излучатель, 1,2 – микрофоны для  $w$ -компоненты, 3 и 4 – микрофоны для выделения  $u$ - и  $v$ -компонент

каций. В частности, были исследованы пространственные корреляционные функции продольной компоненты скорости [27].

#### е) Акустический термометр

Идея измерения температуры воздуха в свободной атмосфере акустическим методом появилась в связи с тем, что использовавшимся в то время в аэрологии термометрам были присущи ошибки, обусловленные инерционностью и влиянием радиационного нагрева датчика. Скорость звука связана с виртуальной температурой  $T_e = T(1 + 0,275e / p)$ , соотношением  $c = 20,067\sqrt{T_e}$ , где  $p$  и  $e$  – полное давление и парциальное давление водяного пара соответственно. Виртуальная температура определяется из измерения суммы времен распространения звука от излучателя до двух приемников, расположенных по обе стороны от излучателя. Использовались цилиндрические конденсаторные микрофоны, разработанные в ИФА В.М. Бовшеверовым для акустического анемометра. Здесь также использовался фазовый метод измерения временных интервалов. Обширные лабораторные исследования позволили создать несколько действующих образцов акустического термометра. Они были испытаны в термо-барокамерах в диапазоне температур  $+30 - (-70 \text{ }^\circ\text{C})$  и давлений  $1000 - 10 \text{ мб}$ . Результаты этих исследований и нескольких запусков прибора содержатся в обстоятельной работе М.И. Мордуховича [28], где доказано преимущество акустического метода, особенно в смысле устранения радиационной погрешности.

#### ж) Инфракрасный гигрометр

Не менее важным инструментом для исследования приземного слоя атмосферы явился оптический (инфракрасный) гигрометр. Водяной пар, являющийся основным парниковым газом, вносит существенный вклад в формирование профиля температуры. Кроме того, факт “возникновения” при испарении или “исчезновения” при конденсации водяного пара на нижней границе приземного слоя делает неприемлемым привычное предположение о равенстве нулю вертикальной скоро-



Рис. 11. Б.М. Копров и Л.Г. Елагина на сравнении приборов. Австралия, 1976

сти на поверхности. Эти же явления приходится учитывать при рассмотрении баланса тепла подстилающей поверхности и прилегающего к ней слоя воздуха.

Прибор, разработанный в оптическом отделе Г.В. Розенберга его аспиранткой Л.Г. Елагиной [29], был построен по двухлучевой схеме и имел в своем составе герметически закрытый светоделитель с оптическим клином и механическим обтюратором и открытую часть в виде многоходовой кюветы. Все это размещалось на массивной стальной плите, что делало его достаточно громоздким.

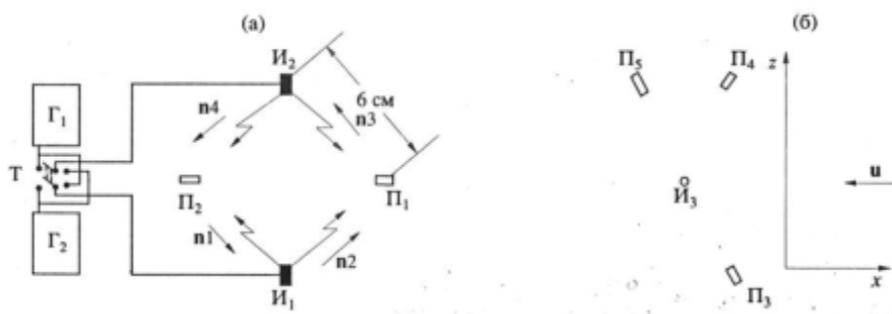
Этот прибор позволил измерять как средние значения, так и турбулентные вариации абсолютной влажности, т.е. плотности водяного пара. Это дало Л.Г. Елагиной приоритет в измерении спектров турбулентных вариаций влажности [30] в приземном слое воздуха. В 1969 году с помощью этого прибора был измерен спектр вертикального турбулентного потока водяного пара на Можайском море [31]. Летом 1971 года турбулентные потоки водяного пара измерялись в степи под Уральском в ходе исследования баланса тепла на поверхности почвы.[32].

Известно также, что при испарении с растворов солей  $NaCl$ ,  $KCl$  (морская вода) в воздух переносятся ионы этих солей, несущие отрицательный электрический заряд [33]. Этот феномен в масштабах планеты обеспечивает вынос, например, муссоном, огромного количества электрических зарядов на континент, что порождает колоссальную грозовую активность.

В начале 70-х годов в порядке подготовки к измерениям концентрации водяного пара в тропической Атлантике по программе ТРОПЭКС-72 Л.Г. Елагина разработала малогабаритный оптический гигрометр. Этот прибор использовался также в экспедиции АТЭП в 1974 году. Это позволило провести измерение всех слагаемых теплового баланса поверхности океана в тропиках [8, 9]. По результатам проведенной в 1976 году Международной экспедиции по сравнению приборов в Австралии этот гигрометр был признан лучшим из представленных там (рис. 11).



**Рис. 12.** Участники зимней экспедиции в Колтушах, слева направо: В.И. Горшков, Д.Ф. Тимановский, Н.Г. Толстобров, Т.К. Кравченко, Б.М. Копров, Л.Г. Елагина, Е.А. Куренная, В.В. Кудрявцев



**Рис. 13.** Схема размещения микрофонов в циркулиметре и X-образном анемометре

В феврале 1976 года на территории метеостанции Колтуши, вблизи поселка Воейково Ленинградской области были впервые совместно измерены турбулентные потоки тепла и водяного пара над снегом [19] (рис. 12). Оказалось, что они текут в противоположных направлениях: водяной пар вверх, а тепло – вниз.

### 3). Акустический ротораметр (циркулиметр)

На основе предложенной В.М. Бовшеверовым идеи удалось создать прибор для измерения циркуляции по замкнутому контуру. С его помощью было удалось измерить среднее значение компоненты ротора по площадке с размером 3 см, перпендикулярной средней скорости ветра и вычислить его спектр [34]. (По тео-



Рис. 14. Экспедиционная машина с регистрирующей аппаратурой и мачта-пантограф

реме Стокса циркуляция равна потоку ротора через поверхность, натянутую на этот контур). Схема циркулиметра и X-образного анемометра даны на рис. 13.

#### и) Мачта-пантограф (Д.Ю. Соколов)

Полезным устройством, существенно упростившим измерения турбулентных и радиационных потоков, явилась мачта пантограф, разработанная Д.Ю. Соколовым. Она давала возможность оперативно перемещать измерительный комплекс по высоте от поверхности до 5 метров и разворачивать его по азимуту. Впервые вариант такого устройства был применен для измерения радиационных потоков в 1969 году в экспедиции на Можайском море. Для международной экспедиции 1970 года в Цимлянске был изготовлена более грузоподъемная версия этой мачты (рис. 14), рассчитанная на размещение нескольких приборов общим весом до 100 кг (см. также выше рис. 3) [6]. Ее конструкция позволяла производить ручную квазипериодические изменения высоты. Эта особенность была использована для сравнения калибровок установленных на ней датчиков вертикальной скорости. На рис. 14 показаны экспедиционная машина-лаборатория с регистрирующей аппаратурой и мачта-пантограф. Наши австралийские коллеги изготовили для международной экспедиции в Австралии в 1976 года копию пантографа Соколова.

#### к) Модуляционный балансомер (Д.Ю. Соколов, 1967).

Теория Монина – Обухова предполагает стационарность и горизонтальную однородность подстилающей поверхности. При горизонтальной однородности в уравнении баланса температуры можно пренебречь горизонтальными производными потоков тепла и записать уравнение баланса температуры в виде

$$\partial T / \partial t = -1 / c_p \rho (\partial q_T / \partial z + \partial q_R / \partial z) + Q_\phi / c_p \rho$$

Здесь  $Q_{\text{ф}}$ -приток тепла за счет фазовых переходов. В их отсутствии можно пренебречь последним членом правой части этого уравнения. В этом уравнении мы будем считать члены осредненными по времени за интервал порядка нескольких минут и рассматривать лишь суточные вариации. Они обусловлены изменением потока солнечной радиации, которые приводят к изменению температуры подстилающей поверхности, а следовательно и интенсивности радиационного потока. Его поглощение парниковыми газами является основной причиной утреннего роста температуры слоя воздуха, прилегающего к поверхности. Этот рост прекращается лишь вблизи полудня. В этот промежуток времени и можно ожидать равенства нулю скобки в правой части уравнения баланса. Оно означает, что

$$\partial(q_T + q_R) / \partial z = 0$$

Измерения 1970 года [35] привели к странному результату, что в условиях неизменной температуры (стационарность) измеренные вертикальные производные не компенсируют друг друга, что свидетельствует об ошибке в калибровках. Этот парадокс не объяснен до настоящего времени.

#### л) Многоканальный аналоговый магнитный регистратор по методу широтной модуляции

В середине 60-х годов в России не было доступных многоканальных регистраторов для записи сигналов в турбулентном диапазоне частот (0–30 Гц)

Возникла идея использовать для магнитной записи широтно-импульсную модуляцию. Для ее реализации была использована широко применяемая в радиолокации процедура линейного преобразования аналогового сигнала во временной интервал. Основанная на применении этого преобразования широтная модуляция в применении к магнитной записи обладает тем преимуществом относительно амплитудной или частотной модуляции, что она свободна от помех, вызванных неравномерностью скорости протяжки. Первый образец 4-канального регистратора с использованием магнитной ленты шириной 1/4 дюйма, созданный мной в 1966–1967 годах, позволял записывать и воспроизводить 4 аналоговых сигнала в полосе частот 0–30 Гц. После разработки аналогового коспектр-анализатора эти записи позволили (одними из первых в мире) выполнить спектральный анализ потоков импульса и тепла [25].

В 1968 году в ходе международного эксперимента по сравнению приборов для исследования турбулентности в Ванкувере, Канада на этот магнитофон были записаны сигналы вертикальной и горизонтальной компонент скорости с нашего двухкомпонентного анемометра (описанного выше) и анемометра японской фирмы Kaiō-Denky.

В то же время коспектры потоков тепла  $w'T'$ , полученные по записям на нашем регистраторе с помощью нашего аналогового коспектр-анализатора, показали идеальное согласие с коспектрами, вычисленными канадскими коллегами цифровым методом с помощью БПФ (быстрого преобразования Фурье).

В следующие 1–2 года был создан 14-канальный аналоговый регистратор на базе магнитофона “Астра”, аналога американского *Ampex* (рис. 15). Как следует из вышеизложенного, к тому времени мы имели уже коспектр-анализатор. На этой технической основе мы провели регистрацию и обработку (с вычислением всех спектров и необходимых коспектров) в Цимлянкой международной экспедиции 1970 года [6]. Аналоговый коспектр-анализатор успешно использовался



Рис. 15. Часть аппаратуры, включающая 12-канальный магнитофон с электронной записью

затем в течение по крайней мере десяти лет. В этот промежуток времени происходила постепенная замена аналоговых методов регистрации и статистической обработки на цифровые.

**м) Аналоговый коспектр-анализатор и установка для воспроизведения аналоговых магнитных записей**

Созданный нами коспектр-анализатор состоял из 9 пар попарно идентичных узкополосных фильтров равной добротности и 9 перемножителей для получения произведений сигналов с выходов каждой пары идентичных фильтров. Под идентичностью понимается близость частотно-фазовых характеристик фильтров. Частоты фильтров были размещены равномерно на десятичной логарифмической шкале в диапазоне частот от 0,01 до 10 Гц. Чтобы добавить к этому диапазону еще почти один порядок со стороны низких частот, воспроизведение производилось дважды: одно со скоростью записи 4,7 см/сек, а другое в восемь раз быстрее – 38 см/сек. Таким образом, в установку для анализа входило устройство для аналогового воспроизведения полученных в ходе измерений магнитных записей. Поскольку в эпоху электроники на лампах накаливания такой комплекс мог весить несколько сотен килограмм, его использование происходило в стационарных лабораторных условиях. С помощью этого комплекта аппаратуры удалось провести обработку синхронных измерений в международной экспедиции по сравнению приборов для исследования турбулентности, проведенной в Цимлянске в 1970 году.

### Нерешенные проблемы

В основе теории М.-О. лежит идея Фридмана и Келлера представлять переменные в виде суммы осредненной и пульсационной составляющих. Последние рассматривались как стационарные случайные процессы. Основным уравнением

в теории М.-О. является уравнение баланса кинетической энергии турбулентности. Основными параметрами, определяющими этот баланс, являются ковариации  $\overline{w'T'}$  и  $\overline{w'u'}$ , и их отличие от нуля есть следствие анизотропности турбулентности в приземном слое. Эта полуэмпирическая теория является до настоящего времени единственной.

В то же время существует теория изотропной турбулентности. Ее следствия, касающиеся, например, структурных функций второго порядка для температуры (закон 2/3) неплохо согласуется с наблюдениями. Это дало основание считать ее применимой к реальной турбулентности, опираясь на предположение о локальной изотропии. Это предположение не было подкреплено измерением моментов нечетных порядков. Мы провели эту проверку и убедились в том, что для вертикальной и продольной ориентации базы они отличны от нуля, причем коэффициент асимметрии имеет абсолютное значение порядка единицы во всем диапазоне расстояний от внутреннего (порядка 1 мм) до внешнего (порядка высоты) масштабов. Это потребовало пересмотра представлений о пространственной структуре.

Далее, в теории М-О не рассматривается роль поглощения радиации в формировании стратификации температуры  $\alpha$ , следовательно, и роль водяного пара. Это делает ее применимой преимущественно к стационарным условиям, которые приближенно реализуются в интервале времени порядка 4-х часов вокруг полудня и в середине ночи, когда радиационный баланс поверхности почти не меняется. В общем же случае необходимо рассчитывать или измерять дивергенцию радиационного потока тепла и учитывать ее роль в формировании профиля температуры и в балансе тепла приземного слоя.

Напомним, что в предположении несжимаемости стратификация температуры определяет стратификацию плотности. Это позволяет рассматривать течение воздуха вблизи поверхности как поток расслоенной жидкости, в котором расслоение не нарушается при движении.

Что же касается водяного пара, отметим, что вертикальный поток водяного пар является одним из основных слагаемых баланса тепла поверхности. Он же является основным парниковым газом, т. е. вносит основной вклад в поглощение инфракрасного излучения подстилающей поверхности,  $\alpha$ , следовательно, в формирование профиля температуры. В присутствии водяного пара плавучесть определяется не только температурой, но и влажностью и возможны ситуации, когда архимедовы силы, обусловленные температурой и влажностью, направлены в противоположные стороны. Далее, вследствие испарения или конденсации водяного пара не выполняется уравнение сохранения плотности. При испарении водяного пара с поверхности вертикальную скорость на поверхности нельзя считать равной нулю (возникает так называемый Стефановский поток, по терминологии, принятой в технической гидродинамике). Все это поставило на повестку дня создание "инфракрасного" гигрометра и модуляционного балансомера (см. выше).

Следует напомнить, что к концу 50-х годов не существовало многих приборов и устройств, необходимых для решения названных выше и многих других задач. К их числу следует отнести исследование влияния неоднородностей скорости и температуры на прохождение звуковых и электромагнитных волн. Предстояло также исследовать инфразвук.

## Литература

- [1] *Бовшеверов В.М., Воронов В.П.* Акустический флюгер // Изв. АН СССР, Сер. геофиз. 1960. № 6. С. 882–885.
- [2] *Копров Б.М.* Измерение передаточных функций самолета ИЛ-14 // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1, № 1. С. 66–75.
- [3] *Копров Б.М., Цванг Л.Р.* Прямые измерения турбулентного потока тепла с борта самолета // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1, № 6. С. 643–648.
- [4] *Обухов А.М., Монин А.С.* Малые колебания атмосферы и адаптация метеорологических полей // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1958. № 11. С. 1360–1373.
- [5] *Miyake M., Stewart R.W., Burling R.W., Tsvang L.R., Koprov B.M., Kuznetsov O.A.* Comparison of acoustic instruments in atmospheric turbulent flow over water // *Boundary-layer Meteorology*. 1971. V. 2. P. 228–245.
- [6] *Tsvang L.R., Koprov B.M., Zubkovskii S.L., Dyer A.J., Hicks B., Miyake M., Stewart R.W., McDonald J.W.* A comparison of turbulence measurement by different instruments, Tsimlyansk Field Experiment 1970 // *Boundary Layer Meteorol.* 1973. V. 3. №4. P. 499–521.
- [7] *Dyer A.I., Garratt I.R., Francey R.I. et al.* An international turbulence comparison experiment (ITCE-1976) // *Boundary Layer Meteorol.* 1982. V. 24, N 2. P. 181–209.
- [8] *Волков Ю.А., Елагина Л.Г., Копров Б.М., Кравченко Т.К.* Турбулентные потоки тепла и влаги и некоторые статистические характеристики турбулентности в приводном слое воздуха тропической зоны океана // ТРОПЭКС\_72. Л.: Гидрометеиздат, 1974. С. 685.
- [9] *Волков Ю.А., Елагина Л.Г., Копров Б.М.* Характеристики турбулентного обмена в экваториальной зоне Атлантики // ТРОПЭКС-74. Т. 1. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
- [10] *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1941. Т. 5, № 4. С. 453–456.
- [11] *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
- [12] *Обухов А.М.* Структура температурного поля в турбулентном потоке // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. 1949. Т. 13, № 1. С. 58–69.
- [13] *Монин А.С., Обухов А.М.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофиз. ин-та. 1954. № 24 (151). Изд. АН СССР.
- [14] *Кречмер С.И.* Исследование микропульсаций температурного поля в атмосфере // Докл. АН СССР. 1952. Т. 34, № 1. С. 55–58.
- [15] *Кречмер С.И.* Методика измерения микропульсаций скорости ветра и температуры в атмосфере // Тр. Геофиз. ин-та. 1954. № 24 (151). Изд. АН СССР.
- [16] *Бовшеверов В.М., Гурвич А.С., Татарский В.И., Цванг Л.Р.* Приборы для статистического анализа турбулентности. Труды совещания по исследованию мерцания звезд. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959.
- [17] *Алексеев В.Г.* К анализу приборов для измерения временных спектров турбулентных пульсаций // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1, № 7. С. 688–695.
- [18] *Гурвич А.С., Кравченко Т.К.* О частотном спектре пульсаций температуры в области мелких масштабов // Тр. института физики атмосферы. Атмосферная турбулентность. 1962. № 4. С. 144–146.
- [19] *Елагина Л.Г., Копров Б.М., Тимановский Д.Ф.* Некоторые характеристики приземного слоя воздуха над снегом // Изв. АН СССР. ФАО. 1978. Т. 14. № 9.

- [20] *Азизян Г.В., Копров Б.М., Калугин В.В.* О микроструктуре температурного поля в интервале диссипации // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т.28, №9.
- [21] *Каллистратова М.А.* Методика исследования рассеяния звука в атмосфере // Акустич. ж. 1959. Т. 5, № 4. С. 496–498.
- [22] *Каллистратова М.А.* Экспериментальное исследование рассеяния звука в атмосфере // Труды ИФА АН СССР. 1962. Т. 23. № 4. С. 203–256.
- [23] *Гурвич А.С.* Экспериментальное исследование частотных спектров и функций распределения вероятностей вертикальной компоненты скорости ветра // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1960. № 7. С. 1042–1055.
- [24] *Зубковский С.Л.* Частотные спектры пульсаций горизонтальной компоненты скорости ветра в приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 10. С. 1425–1433.
- [25] *Зубковский С.Л., Копров Б.М.* Экспериментальное исследование спектров турбулентных потоков тепла и количества движения в приземном слое атмосферы // Изв. АН СССР. ФАО. 1969. Т. 5. № 4. С. 323–331.
- [26] *Бовшиверов В.М., Копров Б.М., Мордохович М.И.* О трехкомпонентном акустическом анемометре // Изв. АН СССР. ФАО. 1973. Т. 9. № 4. С. 434–437.
- [27] *Зубковский С.Л., Федоров М.М.* Экспериментальное определение пространственных корреляционных функций поля скорости ветра в приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22, № 9. С. 909–916.
- [28] *Мордохович М.И.* Акустический термометр // Труды института физики атмосферы. Атмосферная турбулентность. 1962. № 4. С. 33–80.
- [29] *Елагина Л.Г.* Оптический прибор для измерения турбулентных пульсаций влажности // Изв. АН СССР. 1962. № 8. С. 1100–1107.
- [30] *Елагина Л.Г.* Об измерении частотных спектров пульсаций абсолютной влажности в приземном слое атмосферы // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 12. С. 1860–1865.
- [31] *Елагина Л.Г., Копров Б.М.* Измерение турбулентных потоков влаги и их частотных спектров // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7, № 2. С. 117–120.
- [32] *Елагина Л.Г., Зубковский С.Л., Копров Б.М., Соколов Д.Ю.* Экспериментальное исследование баланса тепла на поверхности почвы // Комплексный энергетический эксперимент (КЭНЭКС). Л.: Гидрометеоиздат, 1973. С. 38–45.
- [33] *Azad A.K., Latham J.* Electrification associated with the evaporation of water and ionic solution // J. Atm. and Terr. Phys. 1967. V. 29, N 11. P. 1403–1410.
- [34] *Бовшиверов В.М., Гурвич А.С., Кочетков А.Н., Ломадзе С.О.* Измерение частотного спектра мелкомасштабной циркуляции скорости в турбулентном потоке // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7, № 4. С. 371–376.
- [35] *Копров Б.М., Соколов Д.Ю.* Об экспериментальном исследовании изменчивости потоков тепла в приземном слое атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1975. Т. 11, № 7. С. 743–747.

## 1.2. Спиральность атмосферных процессов

*М.В. Курганский*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

### 1. Спиральность в гидродинамике в физике атмосферного пограничного слоя

В гидродинамике спиральность определяется как скалярное произведение трехмерных векторов скорости и вихря скорости. В течениях идеальной баротропной жидкости интеграл от спиральности, взятый по жидкому объему с границами, не пронизываемыми вектором вихря скорости, является вторым квадратичным по полю скорости интегралом движения, в дополнение к интегралу кинетической энергии [1, 2]. В гидродинамической литературе спиральность поля скорости иногда называют «кинетической спиральностью», чтобы отличить от широко используемой в магнитной гидродинамике, астрофизике и физике Солнца «магнитной спиральности» (напр. [3]).

Исторически, и до сих пор, наиболее успешное и широко известное приложение понятия спиральности – к объяснению генерации магнитного поля в электропроводящих средах за счет динамо-механизма [4, 5]. Хотя, строго говоря, в динамо-теории наличие ненулевой спиральности не является необходимым [6], ее присутствие чрезвычайно облегчает задачу генерации магнитного поля. Общее вращение играет при этом ключевую роль: видимо, не является случайным, что (заметное) магнитное поле обнаруживается исключительно на быстро вращающихся небесных телах [4, 7, 8] предприняли большие усилия по перенесению идей динамо-теории (теория среднего поля и альфа-эффекта) на генерацию крупномасштабного поля скорости на фоне более мелкомасштабной спиральной турбулентности. Здесь, однако, есть ряд концептуальных моментов (например, жесткое требование выполнения закона сохранения углового момента), которые делают решение задачи более трудным и физически менее прозрачным по сравнению с магнитным динамо.

Какова роль спиральности в гидродинамике и в геофизической гидродинамике, в частности? Это – прежде всего структурообразующее понятие. В механике Намбу [9, 10], являющейся определенным обобщением и развитием Гамильтонова формализма в гидродинамике, оно ставится на один иерархический уровень с понятием (кинетической) энергии. Ключевым моментом является то, что исходные свойства симметрии должны сохраняться при любых операциях с уравнениями [11, 12].

Д. Этлинг [13] и Д. Лилли [14] были пионерами в использовании спиральности в метеорологии и физике атмосферы. С тех пор (1985, 1986) наблюдается, поначалу слабый, но со временем все ускоряющийся рост числа публикаций в этой области науки, посвященных спиральности. В атмосферном пограничном слое такие горизонтальные вихревые структуры, как валы и «облачные улицы» (последние включают в себе индивидуальные вращающиеся облака) обладают существенными значениями спиральности [13, 15], что обеспечивает устойчи-

вость и длительность продолжительности жизни, а следовательно и предсказуемость этим вихревым структурам; ср. Lilly [14] в контексте вращающихся грозовых облаков. Интенсивные конвективные вихри с вертикальной осью, такие как смерчи (торнадо) и пыльные вихри, развивающиеся в том числе в пределах планетарного атмосферного пограничного слоя, также обладают высокими значениями плотности спиральности, что равным образом обеспечивает им устойчивость и продолжительность существования (особенно если последнюю выражать в естественных для вихрей единицах – числе полных периодов обращения воздушных частиц в вихре вокруг его оси).

Возможное гидродинамическое объяснение такой устойчивости состоит в том, что в потоках с высокими значениями спиральности вектор вихря скорости и вектор скорости почти коллинеарны, поэтому вектор Лэмба в уравнении Навье–Стокса, равный векторному произведению указанных векторов и отвечающий за перенос энергии по спектру – почти нулевой, и каскад энергии к малым масштабам блокируется. Альтернативное качественное объяснение состоит в том, что сложная (нетривиальная) топология поля скорости эффективно затрудняет растяжение вихревых нитей в ограниченном пространстве, которое (растяжение) является одним из основных механизмов передачи энергии по спектру [16]. Идея состоит в том, что заузленная вихревая нить при растяжении (и соответствующем истончении) вынуждена занимать в турбулентном потоке больший объем, что затруднительно. Наличие спиральности блокирует прямой каскад энергии, но способствует ее обратному каскаду.

Выдающимся примером атмосферной структуры с ненулевой спиральностью является пограничный слой Экмана. Различные динамические аспекты спиральности в экмановском пограничном слое исследовались в работах [17–24]. В работах [19] (см. также § 5.2 в [25, 26] и позднее в [24]) рассмотрен баланс спиральности в экмановском пограничном слое и получена формула  $f\mathbf{u}_g^2$  для плотности потока (притока) спиральности через верхнюю границу экмановского пограничного слоя. Здесь,  $\mathbf{u}_g$  – скорость геострофического ветра в свободной атмосфере над экмановским пограничным слоем и  $f$  – параметр Кориолиса. Рассматриваемая величина положительна (по соглашению, принятому в метеорологии) в Северном полушарии; в Южном полушарии знак противоположен. В работе [19] показано, что этот приток спиральности в точности уравнивается разрушением спиральности за счет турбулентной вязкости внутри экмановского пограничного слоя. В вычислениях использовались явные формулы [17] для плотности спиральности в классической спирали Экмана. Авторы работы [24] пошли в своих рассуждениях дальше и, основываясь также на результатах прямого численного моделирования, предположили, что введенная спиральность передается по каскаду, с сохранением знака, который является «отпечатком» направления общего вращения Земли, от больших к малым масштабам, вплоть до микромасштаба турбулентности Колмогорова. Эти авторы утверждают, что измеряя скорость разрушения спиральности на миллиметровом масштабе в пределах логарифмического пограничного слоя можно определить, в каком полушарии производится измерение: в Северном полушарии знак измеренной величины должен быть положительным, в Южном – отрицательным. Как и авторам процитированной работы, нам этот вывод представляется крайне интересным, и поэтому хотелось бы добавить к нему некоторые дополнительные общие соображения, с учетом также не-

которых результатов проведенных прямых измерений спиральности на Цимлян-ской научной станции ИФА РАН летом 2012 г. [27].

## 2. Каскад спиральности к малым масштабам в атмосферном пограничном слое

С этой целью, ниже дан краткий обзор имеющихся теорий и концепций касательно каскада спиральности к малым масштабам, а также приведены числовые оценки, характеризующие этот каскад в самой нижней (приземной) части экмановского пограничного слоя.

Рассмотрим основную толщу экмановского пограничного слоя и примем, что поступающая в него из свободной атмосферы со скоростью  $f\mathbf{u}_g^2$  спиральность передается дальше по каскаду как пассивная примесь турбулентным движениям все уменьшающихся масштабов. Зависимость турбулентной спиральности  $H' \equiv \overline{\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}'} = H'(l)$  от пространственного масштаба  $l$  в нижней части экмановского пограничного слоя может быть оценена по формуле [28]

$$H'(l) \sim \eta \varepsilon^{-1/3} l^{2/3}, \quad (1a)$$

где  $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии и  $\eta$  – скорость разрушения спиральности за счет вязкости. В нашем случае

$$\eta = 2f\mathbf{u}_g^2/h_E, \quad (1б)$$

где  $h_E$  – толщина экмановского пограничного слоя. Формула (1б) получается из взятого при  $z/h_E \rightarrow 0$  выражения для суперспиральности  $S_E(z) \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} = (2\mathbf{u}_g^2/h_E^3)\exp(-2z/h_E)$  в спирали Экмана, как функции высоты (напр., [19]). Суммарная скорость разрушения спиральности записывается в виде

$$2\nu_T \int_0^\infty S_E(z') dz' = f\mathbf{u}_g^2 \quad (\text{там же}), \text{ где } \nu_T \text{ – коэффициент турбулентной вязкости, и}$$

по определению  $h_E = \sqrt{2\nu_T/f}$ . Беря  $h_E \sim 400$  м,  $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $|\mathbf{u}_g| \sim 10 \text{ мс}^{-1}$ ,  $\varepsilon \sim 10^{-3} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$  и  $l \sim 10$  м (ср. [27]), мы получим  $H' \sim 2.3 \times 10^{-3} \text{ м с}^{-2}$ . Альтернативный метод, использующий оценку  $H'(l) = d^2 H_E / dz^2|_{z=0} l^2 \equiv S_E(0) l^2$ , где  $H_E(z)$  и  $S_E(z)$  – спиральность и суперспиральность в спирали Экмана и  $l$  – путь (длина) смещения Прандтля, дает похожий результат  $H' \sim 2.8 \times 10^{-3} \text{ м с}^{-2}$ , если взять  $S_E(0) = 2f\mathbf{u}_g^2/h_E$  и принять  $l \sim 30$  м [21, 23]. Эти значения  $H'$  согласуются друг с другом, но они на порядок меньше, чем те, что были измерены в дневное время в Цимлянске [27].

Из чисто размерностных соображений, минимально возможный масштаб спиральных движений  $\lambda_H$  в пограничном слое может быть оценен, исходя из колмогоровского скейлинга для турбулентной скорости в выражении для скорости вязкого разрушения спиральности  $\eta = 2\nu \overline{\boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}'} \equiv 2\nu \overline{(\nabla \times \mathbf{u}') \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}')}$ , где  $\nu$  – молекулярная кинематическая вязкость воздуха, путем приравнявая  $\eta$  и  $2f\mathbf{u}_g^2/h_E$ :

$$\eta \sim 2\nu \frac{u_l^2}{l^3} \sim 2\nu \frac{\varepsilon^{2/3} l^{2/3}}{l^3} = \frac{2f\mathbf{u}_g^2}{h_E}. \quad (2)$$

Оценка  $l \equiv \lambda_H \sim \lambda_D = \varepsilon^{2/7} \nu^{3/7} (2f\mathbf{u}_g^2/h_E)^{-3/7}$ , которая получается из (2), соответствует масштабу Дитлевсена ([29, 30]; см. также [31]). Для указанных выше значений параметров и  $\nu \approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  (для воздуха, при нормальных условиях) получается  $\lambda_H \sim 1.1 \times 10^{-1} \text{ м}$ , что по величине на два порядка превосходит микромасштаб турбулентности Колмогорова  $\lambda_K \sim \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4} \sim 1.4 \times 10^{-3} \text{ м}$ .

Использованный сценарий предполагает, что вихри всех задействованных масштабов имеют один и тот же знак спиральности, т.е. прямой каскад энергии, за счет растяжения и соответствующего утончения закрученных (спиральных) вихревых трубок не изменяет знака их закрученности (или по правилу правого, или, наоборот, левого буравчика). Однако это рассуждение имеет изъян, поскольку еще Р. Крейчнан [32] показал, что каскад энергии на самом деле обусловлен взаимодействием вихревых мод с противоположными знаками спиральности. Следовательно, на промежуточных турбулентных масштабах должна присутствовать определенная доля (измеряемая, например, по энергетическому вкладу) вихрей с отрицательной спиральностью, даже если только положительная спиральность вводится в поток на самом большом масштабе. Как прямое следствие декомпозиции поля скорости на сумму спиральных мод с разными знаками спиральности [33, 34], наиболее обоснованным является предположение, что доля энергии с левовинтовыми/правовинтовыми спиральными модами составляет, соответственно,  $p_{\mp}(l) = (1/2)(1 \mp l/\Lambda)$ . Здесь,  $\Lambda = \varepsilon/\eta = \varepsilon/(2f\mathbf{u}_g^2/h_E) \approx 20 \text{ м}$  представляет собой интегральный масштаб, на котором в турбулентный поток вводится положительная спиральность, и вышеприведенные значения параметров использованы для оценки. С другой стороны, используя данные [35], получаем  $\eta \approx 3 \times 10^{-4} \text{ м с}^{-3}$  для  $\varepsilon \approx 3 \times 10^{-3} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$  (полуденная 2-х часовая запись 12 сентября 2004 г.) и  $\eta \approx 5 \times 10^{-4} \text{ м с}^{-3}$  for  $\varepsilon \approx 1 \times 10^{-3} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$  (ночная 2-х часовая запись 11 сентября 2004 г.) [36]. Таким образом, масштаб  $\Lambda$  равен 10 м и 2 м для дневных и ночных условий, соответственно. Спиральный фактор  $q(l) \equiv p_+(l) - p_-(l) = l/\Lambda$  связывает зависящую от масштаба турбулентную спиральность и дисперсию поля турбулентной скорости, так что  $H^t(l) \sim q(l)l^{-1} E^t(l) \sim (2f\mathbf{u}_g^2/h_E)\varepsilon^{-1/3}l^{2/3}$ , сравни (1а, б), если применяется колмогоровский скейлинг  $E^t(l) \sim \varepsilon^{2/3}l^{2/3}$ . Как и в работах [1, 32], используется дисперсия поля скорости  $E = 2T/\rho$ , где  $T$  – полная кинетическая энергия и  $\rho$  – постоянная плотность воздуха в предположении его несжимаемости. Величина скорости вязкого разрушения спиральности может быть записана как  $2\nu H^t(l)/l^2$ , где  $H^t(l)$  задается уравнениями (1а,б), и приравнявая  $2\nu H_t(l)/l^2 = 2f\mathbf{u}_g^2/h_E$  получаем, что  $\lambda_H \sim \lambda_K$  (сравни [37]). Масштабы  $\lambda_D$  и  $\lambda_K$  совпадают, если  $\varepsilon^5 = (2f\mathbf{u}_g^2/h_E)^4 \nu^3$ . Для выбранных значений параметров, это отвечало бы  $\varepsilon \approx 2.6 \times 10^{-7} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$ , т.е. получается слишком малая величина, чтобы иметь какой-то смысл в условиях реальной атмосферы; поэтому всегда выполняется сильное неравенство  $\lambda_K \ll \lambda_D$ .

Чисто теоретически, нельзя исключить возможность того, что спиральный фактор задан в более общей форме  $q(l) = (l/\Lambda)^s$ , где  $0 \leq s \leq 1$  и необходимое неравенство  $|H^t(l)| \leq l^{-1} E^t(l)$  всегда выполнено (ср. [32]). В этом случае  $H_t(l) \sim (2f\mathbf{u}_g^2/h_E)^s \varepsilon^{2/3-s} l^{s-1/3}$ . Поскольку как  $H^t$ , так и  $2f\mathbf{u}_g^2/h_E$  являются псевдоскалярными величинами и должны одновременно менять знак при зеркальном отражении, это накладывает важное ограничение на значение показателя степени  $s$ , который должен равняться несократимой дроби  $0 < m/n < 1$  с нечетными целыми числами

$m$  и  $n$ . Например, показатели степени  $s = 1/3, 1/5, 3/5, 1/7, 3/7, 5/7, \dots$  являются допустимыми с этой точки зрения и каждый из них дает пространственный масштаб  $\lambda_H$ , удовлетворяющий неравенствам  $\lambda_K < \lambda_H < \lambda_D$ ; при этом  $\lambda_H = \lambda_H(s)$  является монотонно убывающей функцией  $s$ .

В целом, проведенные рассуждения накладывают нижний теоретический предел на размер экспериментальной установки для измерения спиральности в пограничном слое атмосферы. Они также говорят в пользу того, что проявления эффектов вращения Земли могут не достигать столь малых масштабов, как миллиметры, по крайней мере, не быть измеримыми на столь малых масштабах.

## Литература

- [1] *Moreau J.-J.* Constantes d'un ilot tourbillonnaire en fluid parfait barotrope // *C. R. Akad. Sci. Paris.* 1961. V. 252. P. 2810.
- [2] *Moffatt H.K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 35. Pt. 1. P. 117–129.
- [3] *Valori G., Pariat E., Anfinogentov S., Chen F., Georgoulis M.K., Guo Y., Liu Y., Moraitis K., Thalmann J.K., Yang S.* Magnetic helicity estimations in models and observations of the solar magnetic field. Part I: finite volume methods // *Space Sci. Rev.* 2016. V. 201. P. 147–200.
- [4] *Moffatt H.K.* Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978. Русский перевод: *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 343 с.
- [5] *Krause F., Raedler K.-H.* Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Berlin: Akademie-Verlag, 1980.
- [6] *Gilbert A.D., Frisch U., Pouquet A.* Helicity is unnecessary for alpha-effect dynamos, but it helps // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 1988. V. 42 (1–2). P. 151–161.
- [7] *Мусеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В.* Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // *ЖЭТФ.* 1983. Т. 85. Вып. 6 (12). С. 1979–1987.
- [8] *Мусеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В.* Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // *ЖЭТФ.* 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 144–153.
- [9] *Nambu Y.* Generalized Hamiltonian dynamics // *Phys. Rev. D.* 1973. V. 7. P. 2405–2412.
- [10] *Névir P., Blender R.* A Nambu representation of incompressible hydrodynamics using helicity and enstrophy // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1993. V. 26. P. L1189–93.
- [11] *Salmon R.* A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models // *Nonlinearity.* 2005. V. 18. P. R1–16.
- [12] *Salmon R.* A general method for conserving energy and potential enstrophy in shallow-water models // *J. Atmos. Sci.* 2007. V. 64. P. 515–530.
- [13] *Etling D.* Some aspects of helicity in atmospheric flows // *Beitrage zur Physik der Atmosphäre.* 1985. V. 58(1). P. 88–100.
- [14] *Lilly D.K.* The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part II: Helicity and storm stabilization // *J. Atmos. Sci.* V. 42(2). P. 126–140.
- [15] *Hauf T.* Rotating clouds within cloud streets // *Beitr. Phys. Atmosph.* 1985. V. 58 (3). P. 380–398.
- [16] *Chakraborty S.* Signatures of two-dimensionalisation of 3D turbulence in the presence of rotation // *EPL (Europhysics Letters).* 2007. V. 79. N 1. P. 14002.

- [17] *Hide R.* Superhelicity, helicity and potential vorticity // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. 1989. V. 48. P. 69–79.
- [18] *Hide R.* Helicity, superhelicity and weighted relative potential vorticity. Useful diagnostic pseudoscalars? // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 2002. V. 128. P. 1759–1762.
- [19] *Курганский М.В.* О связи между спиральностью и потенциальным вихрем в сжимаемой вращающейся жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1989. Т. 25. № 12. С. 1236–1239.
- [20] *Tan Zh., Wu R.* Helicity dynamics of atmospheric flow // *Advances in Atmospheric Sciences*. 1994. V. 11 (2). P. 175–188.
- [21] *Чхетиани О.Г.* О спиральной структуре экмановского пограничного слоя // *Изв. АН. Физика атмосферы и океана*. 2001. Т. 37. № 5. С. 614–620.
- [22] *Пономарев В.М., Хапаев А.А., Чхетиани О.Г.* Роль спиральности в формировании вторичных структур в экмановском пограничном слое, // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2003. Т. 39 (4). С. 435–444.
- [23] *Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* Полуэмпирическая модель пограничного слоя атмосферы с параметризацией влияния турбулентной спиральности // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2005. Т. 41 (5). С. 418–432.
- [24] *Deusebio E., Lindborg E.* Helicity in the Ekman boundary layer // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 755. P. 654–671.
- [25] *Курганский М.В.* Введение в крупномасштабную динамику атмосферы (Адиабатические инварианты и их применение). СПб.: Гидрометеоздат, 1993. 168 с.
- [26] *Kurgansky M.V.* Adiabatic Invariants in Large-scale Atmospheric Dynamics. London; New-York: Taylor & Francis, 2002.
- [27] *Копров Б.М., Копров В.М., Курганский М.В., Чхетиани О.Г.* Спиральность и потенциальный вихрь в приземной турбулентности // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2015. Т. 51. № 6. С. 637–647.
- [28] *Brissaud A., Frisch U., Leorat J., Lesieur M., Mazure A.* Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence // *Phys. Fluids*. 1973. V. 16. P. 1366–1377.
- [29] *Ditlevsen P.D., Giuliani P.* Dissipation in helical turbulence // *Phys. Fluids*. 2001a. V. 13. P. 3508–3509.
- [30] *Ditlevsen P.D., Giuliani P.* Cascades in helical turbulence // *Physical Review E*. 2001b. V. 63 (3). P. 036304.
- [31] *Ditlevsen P.D.* Turbulence and Shell Models. Cambridge Univ. Press, 2011.
- [32] *Kraichnan R.H.* Helical turbulence and absolute equilibrium // *J. Fluid. Mech.* 1973. V. 57. Pt. 4. P. 745–752.
- [33] *Knorr G., Lynov J.P., Pécseli H.P.* Self-organization in three-dimensional hydrodynamic turbulence // *Z. Naturforsch.* 1990. V. 45a. P. 1059–1073.
- [34] *Waleffe F.* The nature of triad interactions in homogeneous turbulence // *Phys. Fluids A*. 1992. V. 4. P. 350–363.
- [35] *Копров Б.М., Копров В.М., Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* Измерение турбулентной спиральности и ее спектра в пограничном слое атмосферы // *ДАН*. 2005. Т. 403. № 5. С. 627–630.
- [36] *Чхетиани О.Г.* О локальной структуре спиральной турбулентности // *Докл. РАН*. 2008. Т. 422 (5). С. 618–621.
- [37] *Chen Q., Chen S., Eyink G.L.* The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 2003. V. 15(2). P. 361–374.

### 1.3. Потоки завихренности и спиральности в атмосферном пограничном слое

*О.Г. Чхетиани<sup>1,2</sup>, Б.М. Копров<sup>1</sup>, В.М. Копров<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Институт космических исследований РАН*

#### Введение

Спиральностью гидродинамического поля скорости называется скалярное произведение скорости на завихренность –  $\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$ . Её интеграл при выполнении условий сходимости – и отсутствии твёрдых границ  $H_h = \int \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d^3\mathbf{r}$  является невязким инвариантом уравнения Эйлера. Спиральность отражает нарушение зеркальной симметрии и, очевидно, характерна для движений, происходящих на фоне глобального вращения. Свойства спиральности связаны с заузленностью линий тока, что было наглядно показано Генри Моффатом в 1969 году [1].

Если движения в жидкости обладают свойством спиральности, то прямой каскад турбулентности из крупных масштабов в мелкие эффективно уменьшается. Это можно увидеть, например, из записи уравнений гидродинамики в форме Гельмгольца

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + [[\nabla \times \mathbf{v}] \times \mathbf{v}] = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right).$$

Так для течения Громеко-Бельтрами, в котором вектор завихренности коллинеарен вектору скорости  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{l}\mathbf{v}$ , нелинейный член тождественно равен 0.

Интерес к турбулентной спиральности в геофизической гидродинамике был инициирован работой [2], где было показано, что при определённых условиях такая турбулентность испытывает неустойчивость, в процессе которой развиваются крупномасштабные вихри с зацепленными линиями тока, также обладающие спиральностью. То есть при наличии спиральности возможны явления обратного каскада. На это указывают, как качественные соображения, впервые приведённые в [3], так и недавние результаты моделирования турбулентных каскадов со спиральностью [4–6].

В [7] оценивалась спиральность валиковой циркуляции в атмосферном пограничном слое. В [8] была установлена связь между спиральностью и потенциальным вихрем, а также вычислена спиральность экмановского течения (см. также [9]). В [10] было показано, что спиральность уменьшает турбулентную вязкость, а в [11, 12] было показано, что турбулентная спиральность заметно интенсифицирует процесс турбулентной диффузии. В [13] для нейтрального атмосферного пограничного слоя (АПС), а в [14] для стратифицированного АПС было показано, что тензор напряжений Рейнольдса модифицируется при наличии турбулентной спиральности и эти изменения оказывают заметное влияние на устойчивость и динамику крупномасштабных течений [15, 16]. Соответственно, для построения моделей и параметризаций АПС, учитывающих вклад спиральности, необходима информация о её спектральном распределении и характерных значениях при различных условиях.

Отметим, что в работе Е.А. Новикова [17], где обсуждались статистические свойства ковариационного тензора потока вихря, составленного из произведений компонент скорости и вихря

$$\langle v_i \omega_j \rangle = \frac{\varepsilon_{ikl}}{4\pi} \int_V \frac{r_l}{r^3} \langle \omega_k(x') \omega_j(x) \rangle d^3 x'$$

его диагональная часть, связанная со спиральностью не рассматривалась. Согласно выводам работы [17], неравными нулю должны быть лишь 4 недиагональных элемента:  $u' \Omega_2$ ,  $v' \Omega_1$ ,  $w' \Omega_1$  и  $u' \Omega_3$  ( $\mathbf{v} = (u, v, w)$ ). Первые измерения ковариаций между компонентами скорости и вихря, соответствующих коспектров и спектральных коэффициентов корреляции были описаны в [18, 19]. Измерения проводились на высотах 1.2 и 5 м на Цимлянском полигоне ИФА РАН посредством акустического циркулиметра, разработанного впервые в [20]. С теорией, представленной в [17], явно не согласовывались наблюдаемые отличия от нуля ковариаций, связанные с циркуляцией в вертикальной плоскости параллельной среднему течению  $\langle vZ_2 \rangle$  и  $\langle uZ_2 \rangle$ . Кроме того, была обнаружена сильная корреляция поля циркуляции с полем температуры.

В 2004 и 2007 гг. были выполнены совместные измерения компонент циркуляции, скорости и температуры в пограничном слое атмосферы на высоте 46 метров на Звенигородской научной станции. Циркуляция измерялась на квадратном контуре со стороной 0.5 м [21] и на изломанном контуре в 2007. В 2012 и 2015 гг. был проведен эксперимент с новой схемой измерений с системой пространственно разнесённых акустических анемометров на Цимлянской научной станции ИФА им. А.М. Обухова РАН [22]. Были обнаружены отличия от нуля всех трёх диагональных компонент тензора потока вихря, корреляция вихря с полем температуры и спектральные зависимости для спиральности, близкие к следующим из представлений о постоянстве потока спиральности по спектру в инерционном интервале [23, 24].

## 1. Поток вихря и спиральность в атмосферном пограничном слое

Рассмотрим стационарное решение уравнений Рейнольдса в планетарном температурно-стратифицированном пограничном слое атмосферы над плоской и однородной подстилающей поверхностью. Представляя поля скорости, завихренности температуры в виде суммы регулярной и турбулентной составляющей

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}, \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = \bar{\mathbf{W}} + \mathbf{w}, \Theta = \bar{\theta} + \theta \\ \bar{V}_k \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{V}_k &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \beta g e_i \bar{\theta} + \nu \Delta \bar{V}_i, \\ \bar{V}_k \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \bar{V}_k e_k - v_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \chi \Delta \bar{\theta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{W}}$  – вектор угловой скорости вращения Земли. Среднее поле давления  $\bar{P}$  при этом представляется как

$$\bar{P} = P(z) - 2\rho_0\Omega_0 G_0 (x \sin \alpha + y \cos \alpha), \quad (2)$$

где  $G_0$  – скорость градиентного ветра,  $\alpha$  – угол между изобарой и приземным ветром,  $\Omega_0 = \Omega_z$ . Для упрощения далее будем пренебрегать горизонтальными компонентами вектора угловой скорости.

Вследствие стационарности и горизонтальной однородности все средние одноточечные характеристики полей скорости, градиента давления зависят лишь от высоты  $z$ . Обозначим компоненты средней скорости (течение Экмана) как

$$\bar{\mathbf{V}} = (U(z), V(z), 0). \quad (3)$$

Компоненты ротора средней скорости  $\bar{\mathbf{W}} = [\nabla \times \bar{\mathbf{V}}]$  будут соответственно иметь вид

$$\bar{\mathbf{W}} = \left( -\frac{dV}{dz}, \frac{dU}{dz}, 0 \right).$$

Тогда для стационарного случая в пренебрежении лучистым теплообменом и молекулярной теплопроводностью, получим

$$\begin{aligned} -2\Omega_0(V - V_G) &= -\frac{dv_z v_x}{dz} + v \frac{d^2 U}{dz^2}, \\ 2\Omega_0(U - U_G) &= -\frac{dv_z v_y}{dz} + v \frac{d^2 V}{dz^2}, \\ \overline{v_z \theta} &= \text{const} \end{aligned} \quad (4)$$

где  $U_G = -G_0 \sin \alpha$ ,  $V_G = G_0 \cos \alpha$ .

Для компонент тензора потока вихря  $\overline{v_i w_j}$  можно выписать следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \overline{v_k w_j} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{v_k w_j} + \overline{v_i v_k} \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial x_k} - (\overline{W_k} + 2\Omega_k) \overline{v_i} \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_k} - \overline{v_i w_k} \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_k} = \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \overline{w_j} + \beta g e_i \overline{\theta w_j} - \beta g \varepsilon_{jlm} e_m \overline{v_i} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_l} - v \left( \overline{v_i \Delta w_j} + \Delta \overline{v_i w_j} \right), \end{aligned}$$

где корреляции завихренности и температуры удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \overline{v_k w_m e_k} = \frac{1}{2} \beta g \varepsilon_{mpr} \overline{\nabla_p \theta^2 e_r} + \overline{\theta w_k} \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial x_k} - \overline{\theta v_k} \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial x_k} - \overline{\theta v_k} \frac{\partial \bar{W}_m}{\partial x_k} \\ + (\overline{W_k} + 2\Omega_k) \overline{\theta} \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial x_k} + \overline{\theta w_k} \frac{\partial \bar{V}_m}{\partial x_k} - (v + \chi) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Детальная запись компонент тензора потока вихря приведена в Приложении.

Учитывая горизонтальную однородность, полагая отсутствие вертикальных средних движений и упрощенную релаксационную гипотезу для тройных корреляций вида  $\overline{\nabla v v v}$ :  $\overline{v v} / \tau$ , получим для тензора потока вихря уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{v_i w_j}}{\tau} + \overline{v_z w_j} \left( \frac{dU}{dz} \delta_{ix} + \frac{dV}{dz} \delta_{iy} \right) + 2\Omega_0 \varepsilon_{ik} \overline{v_k w_j} + \overline{v_i v_z} \left( -\frac{d^2 V}{dz^2} \delta_{jx} + \frac{d^2 U}{dz^2} \delta_{jy} \right) \\ - 2\Omega_0 v_i \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial z} - \overline{v_i w_z} \left( \frac{dU}{dz} \delta_{jx} + \frac{dV}{dz} \delta_{jy} \right) - \beta g \left( \delta_{iz} \overline{\theta w_j} + \varepsilon_{zlj} \frac{\partial \overline{v_i \theta}}{\partial x_l} \right) = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\tau \sim E / \varepsilon$  – время релаксации.

В частности, для турбулентной спиральности  $H = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}} = \overline{v_k w_k}$  получим

$$\begin{aligned} \frac{H}{\tau} + \left( \overline{v_z w_x} - \overline{v_x w_z} \right) \frac{dU}{dz} + \left( \overline{v_z w_y} - \overline{v_y w_z} \right) \frac{dV}{dz} - \overline{v_x v_z} \frac{d^2 V}{dz^2} + \overline{v_y v_z} \frac{d^2 U}{dz^2}, \\ - 2\beta g \overline{\theta w_z} - 2\Omega_0 \left( \overline{v_x w_y} - \overline{v_y w_x} \right) - \Omega_0 \frac{d\overline{v_z^2}}{dz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \overline{v_x w_y} - \overline{v_y w_x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \right) - \overline{v_x} \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial x} - \overline{v_y} \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} - \overline{v_z} \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} - \overline{v_z^2} \right), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{H}{\tau} &= -\frac{d\overline{v_x v_z}}{dz} \frac{dV}{dz} + \frac{d\overline{v_y v_z}}{dz} \frac{dU}{dz} + \overline{v_x v_z} \frac{d^2 V}{dz^2} - \overline{v_y v_z} \frac{d^2 U}{dz^2} \\ &+ 2\beta g \overline{\theta w_z} + \Omega_0 \frac{d \left( 2\overline{v_z^2} - \overline{v_x^2} - \overline{v_y^2} \right)}{dz}. \end{aligned}$$

В свою очередь, для определения корреляции  $\overline{\theta w_z}$  имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \overline{\theta w_z} &= \left( -\frac{d\overline{\theta}}{dz} \overline{v_z w_z} + 2\Omega_0 \overline{\theta} \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} \right) \tau_\theta, \\ \frac{\overline{v_z \theta}}{\tau_\theta} &= -\frac{d\overline{\theta}}{dz} \overline{v_z^2} + \beta g \overline{\theta^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\tau_\theta$  – время релаксации для температурных флуктуаций.

Для корреляции  $\overline{\theta \frac{\partial v_z}{\partial z}}$  получаем:

$$\overline{\theta \frac{\partial v_z}{\partial z}} \approx -\frac{1}{2} \frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \frac{d\overline{\theta}}{dz} \tau_\theta + \frac{1}{2} \beta g \frac{d\overline{\theta^2}}{dz} \tau_\theta.$$

С другой стороны для  $\overline{\theta^2}$  и  $\overline{v_z \theta}$  можно выписать

$$\overline{\theta^2} \approx -\frac{d\bar{\theta}}{dz} \overline{v_z \theta \tau_\theta}, \quad \overline{\frac{v_z \theta}{\tau_\theta}} = -\frac{d\bar{\theta}}{dz} \overline{v_z^2} + \beta g \overline{\theta^2}.$$

Откуда получаем, что

$$\overline{\frac{v_z \theta}{\tau_\theta}} = -\frac{\frac{d\bar{\theta}}{dz} \overline{v_z^2} \tau_\theta}{1 + \beta g \frac{d\bar{\theta}}{dz} \tau_\theta^2}, \quad \frac{d\overline{\theta^2}}{dz} \approx \frac{\left(\frac{d\bar{\theta}}{dz}\right)^2 \frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \tau_\theta^2}{1 + \beta g \frac{d\bar{\theta}}{dz} \tau_\theta^2}.$$

Далее  $\overline{\theta \frac{\partial v_z}{\partial z}}$  перепишется как

$$\overline{\theta \frac{\partial v_z}{\partial z}} \approx -\frac{1}{2} \frac{\frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \tau_\theta}{1 + \beta g \frac{d\bar{\theta}}{dz} \tau_\theta^2}$$

и система для определения  $\overline{\theta w_z}, \overline{v_z w_z}$  будет

$$\overline{\theta w_z} = -\left( \frac{d\bar{\theta}}{dz} \overline{v_z w_z} + \Omega_0 \frac{\frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \tau_\theta}{1 + \beta g \frac{d\bar{\theta}}{dz} \tau_\theta^2} \right) \tau_\theta, \quad (7)$$

$$\overline{v_z w_z} = 2\beta g \overline{\theta w_z} \tau + \Omega_0 \tau \frac{d\overline{v_z^2}}{dz}.$$

Полагая для упрощения  $\tau_\theta \approx c_\theta \tau$ ,  $\tau = l / E_{uv}^{1/2}$ , где  $l$  характерный масштаб турбулентных движений, получим

$$\overline{\theta w_z} = -c_\theta \tau^2 \Omega_0 \frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \frac{1 + c_\theta + c_{\text{Ri}} \text{Ri}}{(1 + c_{\text{Ri}} \text{Ri})(1 + 2c_{\text{Ri}} / c_\theta \text{Ri})}, \quad (8)$$

$$\overline{v_z w_z} = \Omega_0 \tau \frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \frac{1 - c_{\text{Ri}} \text{Ri}}{(1 + c_{\text{Ri}} \text{Ri})(1 + 2c_{\text{Ri}} / c_\theta \text{Ri})}.$$

где  $\text{Ri}$  – число Ричардсона

$$\text{Ri} = \frac{\beta g \frac{d\bar{\theta}}{dz}}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}, \quad c_{\text{Ri}} = c_\theta^2 l^2 \left( \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right) / E.$$

Отметим, что генерация вертикальной компоненты спиральности в условиях горизонтальной однородности связана исключительно с потоком тепла.

Таким образом, получаем для спиральности:

$$H = \left( -\frac{d\overline{v_x v_z}}{dz} \frac{dV}{dz} + \frac{d\overline{v_y v_z}}{dz} \frac{dU}{dz} + \overline{v_x v_z} \frac{d^2 V}{dz^2} - \overline{v_y v_z} \frac{d^2 U}{dz^2} - 2\Omega_0 \frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \left( 1 - \frac{c_{\text{Ri}} / c_\theta \text{Ri} (1 + c_\theta + c_{\text{Ri}} \text{Ri})}{(1 + c_{\text{Ri}} \text{Ri})(1 + 2c_{\text{Ri}} / c_\theta \text{Ri})} \right) \right) \tau$$

Используя представление для напряжений Рейнольдса в виде [13], где  $K$  – турбулентная вязкость, а  $K_h$  – вклад в напряжения Рейнольдса от спиральности

$$\overline{v_x v_z} = -K \frac{\partial U}{\partial z} + K_h \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \overline{v_y v_z} = -K \frac{\partial V}{\partial z} - K_h \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (9)$$

получим

$$H = 2K\tau \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2\Omega_0 \frac{d\overline{v_z^2}}{dz} \left( 1 - \frac{c_{\text{Ri}} / c_\theta \text{Ri} (1 + c_\theta + c_{\text{Ri}} \text{Ri})}{(1 + c_{\text{Ri}} \text{Ri})(1 + 2c_{\text{Ri}} / c_\theta \text{Ri})} \right). \quad (10)$$

Обратим внимание, что комбинация  $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \frac{\partial U}{\partial z}$  представляет собой суперспиральность крупномасштабного (экмановского) течения,

$$S_H = \overline{\mathbf{W}} \cdot \nabla \times \overline{\mathbf{W}},$$

введённую впервые Хайдом [9], и играющую важную роль в процессах эволюции спиральности. Важно отметить, что спиральная вязкость  $K_h$  вклада в баланс спиральности не даёт.

Как мы видим существует три источника турбулентной спиральности в стратифицированном пограничном слое атмосферы:

- связанный со спиральностью крупномасштабного экмановского течения и определяемый суммой  $v_x w_x + v_y w_y$  ;
- с накачкой спиральности на нижней границе вращающегося пограничного слоя;
- комбинированный источник связанный с переносом завихренности и спиральности во вращающейся среде, обусловленный температурной или плотностной стратификацией.

Обратим внимание, что в последнем случае существуют могут существовать критические значения числа Ричардсона, при которых скорость накачки турбулентной спиральности может сильно возрастать. Также при наличии спиральности должна наблюдаться корреляция  $\overline{\theta w_z}$ . В Приложении 2 приведен упрощённый анализ динамики спиральности, показывающий её воспроизводство в конвективном случае.

Дополнительно отметим, что 2-ой и 3-ий механизмы связаны с кориолисовым фактором, так что при наличии заметной вертикальной компоненты завихренности среднего течения, то есть при взаимодействии интенсивного вихря с подстилающей поверхностью или границей раздела сред возможна интенсификация производства турбулентной спиральности. Действительно, для мезомасштабных вихрей с завихренностью  $\Omega$ :  $10^{-2} \div 10^{-1} \cdot \text{c}^{-1}$  параметр  $\Omega \tau_{\text{cor}}$  значительно возрастает и может доминировать по сравнению с вкладом от горизонтальных ком-

понент спиральности, являющегося по-видимому основным в случае нейтрального пограничного слоя.

Таким образом, турбулентная спиральность возникает вследствие вертикальной неоднородности каскадным образом и обусловлена наличием спиральности в крупномасштабных движениях.

Согласно оценкам [7, 25] спиральность экмановского течения составляет  $10^{-1}$  м/с<sup>-2</sup>, в то время, как для валиковой циркуляции её значения достигают величин  $10^{-2} \div 10^{-3}$  м/с<sup>-2</sup> [7, 16].

Для характерных параметров экмановского течения и турбулентности в АПС получаем из первого члена в ((10)) оценку для значения турбулентной спиральности  $H \approx 0.003 \div 0.02$  м·с<sup>-2</sup>, что близко по порядку величины к параметрам для валиковой циркуляции. Подобная близость является косвенным признаком того, что мезомасштабные вихри пограничного слоя и турбулентные вихри, несущие свойство спиральности являются элементом каскада этой величины в область малых масштабов. Оценки спиральности в атмосферном пограничном слое недавно были получены по данным акустического зондирования [26]. Значение спиральности крупномасштабных движений 0.3–0.6 м·с<sup>-2</sup> на порядок превосходили ее независимо измеренные турбулентные значения [22], к которым оказываются близки значения средней по слою спиральности – 0.02–0.1 м·с<sup>-2</sup>.

## 2. Турбулентные каскады спиральности

Для спиральности возможны два случая турбулентных каскадов [23, 27].

Первый – параллельные каскады энергии и спиральности в малые масштабы: Спектральный наклон спиральности совпадает в этом случае с наклоном спектра энергии и равен  $-5/3$

$$E(k) = c_e \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3}, H(k) = c_h \bar{\eta} \bar{\varepsilon}^{-1/3} k^{-5/3}.$$

Второй – с прямым каскадом спиральности и обратным каскадом энергии.

$$E(k) = c_e \bar{\eta}^{2/3} k^{-7/3}, H(k) = c_h \bar{\eta}^{2/3} k^{-4/3}, \quad (11)$$

Здесь  $E = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle$ ,  $H = \langle \mathbf{v} \mathbf{w} \rangle$ .  $\mathbf{v}(k) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathbf{v}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{w}(\mathbf{k}) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathbf{w}(\mathbf{k})$  –

Фурье компоненты скорости и завихренности.  $\bar{\eta} = \nu \langle (\nabla \times \mathbf{v} (\nabla \times)^2 \mathbf{v}) \rangle$  – диссипация спиральности,  $\bar{\varepsilon} = \nu \langle (\nabla \times \mathbf{v})^2 \rangle$  – диссипация энергии.

Присутствие спиральности в турбулентности проявляется в появлении в двухточечном тензоре тройных корреляций поля скорости компонент, тождественно равных 0 при ее отсутствии [24, 28].

$$\langle \delta \mathbf{v}_i(\mathbf{x} | \mathbf{r}) [\mathbf{v}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \times \mathbf{v}_i(\mathbf{x})] \rangle = \frac{2}{15} \bar{\eta} \cdot r^2 \quad (12)$$

Указанная зависимость (т.н. закон 2/15) аналогична закону Колмогорова 4/5 для продольных корреляций скорости [29]

$$\langle \delta \mathbf{v}_i(x | r)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \bar{\varepsilon} \cdot r \quad (13)$$

и является точным результатом, следующим из уравнений Навье-Стокса. Здесь поле скорости представлено в виде разбиения на продольную и поперечную составляющие вдоль радиуса вектора, соединяющего точки наблюдения:

$$\mathbf{v}_l = (\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{r} / r^2, \mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{v}_l, \delta v_l(\mathbf{x}|\mathbf{r}) = (\mathbf{v}_l(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - \mathbf{v}_l(\mathbf{x}))\mathbf{r} / r.$$

Обозначив  $r_i = r\delta_{ix}$  получим для смешанного двухточечного тройного тензора корреляций скорости и завихренности  $T_{i,j,k} = \langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x})\omega_k(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle$  следующее представление:

$$T_{i,j,k} = \langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x})\omega_k(\mathbf{x}+\mathbf{r}) \rangle = \frac{\eta r}{15} \delta_{ij}\delta_{kx} - \frac{\eta r}{10} (\delta_{ix}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jx}).$$

Нетрудно видеть, что он имеет отличные от 0 следующие компоненты

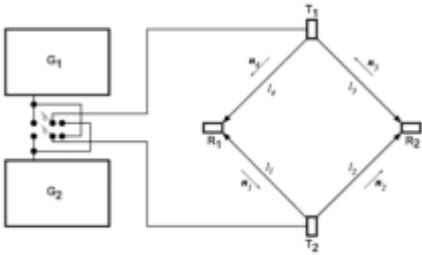
$$\begin{aligned} T_{x,x,x} &= -\frac{2}{15}\eta r, T_{y,y,x} = T_{z,z,x} = \frac{1}{15}\eta r, \\ T_{x,y,y} &= T_{y,x,y} = T_{x,z,z} = T_{z,x,z} = -\frac{1}{10}\eta r. \end{aligned}$$

Подобные величины удобно измерять в полевых и лабораторных условиях, при наличии возможности прямого или косвенного измерения завихренности или градиентов скорости. Линейная зависимость от масштаба предполагает обратную зависимость  $f^{-1}$  в частотном спектре этой корреляции, которая продемонстрирована в разделе 5 для данных эксперимента 2004 года.

Приведем значения для диссипации спиральности (и энергии) в атмосферном пограничном слое. Для данных, эксперимента 2004 года, исходя из спектров энергии и спиральности можно получить  $\bar{\eta} \approx 0.0003$  ( $\text{м}\cdot\text{с}^{-3}$ ) при  $\bar{\varepsilon} \approx 0.003$  ( $\text{м}^2\cdot\text{с}^{-3}$ ) (полуденная 2-часовая запись от 12.09.2004, и  $\bar{\eta} \approx 0.0005$  ( $\text{м}\cdot\text{с}^{-3}$ ) при  $\bar{\varepsilon} \approx 0.001$  ( $\text{м}^2\cdot\text{с}^{-3}$ ) (ночная 2-часовая запись от 11.09.2004). При расчетах для колмогоровской константы  $c_h$  при спектре спиральности использовались значения, полученные при квазимарковском моделировании турбулентности  $c_h \sim 2.3$ .

### 3. Измерения циркуляции

Для экспериментального измерения спиральности необходимы измерения всех трёх компонент скорости и вихря. Прямая оценка вихря по полям скорости является на сегодняшний день трудноразрешимой задачей, в то время как при измерении циркуляции по заданному контуру  $z = \oint \mathbf{v}d\mathbf{l} = \int \omega_n ds$  можно получить вполне приемлемую точность осредненной по площади завихренности. Идея акустического метода измерения циркуляции и первые результаты ее технической реализации изложены в [20]. Эта методика заключается в измерении времени прохождения звукового сигнала по замкнутому контуру. Время прохождения кроме циркуляции скорости ветра зависит также и от неоднородностей температуры вдоль контура, влияние которых можно оценить путём сравнения результатов для противоположных обходов. Другими источниками систематической ошибки в измерении спектра является осреднение завихренности по площади контура и пространственное разнесение точек измерений скорости и вихря. В [18, 19] приведены оценки указанных эффектов и результаты измерений спектров циркуляции и коспектров некоторых компонент тензора потока вихря в



**Рис. 1.** Схема акустического циркулиметра ( $G_1, G_2$  – генераторы сигналов,  $T_1, T_2$  – излучатели с частотами  $f_1, f_2$  (80 and 75 kHz or 67 and 63 kHz)),  $R_1, R_2$  – приёмники. Его размещение на 45-метровой мачте на Звенигородской научной станции

нижней части приземного слоя и их сопоставление с предсказаниями теории, исходившей из предположения о зеркальной симметрии характеристик течения относительно отражений в вертикальной плоскости, параллельной направлению средней скорости. С этой теорией явно не согласовывалось отличие от нуля ковариаций, связанных с циркуляцией в вертикальной плоскости параллельной среднему течению  $\langle v_2 Z_2 \rangle$  и  $\langle v_1 Z_2 \rangle$ .

Методики измерения завихренности можно условно разделить на прямые и косвенные (непрямые). Прямые измерения термо-анемометрами (hot-wire anemometers) проводились в [30–33]. Предоставляя возможность проводить измерения на масштабах, близких к области диссипации, эта методика не вполне удобна для проведения измерений в атмосферном пограничном слое и имеет ряд серьёзных ограничений, в том числе и по погодным условиям.

Непрямые методы связаны с измерением циркуляции по некоторому контуру и, соответственно определением средней завихренности по площади контура на основе применения теоремы Кельвина о циркуляции [18–20]. Идеино близкие методики для измерения атмосферной циркуляции предлагались также в [34–36]. Такие методики нередко использовались для определения характеристик океанической турбулентности океана [37–40]. Методика расчета циркуляции детально обсуждалась в [41]. На рис. 1 приведена схема акустического циркулиметра, разработанная в ИФА им. А.М. Обухова РАН

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 = \frac{l}{c_0} \left[ (c_2 - c_1) + (c_4 - c_2) + \sum_{i=1}^4 \mathbf{n}_i \mathbf{v}_i \right] \quad (14)$$

Время прохождения сигналов (разность фаз) содержит информацию о циркуляции скорости  $\Gamma = l \sum_{i=1}^4 \mathbf{n}_i \mathbf{v}_i$ . Для определения турбулентной спиральности вариации определяются путем вычитания из измеренных рядов их трендов или "скользящих" средних значений за интервал порядка получаса. Можно ожидать, что каждое из произведений, входящих в сумму (14), представляет собой случайный процесс с отличным от нуля средним значением. Задача состоит в том, что-

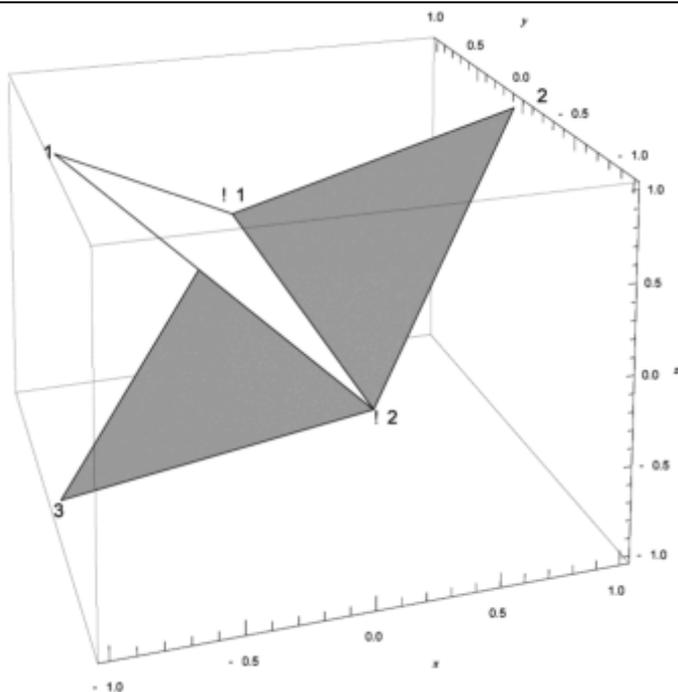


Рис. 2. Схема контуров модифицированного циркулиметра

бы определить статистические характеристики каждого слагаемого суммы (14) и определить время осреднения, обеспечивающее их устойчивую оценку.

Развивая идею фазового акустического метода измерения циркуляции, предложенного в [20], была разработана конструкция двухкомпонентного акустического циркулиметра. В работе [21] измерения циркуляции вокруг осей  $z$  и  $y$  велись двухкомпонентным датчиком, измерения по второ горизонтально координате были обеспечены однокомпонентным циркулиметром. Компоненты скорости измерялись трёхкомпонентным анемометром конструкции ИФА [42]. Все три датчика размещались на вершине мачты высотой 45 м, причем анемометр стоял в центре, а циркулиметры по обе стороны от него на удалении 0,8 м. Работа велась на звуковых частотах (3 и 3.04 кГц). Излучателями служили динамические акустические преобразователи, а приемниками – электретные микрофоны. Работу с этой версией прибора затрудняли взаимные помехи, возникающие при одновременной работе двух датчиков циркуляции, фоновые акустические шумы. Электретные микрофоны оказались весьма чувствительными к вариациям ветрового напора, а также к попаданию конденсированной влаги. Кроме того, в ходе обработки были выявлены помехи, связанные с несовершенством аэродинамики датчика циркуляции.

В новой версии двухкомпонентного датчика перечисленные недостатки были минимизированы. Была изменена схема размещения микрофонов (рис. 2), а электродинамические излучатели и электретные приемники заменены на влагозащищенные малогабаритные пьезокерамические преобразователи.

### 1.3. Поток завихренности и спиральности в атмосферном пограничном слое

Принимая за начало координат точку  $O$ , имеем следующие координаты излучателей ( $I$ ) и приемников ( $П$ ):  $И1 - \{a, 0, 0\}$ ,  $И2 - \{-a, 0, 0\}$ ,  $П1 - \{-a, 0, a\}$ ,  $П2 - \{a, 0, a\}$ ,  $П3 - \{-a, 0, -a\}$ .

Величина  $a$  была принята равной 35 см. Циркуляция вокруг оси  $z$  измерялась на ломаном контуре  $И1, П2, И2, П1, И1$ , а измерение циркуляции вокруг оси  $y$  обеспечивал контур  $И1, П1, И2, П3, И1$ . Применение ломаных контуров позволило снизить искажение поля скорости на измерительных отрезках, т.е. уменьшить аэродинамические помехи.

В 2012 году была реализована иная схема измерений спиральности, основанная на разностном вычислении градиентов скорости из системы синхронной регистрации данных акустических анемометров, расположенной в вершинах прямоугольного тетраэдра со стороной 5 м и поднятого на высоту 5.5 м [22]. В 2014 г. были проведены измерения с усовершенствованной подобной схемой с базовым масштабом 0.7 м на высотах 3.5, 13.1 и 25 метров.

## 4. Результаты измерений

В настоящей статье рассматриваются данные измерений, проведенных в июле–сентябре 2004 года и сентябре 2007 года на вершине мачты высотой 45 м, установленной на территории Звенигородской научной станции ИФА РАН. Частично результаты (спектры спиральности, завихренности, флуктуаций спиральности) были представлены в работе [21].

В 2004 г. измерения проводились на Звенигородской научной станции ИФА РАН. Циркуляция измерялась на квадратном контуре со стороной 0.5 м. Расстояние между точкой измерения скорости и центром контура составляло около 1 м. Данные измерений регистрировались с помощью 14-разрядного преобразователя с частотой выборки до сотен герц. Общая продолжительность времени измерений составила более 70 часов. Ниже приводятся результаты анализа этих данных для двух двухчасовых реализаций: первая относится к дневным измерениям в слабо конвективном пограничном слое, а вторая – к ночным измерениям, когда пограничный слой переходил к устойчивому состоянию.

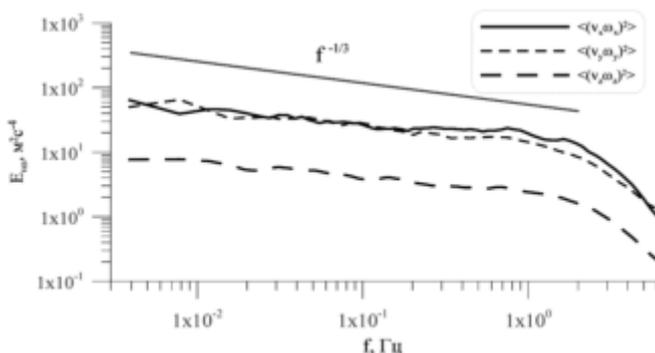


Рис. 3. Спектры флуктуаций спиральности

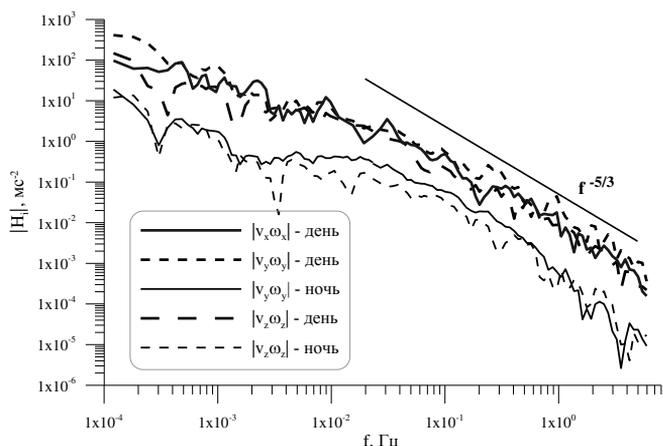


Рис. 4. Спектры компонент спиральности. Образцы временного хода компонент спиральности приведены на рис. 5

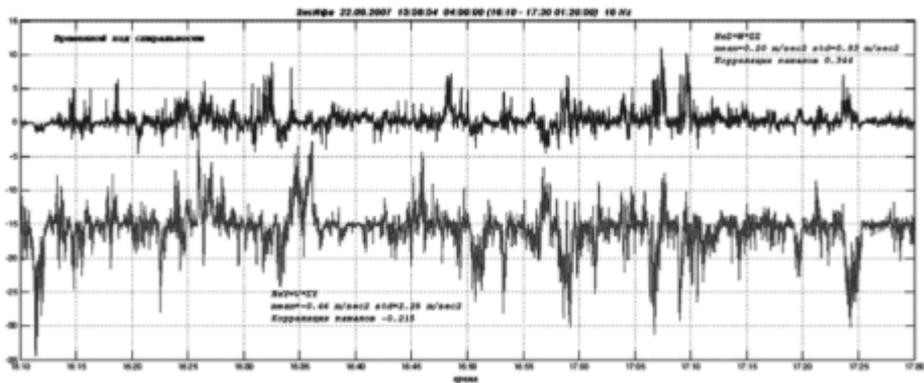


Рис. 5. Временная запись компонент спиральности

Спектр мощности флуктуаций спиральности в дневном пограничном слоя показан на рис. 3. Отметим, что он хорошо соответствует скейлингу, следующему из колмогоровской теории  $E_H(f) \sim f^{-1/3}$  и основанному на предположении, что он определяется только скоростью диссипацией энергии  $\epsilon$ .

Спектры горизонтальных и вертикальной “компонент” спиральности для дневного и ночного пограничного слоя приведены на рис. 4. Для сравнения на рисунке показан наклон  $-5/3$ . Видно, что наклоны спектров компонент спиральности близки к этой величине. Интегральная оценка спиральности по спектру дает значения  $0.02-0.03 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$ , что совпадает по порядку величины с приведенными выше теоретическими оценками. Интересно отметить, что подобные значения спиральности близки к спиральности характерных вторичных структур атмосферного пограничного слоя – роллов [7].

В Таблицах 1 и 2 представлены матрицы корреляций-ковариаций, полученные в результате обработки двух реализаций, полученных 22 сентября 2007 г., продолжительностью около полутора часов каждая, относящихся к неустойчивой

### 1.3. Поток завихренности и спиральности в атмосферном пограничном слое

(Таблица 1) и устойчивой (Таблица 2) стратификации. Ниже ступенчатой границы показаны ковариации, выше – корреляции. Единицы измерений для скорости ( $u, v, w$ ) – м/сек, температуры ( $T$ ) – градусы Кельвина, циркуляций ( $Z_y, Z_z$ ) – сек<sup>-1</sup>.

**Таблица 1.** Матрица ковариаций–корреляций для дневной серии 22.09.2007 ( $z/L = -0,21$ ).

Ниже и слева от ступенчатой границы ковариации, выше и справа – корреляции

	$u$	$v$	$w$	$T$	$Z_y$	$Z_z$
$u$	0.81	-0.062	-0.44	-0.26	-0.22	-0.64
$v$	-0.046	0.68	0.006	-0.06	0.225	0.12
$w$	-0.28	0.03	0.48	0.33	-0.22	0.29
$T$	-0.053	-0.012	0.053	0.051	-0.17	0.29
$Z_y$	-0.62	0.58	-0.47	-0.12	9.7	0.28
$Z_z$	-0.96	0.16	0.35	0.11	1.43	2.8

**Таблица 2.** Матрица ковариаций–корреляций для вечерней серии 22.09.2007 ( $z/L = 1.12$ ).

Ниже и слева от ступенчатой границы ковариации, выше и справа – корреляции

	$u$	$v$	$w$	$T$	$Z_y$	$Z_z$
$u$	0.115	-0.075	-0.34	0.39	-0.25	0.023
$v$	-0.014	0.306	-0.016	-0.12	0.23	0.08
$w$	-0.03	0.002	0.066	-0.203	-0.09	-0.04
$T$	0.026	-0.013	-0.01	0.039	-0.07	0.32
$Z_y$	-0.07	0.103	-0.019	-0.011	0.648	0.25
$Z_z$	-0.002	0.011	-0.003	0.016	0.051	0.065

Положительный знак вертикального кинематического потока тепла  $\langle w'T' \rangle$  (угловые скобки здесь и далее означают временное осреднение) указывает на реализацию конвективных условий, когда поток направлен вверх. Силы плавучести генерируют кинетическую энергию в количестве  $g/T \langle w'T' \rangle$ . При отрицательном знаке поток направлен вниз и кинетическая энергия затрачивается на работу против сил плавучести. Произведение  $\langle w'u' \rangle$  характеризует поток импульса. В системе координат, где ось  $x$  направлена вдоль ветра,  $z$  – вертикально вверх, он имеет отрицательный знак. Толщина приземного слоя по Монину–Обухову определяется модулем выражения  $l = \langle -w'u' \rangle^{1/2} / (\kappa g / T) \langle w'T' \rangle$ . При описании приземного слоя используется безразмерная высота  $z/L$ . Она характеризует отношение термического и динамического вкладов в генерацию кинетической энергии турбулентности. При неустойчивой стратификации мы имели  $L = -210$  м ( $z/L = -0,21$ ), при устойчивой  $L = 40$  м ( $z/L = 1.12$ ). Эти условия можно характеризовать как сильную неустойчивость и устойчивость.

При неустойчивости коэффициенты корреляции между компонентами скорости и циркуляции, в том числе и относящиеся к следу ковариационного тензора между векторами скорости и циркуляции, имеют значения такого же порядка,

как между компонентами скорости и температуры. Столь же значительной оказалась корреляция между  $Z_z$  и  $T$ .

Видно, что амплитуда  $Z_x$  существенно больше, чем  $Z_z$  (смотри Таблицу 2). Это можно объяснить тем, что вихри с горизонтальной осью образуются за счёт энергии усреднённого потока. Мощность этого источника вихревого движения в приземном слое всегда больше, чем приток энергии за счёт работы сил плавучести. Положительный знак циркуляции, например, вокруг вертикальной оси означает, что точка наблюдения находится внутри воздушной массы, обладающей циклоническим вращением вокруг этой оси. В вихре с твердотельным вращением вокруг некоторой оси датчик циркуляции (вокруг этой оси) показал бы постоянное значение в любой точке вихря. Измерения, выполненные вечером того же дня при устойчивой стратификации, показали, что амплитуды вариаций циркуляции вокруг вертикальной оси  $Z_z$  и продольной оси  $Z_x$  примерно вдвое меньше, чем днём, но отношение их среднеквадратичных значений близко к дневному значению.

Были вычислены функции плотности вероятности для  $Z_z$ ,  $Z_x$ ,  $w$  и  $T$  при неустойчивой и устойчивой стратификации (рис. 6).

Распределение для  $Z_z$  обладает заметной асимметрией. Кроме того, асимметрия плотности вероятности для  $Z_z$  меняет знак при смене знака параметра стратификации, тогда как асимметрия для  $Z_x$  мала и сохраняет знак при любой стратификации. Уменьшение амплитуды вариаций обеих компонент циркуляции связано с тем, что и вариации скорости ветра в ночной серии были существенно меньше, чем днём.

Временной ход двух компонент мгновенной спиральности  $H_z$  и  $H_x$  в дневных условиях демонстрирует значительно большую перемежаемость чем циркуляция. Видно, что спиральность отличается от циркуляции, что характерно и для других смешанных моментов, например для  $w'T'$ . Среднее значение  $H_z$  составило  $0.2 \text{ м/сек}^2$ , что примерно в 4 раза меньше, чем его среднеквадратичное значения ( $0.83 \text{ м/сек}^2$ ).

Коэффициент корреляции между сомножителями произведения  $H_z = Z_z w'$  в дневной серии при умеренно неустойчивой стратификации составил 0.344. Аналогичные показатели для  $H_y$ :  $\text{std} = 2,25 \text{ м/сек}^2$ , среднее значение  $0,46 \text{ м/сек}^2$ , коэф-

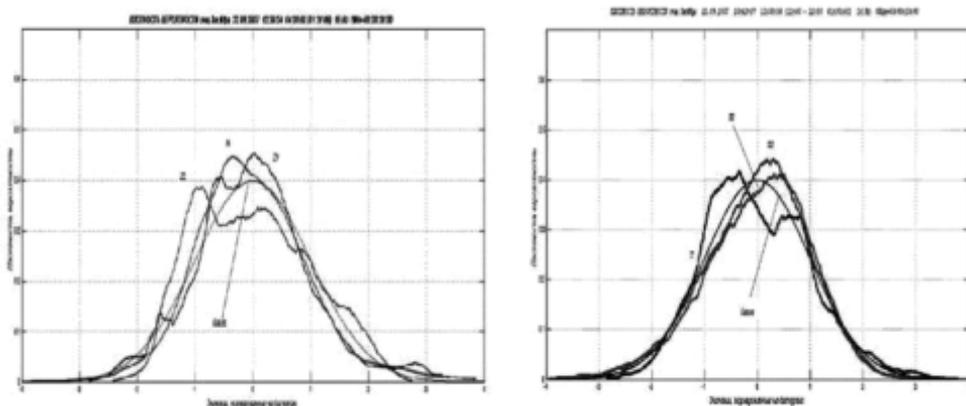


Рис. 6. Функции плотности вероятности для  $Z_z$ ,  $Z_x$ ,  $w$  и  $T$

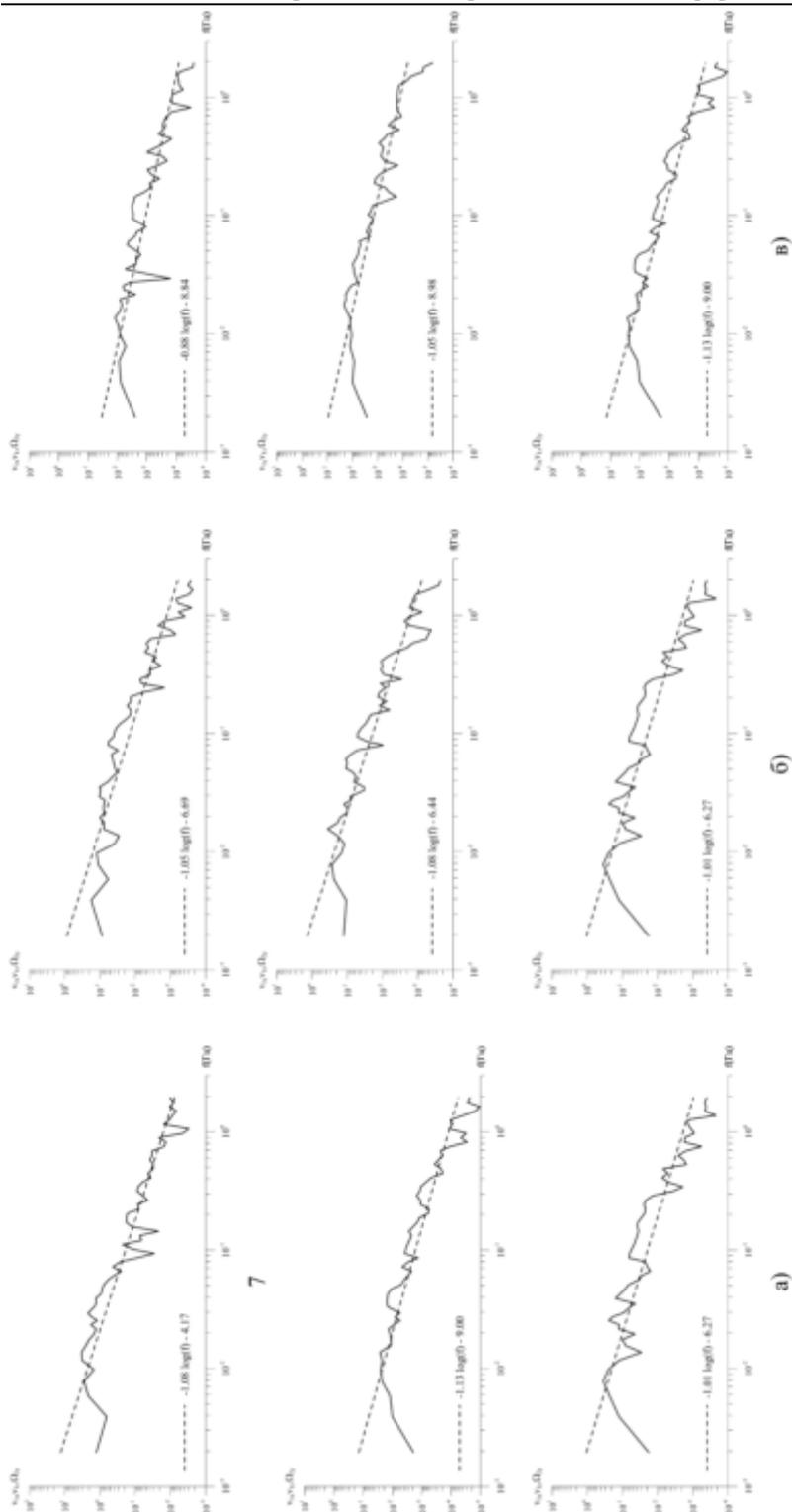


Рис. 7. Спектры  $v'w'$  и  $w'v'$  от 28.08.2004. а) Начало записи в 11:38:02 мск.в.рм; б) Начало записи в 22:17:24 мск.в.рм.  
Частота записи 16 Гц

коэффициент корреляции 0,215. В вечерней серии средние значения обеих измеренных слагаемых спиральности имели тот же знак, что и днём, но на 1–2 порядка меньшие значения. Std измеренных слагаемых спиральности также меньше, чем днём, как минимум, на порядок, а соответствующие коэффициенты корреляции – в 5 раз, за исключением пары  $U, Z_x$ . Из прочих коэффициентов корреляции максимальное значение имеет корреляция между  $T$  и  $Z_z$ . В отличие от спиральности, турбулентный поток тепла  $\langle w'T' \rangle$  ночью меняет направление на обратное и по модулю примерно на порядок меньше дневного, но модуль коэффициента корреляции сохраняет значение, близкое к дневному.

Ниже мы приводим данные о смешанных тройных корреляциях компонент скорости и завихренности. Как мы уже говорили, линейная зависимость от масштаба предполагает обратную зависимость  $f^{-1}$  в частотном спектре этой корреляции. На рис. 7 приведены спектры  $v_i v_k \Omega_l$  от 28.08.2004. а) Начало записи в 11:38:02 мск.вrm; б) Начало записи в 16:41:37 мск.вrm.; Начало записи в 22:17:24 мск.вrm. Частота записи 16 Hz. Как мы видим, все спектры демонстрируют в области частот выше 1–2 Гц устойчивые наклоны с показателем степени, близким к -1.

### Заключение

- Измеренные значения турбулентной спиральности в АПС оказываются близки к теоретическим ее оценкам и составляют 0.03-0.1  $m \cdot s^{-2}$ .
- Спектральный наклон спиральности близок к показателю  $-5/3$ , что указывает на ее поток в малые масштабы.
- Распределение спиральности демонстрирует заметную асимметрию.
- Спектральный наклон для компонент тензора тройных корреляций скорости и завихренности близок к  $f^{-1}$ . Это первое экспериментальное свидетельство реализации закона "2/15" для каскада спиральности.

**Приложение: Тензор потока вихря**

Для компонент тензора потока вихря мы можем получить, используя условие горизонтальной однородности следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \overline{u_x \omega_y} &= U \frac{dU}{dz} + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \overline{v_x^2} - v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\
 \overline{u_y \omega_x} &= v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \overline{v_y^2} - V \frac{dV}{dz}, \\
 \overline{u_x \omega_z} &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}, \\
 \overline{u_z \omega_x} &= v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} - v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{dv_z v_y}{dz}, \\
 \overline{u_y \omega_z} &= v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, \\
 \overline{u_z \omega_y} &= v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{dv_z v_x}{dz} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Диагональные компоненты тензора потока вихря, которые связаны со спиральностью, не сводятся к иным конфигурациям моментов и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \overline{u_x \omega_x} &= -U \frac{dV}{dz} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial y} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\
 \overline{u_y \omega_y} &= V \frac{dU}{dz} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial z} - v_y \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\
 \overline{u_z \omega_z} &= v_z \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_x}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Для антисимметричных комбинаций горизонтально-вертикальных компонент тензора мы получаем

$$\begin{aligned}
 \overline{u_x \omega_z} - \overline{u_z \omega_x} &= \frac{d\overline{u_z u_y}}{dz} = \frac{dv_z v_y}{dz}, \\
 \overline{u_y \omega_z} - \overline{u_z \omega_y} &= -\frac{d\overline{u_z u_x}}{dz} = -\frac{dv_z v_x}{dz}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Эти тождества следуют и непосредственно из представления стационарных уравнений Рейнольдса в следующем виде:

$$2\overline{\omega} \times \overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{w}} \times \overline{\mathbf{u}} - (2\overline{\omega} + \overline{\mathbf{W}}) \times \overline{\mathbf{v}} + \overline{\omega} \times \overline{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P^* + \beta g e \overline{\theta} + \nu \Delta \overline{\mathbf{v}}. \tag{18}$$

## Литература

- [1] *Moffatt H.K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 35. N 01. P. 117-129.
- [2] *Моисеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В.* Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // *ЖЭТФ.* 1983. Т. 85. С. 1979-1987.
- [3] *Kraichnan R.H.* Helical turbulence and absolute equilibrium // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 59. N 04. P. 745-752.
- [4] *Biferale L., Musacchio S., Toschi F.* Inverse energy cascade in three-dimensional isotropic turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. N 16. P. 164501.
- [5] *Гледзер Е.Б., Чхетиани О.Г.* Обратный каскад энергии в развитой турбулентности при нарушении симметрии спиральных мод // *Письма ЖЭТФ.* 2015. Т. 102. №7. С. 521-529.
- [6] *Stepanov R., Golbraikh E., Frick P., Shestakov A.* Hindered energy cascade in highly helical isotropic turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2015. V. 115. N 23. P. 234501.
- [7] *Etling D.* Some aspects of helicity in atmospheric flows // *Beitr. Phys. Atmos.* 1985. V. 58. N 1. P. 88-100.
- [8] *Курганский М.В.* Связь между спиральностью и потенциальным вихрем в сжимаемой вращающейся жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1989. Т. 25. № 12. С. 1326-1329.
- [9] *Hide R.* Superhelicity, helicity and potential vorticity // *Geophys. Astro. Fluid.* 1989. V. 48. N 1-3. P. 69-79.
- [10] *Белян А.В., Моисеев С.С., Чхетиани О.Г.* О турбулентной вязкости в спиральной турбулентности // *ДАН.* 1994. Т. 334. № 1. С. 41-43.
- [11] *Долгинов А.З., Силантьев Н.А.* Диффузия скалярного поля в стохастической среде // *ЖЭТФ.* 1987. Т. 93. С. 159-171.
- [12] *Chkhetiani O.G., Hnatich M., Jurčičšinová E. et al.* Influence of helicity on anomalous scaling of a passive scalar advected by the turbulent velocity field with finite correlation time: Two-loop approximation // *Phys. Rev. E.* 2006. V. 74. N 3. P. 036310.
- [13] *Чхетиани О.Г.* О спиральной структуре экмановского пограничного слоя // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2001. Т. 37. № 5. С. 614-620.
- [14] *Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* Полуэмпирическая модель пограничного слоя атмосферы с параметризацией влияния турбулентной спиральности // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2005. Т. 41. №5. С. 418-432.
- [15] *Пономарев В.М., Ханаев А.А., Чхетиани О.Г.* Роль спиральности в формировании вторичных струек тур в экмановском пограничном слое // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2003. Т. 39. № 4. С. 435-444.
- [16] *Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В.* Нелинейная динамика крупномасштабных вихревых структур в турбулентном экмановском слое // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2007. Т. 42. № 4. С. 72-82.
- [17] *Новиков Е.А.* Поток вихря // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1972. Т. 8, № 7. С. 759-762.
- [18] *Копров Б.М., Азизян Г.В., Калугин В.В.* Спектры циркуляции скорости в приземном слое атмосферы // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1987. Т. 23. №11. С. 1151-1158.
- [19] *Копров Б.М., Калугин В.В., Тиме Н.С.* Турбулентный поток вихря // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1994. Т. 30. № 1. С. 13-17.
- [20] *Бовшверов В.М., Гурвич А.С., Кочетков А.Н., Ломадзе С.О.* Измерение частотного спектра мелкомасштабной циркуляции скорости в турбулентном потоке // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1971. Т. 7, № 4. С. 371-376.
- [21] *Копров Б.М., Копров В.М., Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* Измерение турбулентной спиральности и ее спектра в пограничном слое атмосферы // *ДАН.* 2005. Т. 403. № 5. С. 627-630.

### *1.3. Потoki завихренности и спиральности в атмосферном пограничном слое*

- [22] *Копров Б.М., Копров В.М., Курганский М.В., Чхетиани О.Г.* Спиральность и потенциальный вихрь в приземной турбулентности // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 6. С. 637-647.
- [23] *Brissaud A., Frisch U., Leorat J. et al.* Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence // Phys. Fluids. 1973. V. 16. N 8. P. 1366-1367.
- [24] *Чхетиани О.Г.* О третьих моментах в спиральной турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 63. №10. С. 768-772.
- [25] *Чижелски Р.* Параметризация турбулентности в потоках со спиральностью // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. №2. С. 174-188.
- [26] *Вазяева Н.В., Чхетиани О.Г., Кузнецов Р.Д.* Оценка спиральности в атмосферном пограничном слое по данным акустического зондирования // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2017. Т. 53. №2.
- [27] *Мусеев С.С., Чхетиани О.Г.* Спиральный скейлинг в турбулентности // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. №6. С. 357-370.
- [28] *Чхетиани О.Г.* О локальной структуре спиральной турбулентности // ДАН. 2008. Т. 422. №5. С. 618-621.
- [29] *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. №4. С. 299-303.
- [30] *Wyngaard J.C.* Spatial resolution of the vorticity meter and other hot-wire arrays // J. Phys. E: Sci. Instrum. 1969. V. 2. N 11. P. 983-987.
- [31] *Antonia R.A., Browne L.W.B., Shah D.A.* Characteristics of vorticity fluctuations in a turbulent wake // J. Fluid Mech. 1988. V. 189. P. 349-365.
- [32] *Vukoslavcevic P., Wallace J.M.* A 12-sensor hot-wire probe to measure the velocity and vorticity vectors in turbulent flow // Meas. Sci. Technol. 1996. V. 7. No.10. P. 1451-1461.
- [33] *Kholmyansky M., Tsinober A., Yorish S.* Velocity derivatives in the atmospheric surface layer at  $Re_\lambda = 10^4$  // Phys. Fluids. 2001. V. 13. N 1. P. 311-314.
- [34] *Jordan A.R.* Pressure and vorticity transients from summer storms and aircraft // J. Appl. Meteorol. 1980. V. 19. N 10. P. 1223-1233.
- [35] *Ohtou A., Maitani T., Seo T.* Direct measurement of vorticity and its transport in the surface layer over a paddy field // Boundary Layer Meteorol. 1983. V. 27. N 2. P. 197-207.
- [36] *Mitsuta Y., Asai H.* A sonic anemometer for the measurement of vorticity and its transport in the surface layer // Exp. Fluids. 1984. V. 2. N 3. P. 150-152.
- [37] *Rosby T.* An oceanic vorticity meter // J. Mar. Res. 1975. V. 82. N 2. P. 213-222.
- [38] *Gaynor J.E., Hall F.F., Edinger J.G., Ochs G.R.* Measurement of vorticity in the surface layer using an acoustic echo sounder array // Remote Sens. Environ. 1977. V. 6. N 2. P. 127-137.
- [39] *Sanford T.B., Carlson J.A., Dunlap J.H. et al.* An electromagnetic vorticity and velocity sensor for observing finescale kinetic fluctuations in the ocean // J. Atmos. Oceanic Technol. 1999. V. 16. N 11. P. 1647-1667.
- [40] *Thwaites F.T., Williams A.J., Terray E.A., Trowbridge J.H.* A family of acoustic vorticity meters to measure ocean boundary layer shear // Proceedings of the IEEE Fifth Working Conference on Current Measurement / IEEE. Institute of Electrical & Electronics Engineers (IEEE), 1995. P. 193-198.
- [41] *Longuet-Higgins M.* On triangular tomography // Dyn. Atmos. Oceans. 1982. V. 7. N 1. P. 33-46.
- [42] *Бовшверов В.М., Копров Б.М., Мордухович М.Н.* О трехкомпонентном акустическом анемометре // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. №4. С. 434-436.

## 1.4. Измерение пульсаций направления ветра и температуры в приземном слое

*Е.А. Шишов, О.А. Соленая, Б.М. Копров, В.М. Копров*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

### Введение

Течение температурно-стратифицированного воздуха над подстилающей поверхностью, являющееся безнапорным, отличается рядом особенностей от течений в трубах. Для его описания в настоящее время используется полуэмпирическая теория Мони́на–Обухова [1]. Она исходит из предположения о хаотичном характере вариаций и использует чисто статистический подход. В предположении однородности поверхности и стационарности (а также в пренебрежении радиационным теплообменом) средняя температура и скорость ветра, а также нормированные статистические моменты (квадраты и произведения вариаций) зави-

сят от единственного параметра  $\zeta = \frac{z}{L}$ , где  $L = -\frac{(-\overline{u'w'})^{3/2}}{\kappa \frac{g}{T} \overline{w'T'}}$ . – масштаб при-

земного слоя,  $u'$ ,  $w'$ ,  $T'$  – вариации продольной и вертикальной компоненты скорости и температуры,  $\kappa$  – постоянная Кармана,  $g$  – ускорение свободного падения,  $T$  – абсолютная температура.

В этой теории режим течения определяется на основе наблюдений временных вариаций температуры и компонент скорости на одной высоте. Это позволяет приближенно описать (в предположении «замороженности») пространственную структуру вариаций вдоль направления среднего ветра и не дает никакой информации о пространственной структуре вариаций в вертикальном и поперечном направлениях.

Для изучения пространственной структуры вариаций используются, как многоточечные, так и односточечные [2] наблюдения. Значительный опыт многоточечных наблюдений накоплен, в частности, в работах ИФА, проводившихся в Цимлянске в течение 60 лет [3–5]. Особенно интенсивно он используется последние три десятилетия [6, 7]. Многоточечные по высоте измерения температуры малоинерционными датчиками [8] позволяют получить так называемые карты температуры, которые с очевидностью указывают, что приземный слой расслаивается на непересекающиеся изотермические поверхности. (Температурная стратификация как атмосферы в целом, так и в приземном слое обусловлена поглощением радиации, в основном в инфракрасном диапазоне). Температурному расслоению в приближении Буссинеска соответствует расслоение плотности. Как известно, в идеальной стратифицированной жидкости изопикнические поверхности не пересекаются [9]. Это означает, что жидкость движется вдоль них. В приземном слое амплитуда вертикальных перемещений изотермических поверхностей имеет порядок  $L$ , т. е. всей толщины приземного слоя. Таким образом, многоточечные измерения температуры дают информацию о структуре поля ветра, которая представляет интерес для ряда приложений, например, в теории распространения волн, строительстве, авиации и др. В таком случае датчики температу-

ры, стоящие на фиксированной высоте, сталкиваясь с наклонами таких поверхностей, обнаруживают характерные асимметричные выбросы, известные как gap-structures [10].

Многоточечные измерения правления ветра также дают информацию не только о статистических характеристиках (дисперсиях, ковариациях, корреляционных и структурных функциях), но и позволяют увидеть, как распределены в пространстве области с различными направлениями ветра.

Датчик направления ветра, по-видимому, самый простой и дешевый инструмент, являющийся индикатором прохождения вихрей с вертикальной осью, пригодный для исследований пространственных структур поля направления ветра.

## **1. Используемые приборы и методика измерений**

Многоточечные измерения пульсаций направления ветра производились в августе 2012 и 2015 годов на Цимлянском полигоне ИФА РАН в Ростовской области. Полигон представляет собой ровный участок невозделанной степи площадью около 25 гектаров. В эксперименте 2012 года было использовано пять флюгеров и пять малоинерционных термометров. На рисунке 1 изображена схема расположения приборов. Пять флюгеров (F1, F2, F3, F4, F5) были закреплены на вершинах двухметровых штанг и выстроены в линию вдоль направления север-юг. Расстояния между первым и каждым из последующих флюгеров равны 1, 3, 10 и 20 метров соответственно. Мачта, оснащенная пятью малоинерционными термометрами сопротивления переменного тока (T1, T2, T3, T4, T5), размещенными на высотах 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, 6.4 метров, была установлена между флюгерами F4 и F5. Недалеко от места измерений был установлен акустический анемометр Gill WindMaster и пиранометр для фиксации прохождения облаков.

Основные результаты данных измерений представлены в статье [11]. Исследования продолжились в 2015 году, когда было задействовано уже 12 флюгеров, а общее время измерений увеличилось на порядок. Так как эксперимент 2015 года оказался более плодотворным, в первую очередь будет рассмотрен именно он.

Каждый флюгер состоит из датчика угла поворота  $\varphi$  с закрепленной на оси вращения лопастью. Флюгеры были закреплены на вершинах двухметровых штанг, так же как в 2012 году. Напряжение на выходе датчика изменяется – от 0 до 10 вольт пропорционально углу поворота оси флюгера. При этом флюгер имеет так называемую “точку переброса” – положение лопасти, при котором напряжение на выходе скачком падает от максимального до минимального. Флюгеры были установлены таким образом, чтобы “точка переброса” соответствовала западному ветру, который практически никогда не наблюдался во время измерений. Сигналы от каждого флюгера поступали на общую точку сбора, а от нее через многожильный кабель передавались на АЦП L-Card и записывались на ПК.

Флюгеры были установлены в линию вдоль направления «север-юг» (рис. 2). В августе на полигоне преобладают ветра восточных румбов, таким образом, ряд флюгарок практически все время был ориентирован поперек среднего направления потока воздуха. Введем систему координат таким образом, чтобы ось  $x$  была направлена вдоль среднего ветра, а ось  $y$  – вправо, поперек ветра. Неравномерная расстановка датчиков позволила получить 39 различных расстояний между датчиками вдоль оси  $y$ , от 1 до 125 метров (рис. 3а).

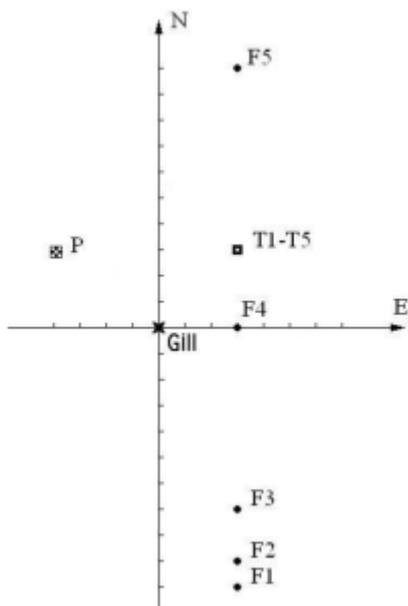


Рис. 1. Расположение приборов на полигоне в 2012 г.



Рис. 2. Ряд флюгеров



Рис. 3. Расположение приборов на полигоне в 2015 г.

В одном ряду с флюгерами на той же высоте был расположен ультразвуковой анемометр-термометр Gill WindMaster, который использовался для регистрации трех компонент ветра и температуры. Для определения условий стратификации второй такой анемометр был закреплен на высоте 10 метров. Сигналы с цифро-

вых выходов анемометров регистрировались синхронно с аналоговыми сигналами флюгеров.

Измерения проводились в течение всех суток сериями от двух до семи часов. Общая продолжительность всех записей составила около 160 часов. Большая продолжительность наблюдений позволила отобрать несколько десятков получасовых отрезков. Основным критерием для отбора записей являлась стационарность условий. В выбранных записях не должно сильно изменяться среднее направление ветра, а также амплитуда мелких вариаций. Температура воздуха также не должна слишком быстро возрасть или падать. В связи с этим из обработки были исключены записи, сделанные утром во время наиболее интенсивного прогрева воздуха, и во время вечернего охлаждения. Не рассматривались также записи, содержащие единичные резкие смены направления ветра, соответствующие прохождению крупномасштабных вихрей.

## 2. Корреляционные функции и радиусы корреляции

Для выбранных записей были вычислены коэффициенты корреляции между различными парами флюгеров. На рисунке 4 представлена зависимость  $R(\Delta y)$

коэффициента корреляции  $R(\Delta y) = \frac{\overline{\varphi(y + \Delta y)\varphi(y)}}{\sigma_\varphi(y + \Delta y)\sigma_\varphi(y)}$  от расстояния между датчиками  $\Delta y$ . Здесь  $\sigma_\varphi$  – среднеквадратичное значение вариаций угла.

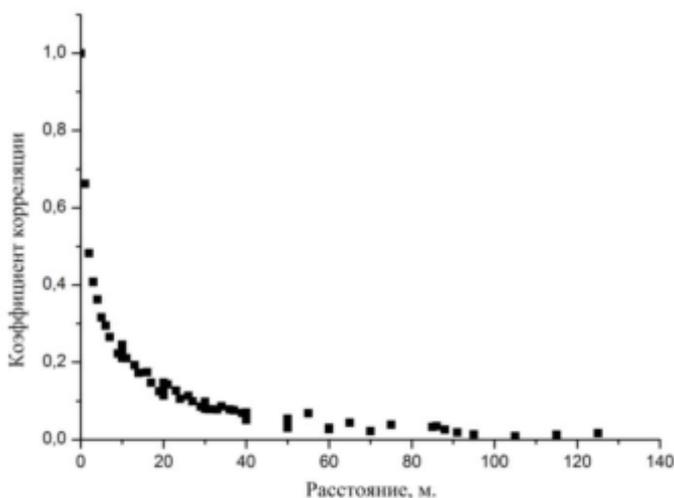


Рис. 4. Корреляционная функция

Коэффициенты корреляции для различных пар флюгеров практически не отличаются, если расстояния между этими парами совпадают. Иными словами, коэффициенты зависят лишь от расстояния  $\Delta y$  между датчиками и не зависят от  $y$ , т.е. от места их расположения. По этой единичной реализации можно сделать вывод об однородности потока воздуха на полигоне.

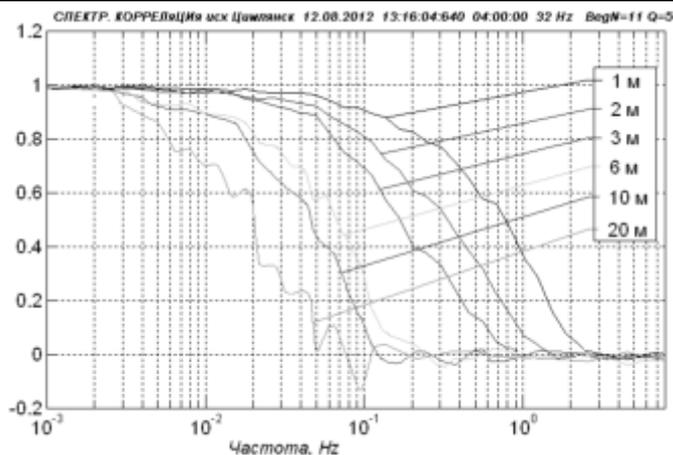


Рис. 5. Спектральные коэффициенты корреляции для различных расстояний между флюгерами

Полученная корреляционная функция  $R(\Delta y)$  монотонно убывает с увеличением дистанции между флюгерами. Расстояние, на котором показания датчиков все еще коррелируют, зависит от среднего размера вихрей, проходящих через ряд флюгеров. Чем больше характерный размер вихрей, тем большее число флюгеров они одновременно захватывают и тем медленнее убывает корреляционная функция. При стационарных условиях на расстояниях порядка 100 м коэффициент корреляции убывает практически до нуля.

В отличие от мелкомасштабных пульсаций, изменение направления среднего ветра затрагивает сразу все флюгеры, и корреляционная функция для такого участка записи более медленно приближается к отличному от нуля значению. Так как подобные крупномасштабные явления не являются предметом данного исследования, записи с нарушением стационарности исключались из обработки.

На рисунке 5 представлены зависимости спектральных коэффициентов корреляции от частоты в диапазоне расстояний между датчиками от 1 до 20 м в дневное время (данные 2012 г.).

Спектральным коэффициентом корреляции между вариациями какого-либо поля  $Y$  в двух пространственных точках  $x_1, x_2$ , называется отношение

$$R_{x_1, x_2}(f) = \frac{Co_{x_1, x_2}(f)}{[F_{x_1, x_2}(f)F_{x_1, x_2}(f)]^{1/2}}$$

коспектра между вариациями поля в этих

точках к корню квадратному из произведения автоспектров. Представленный график показывает, как зависит эта функция от расстояния между датчиками  $x_2 - x_1$ . Как видно из графика, колебания самых низких частот демонстрируют высокую корреляцию даже при больших расстояниях между датчиками. Чем дальше расположены друг от друга флюгеры, тем быстрее уменьшается корреляция с ростом частоты.

Основным методом отсеечения крупномасштабной составляющей в данной работе является вычитание из реализации скользящего среднего значения, получаемого с помощью окна сглаживания шириной 3 минуты. Такой выбор ширины

окна скользящего осреднения можно аргументировать тем, что ему при умеренном ветре (порядка 5 м/сек) соответствует пространственный масштаб порядка 1 км. Выбор большего значения окна сглаживанию означал бы выход за пределы размера полигона, который окружен разного рода неоднородностями (городская застройка, лесополосы). Кроме того, при вычислениях корреляционной функции нам хотелось избежать влияния квазипериодических вариаций с периодами порядка 20 минут, а также вариаций, вызванных прохождением теней кучевых облаков с временным масштабом того же порядка, не имеющих отношения к турбулентности.

Чтобы количественно оценить характерный размер вихрей, был вычислен пространственный поперечный радиус корреляции  $R(\Delta y)$ . В данной работе за радиус корреляции принимается величина, равная площади под графиком соответствующей корреляционной функции  $r_y = \int_0^{\infty} R(\Delta y) d(\Delta y)$ . Для экспоненциальной

корреляционной функции радиус определяется как расстояние, на котором коэффициент корреляции уменьшается в  $e$  раз.

Так как ряд флюгеров ориентирован перпендикулярно среднему направлению ветра, то полученный пространственный радиус корреляции указывает на поперечный размер структур в потоке воздуха.

Для получения сведений о продольном размере этих структур половина флюгеров была выстроена вдоль оси  $x$ , соответствующей линии «запад-восток» и совпадающей с направлением среднего ветра (рис. 3б). Корреляционные функции были посчитаны отдельно для каждого ряда флюгеров. Оказалось, что для соответствующих записей продольные радиусы корреляции  $R(\Delta x)$  примерно в 1,7 раз превышают поперечные  $R(\Delta y)$  (рис. 6).

Еще одним методом оценки продольного размера вихрей является исследование временной корреляционной функции. Для такой функции можно определить временной радиус корреляции. Используя гипотезу о замороженной турбулентности Тейлора, полученный временной радиус можно перевести в пространственный, умножив его на среднюю скорость ветра в данном измерении.

На рисунке 7 представлено сравнение продольных радиусов корреляции, полученных как по временным корреляционным функциям с применением гипотезы Тейлора, так и вычисленные напрямую по данным с разнесенных в пространстве датчиков. Применение гипотезы Тейлора позволяет обойтись без расстановки дополнительных флюгеров вдоль направления среднего ветра. Однако ее результат зависит от того, насколько эта гипотеза применима к условиям наблюдений.

Поперечные радиусы корреляции были посчитаны для многих реализаций при различных условиях стратификации приземного слоя. Эти условия характеризует масштаб  $L$ . Для его нахождения по показаниям ультразвукового анемометра для каждой

реализации были найдены величины  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{w'T'}$ ,  $L = -\frac{(-\overline{u'w'})^{3/2}}{\kappa \frac{g}{T} \overline{w'T'}}$ . Здесь вариации

$u'$ ,  $w'$ ,  $T'$  были определены как отклонения от скользящего трехминутного среднего. Черта над произведением означает его осреднение по всей длине реализации.

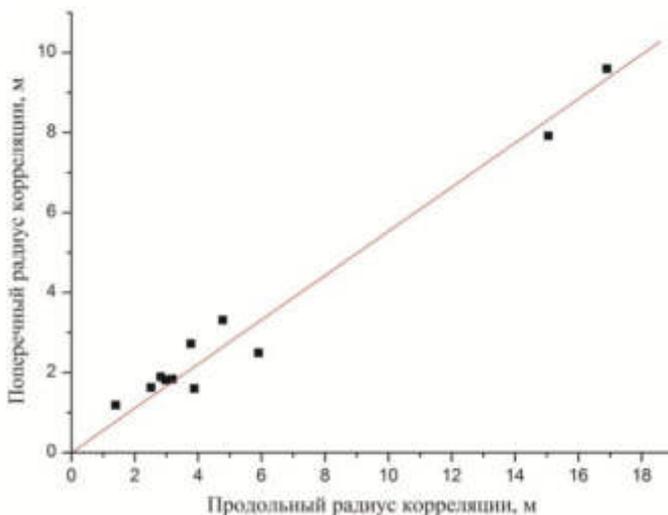


Рис. 6. Отношение поперечных радиусов корреляции к продольным

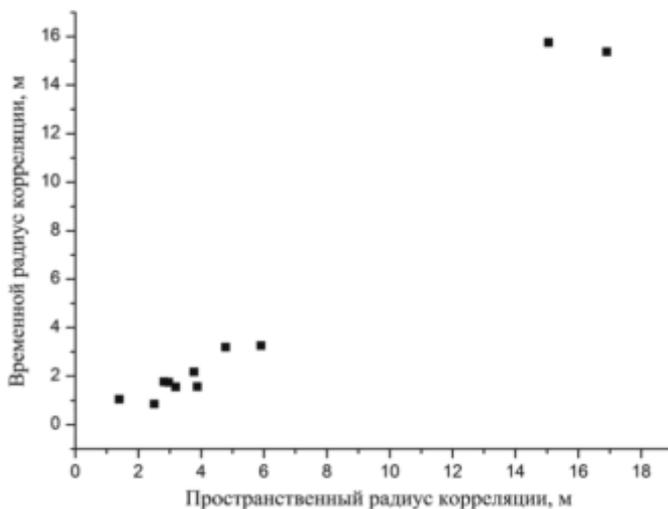


Рис. 7. Сравнение продольных радиусов корреляции, полученных по пространственным и временным корреляционным функциям

На рисунке 8 представлены зависимости продольного (верхний график) и поперечного (нижний график) радиусов корреляции от масштаба Обухова, характеризующего стратификацию. Видно, что при  $L = 0$ , оба радиуса близки к 5 м. (Такая ситуация возникает при безветрии). С ростом положительных значений масштаба Обухова оба радиуса уменьшаются. С ростом же отрицательных значений масштаба Обухова, (что означает переход от сильной к умеренной неустойчивости) радиусы корреляции, напротив, быстро возрастают.

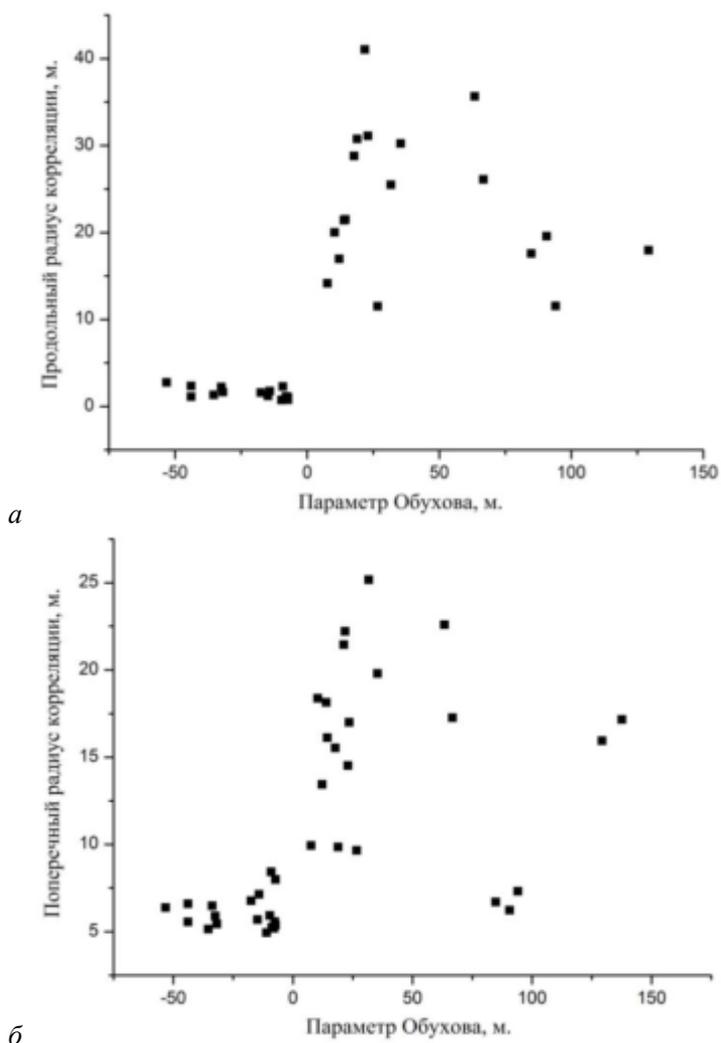


Рис. 8. Зависимость радиусов корреляции от параметра Обухова

Поперечный радиус достигает максимума порядка 20 м при значении  $L = -20$  м (т. е.  $\zeta = -0,1$ ), а при дальнейшем росте величины  $-L$ , (который при равных значениях кинематического потока тепла  $\overline{w'T'}$  наблюдается при усилении ветра) радиус быстро убывает приблизительно до того уровня, который он имеет при безветрии. Продольный радиус меняется с ростом неустойчивости подобным образом, но достигает большего максимального значения порядка 30 м

Если считать величину радиуса корреляции оценкой горизонтального размера вихря, то эти результаты свидетельствуют о том, что вихри с вертикальной осью достигают максимального размера при умеренной неустойчивости. Этот вывод качественно согласуется с наблюдениями за условиями, способствующими возникновению “пыльных дьяволов” [12].

Следует еще раз отметить, что описываемые в данной работе радиусы корреляции сильно зависят от длины обрабатываемого участка записи и ширины окна сглаживания, выбранной для вычисления "скользящего среднего", которое вычитается для исключения мезомасштабных вихрей. Иными словами, полученные радиусы корреляции указывают на средний размер вихрей лишь внутри выбранного диапазона масштабов. Однако, поскольку все реализации обрабатывались идентично, то полученные радиусы можно сравнивать в рамках одной работы.

### 3. Спектры пульсаций направления ветра

В построенных спектрах временных вариаций направления ветра обнаружены участки со степенной зависимостью спектральной плотности от частоты. На графиках с логарифмическим масштабом эти участки имеют вид прямой линии. Степенные интервалы наблюдаются в спектрах скорости ветра и температуры, где значения показателей незначительно отличаются от  $-5/3$ . Завал спектральной плотности на частотах свыше 1 Гц объясняется инерционностью флюгера, который не может отслеживать слишком быстрые изменения направления ветра. Интенсивность вариации и форма спектра оказались различными на разных участках спектра в ночных (рис. 9а) и дневных (рис. 9б) условиях термической стратификации. Для ночных измерений коэффициент наклона меняется в пределах от  $-0,6$  до  $-0,2$ , а для дневных – от  $-1,8$  до  $-0,7$ .

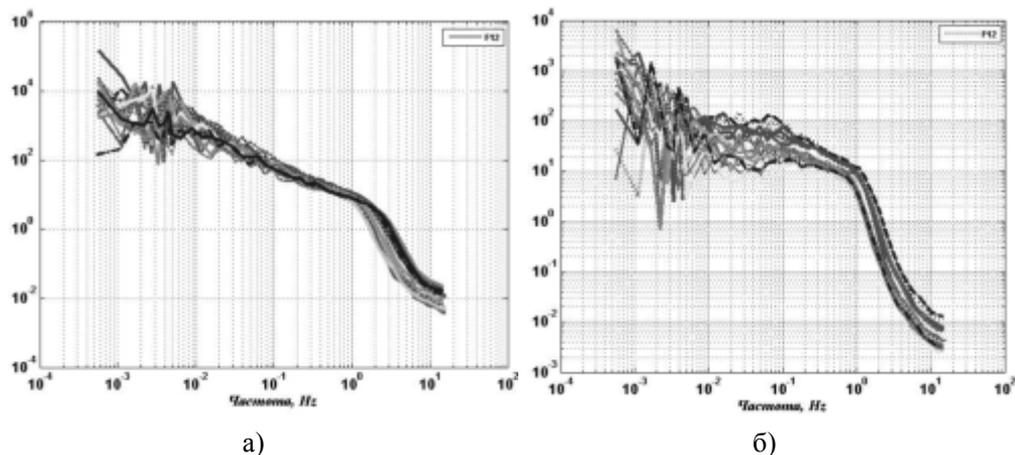


Рис. 9. Спектры пульсаций направления ветра

### 4. Карты направления ветра

Помимо статистических многоточечные измерения позволяют наблюдать распределение неоднородностей направления или структуры на плоскости  $x$ - $y$ . Для этой цели датчики были расставлены в линию поперек среднего ветра через каждые десять метров друг от друга (рис. 3в). Применяя методику, разработанную для анализа синхронных показаний пульсационных термометров [8] и гипотезу о замороженности турбулентности Тейлора, можно построить карту распре-

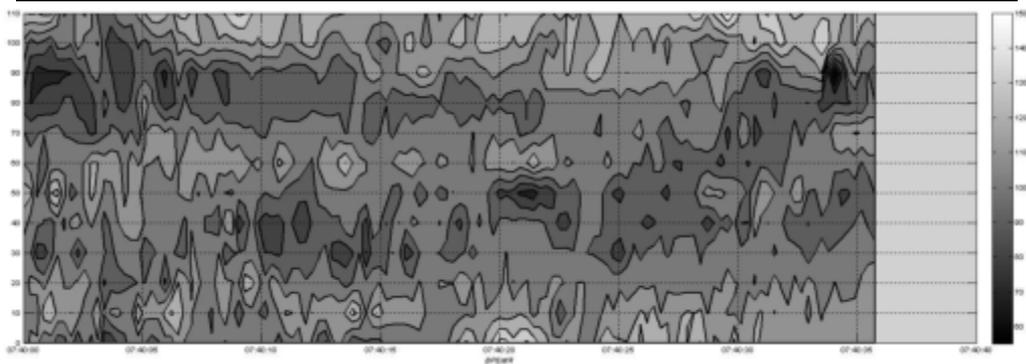


Рис. 10. Карта пульсаций направления ветра

деления направления ветра на плоскости  $x$ - $y$ . На рисунке 10 представлена такая карта, построенная по данным 2015 года. Средняя скорость ветра во время измерений составляла примерно 3,17 метра в секунду. Вертикальная ось графика соответствует направлению «север–юг», по горизонтали отложен пространственный масштаб по «замороженности», а цветом отмечено направление ветра. На рисунке видны участки, на которых несколько флюгеров отклоняются в одну сторону в пределах некоторой площадки. Эти участки могут быть интерпретированы как области прохождения отдельных вихрей.

В эксперименте 2012 года одновременно с показаниями флюгеров регистрировался “мгновенный” профиль температуры в слое 0,4–6,4 м. На вертикальной оси полученной карты (рис. 11) отложена высота над поверхностью земли, по горизонтали – время, а интенсивность серого характеризует температуру. Так как конвективные образования переносятся ветром, временная шкала по-прежнему может быть приблизительно заменена пространственной. На рисунке хорошо видны проходящие области теплого воздуха, контрастно выделяющиеся на общем фоне. Средний размер поперечного сечения конвективной структуры на высоте 2 м можно оценить значением порядка 20 м.

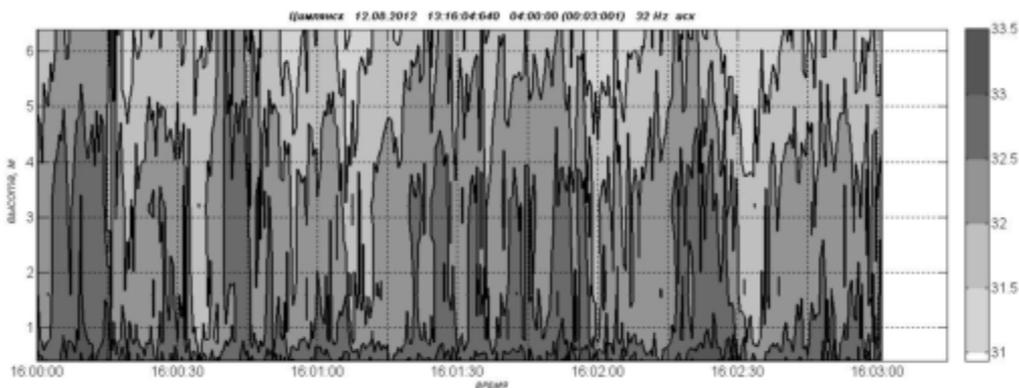


Рис. 11. Карта пульсаций температуры

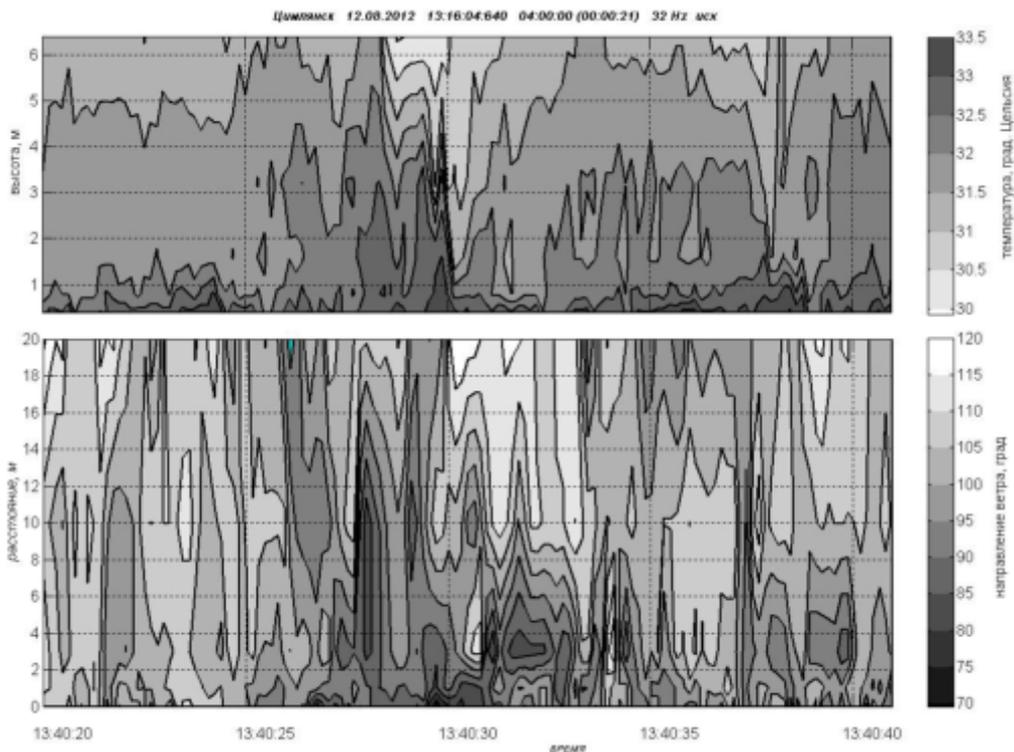


Рис. 12. Совмещение карт пульсаций температуры и пульсаций направления ветра

На рисунке 12 представлено совмещение синхронных карт, относящихся к температуре и направлению ветра за один и тот же временной период (20 секунд). Можно заметить, что наибольший перепад температуры сопровождается значительным отклонением направления ветра. Насколько это явление закономерно, сказать на основании этого примера трудно. Далее, в отличие от карты температуры, на карте поперечной структуры направления ветра наблюдаются области с замкнутыми изолиниями равных направлений. Однако для надежных выводов о связи пульсаций направления ветра с прохождением конвективных структур необходима намного более обширная статистика.

Хотя данный метод обработки результатов позволяет лишь визуализировать структуру поля ветра или температуры и не дает каких-либо количественных результатов, он представляется весьма перспективным, как средство выделения отдельных вихрей на фоне среднего потока и исследования их как единых цельных элементов.

### Основные результаты

1. Создана и испытана в полевых условиях многоточечная система для регистрации пульсаций направления ветра и температуры.
2. Получены пространственные корреляционные функции, а по ним вычислены продольные и поперечные радиусы корреляции.

3. Установлено, что корреляция вдоль направления среднего ветра в среднем падает в 1,7 медленней, чем в направлении поперек ветра.

4. Установлена немонотонная зависимость радиуса корреляции от масштаба  $L$ . Оказалось, что максимальные значения радиуса корреляции на высоте  $z$  наблюдаются при  $\zeta = \frac{z}{L} = -0,1$ .

5. Спектры пульсаций направления ветра имеют ярко выраженные степенные участки, причем значения показателей степени  $\alpha$  варьируются от -1,8 до -0,7 в дневное время, и между -0,6 и -0,2 – в ночное время. Подобная изменчивость не наблюдается у спектров скорости и температуры.

6. Отмечена перспективность совместного статистического анализа пространственно-временной структуры температуры и направления ветра.

## Литература

[1] *Монин А.С., Обухов А.М.* Безразмерные характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы // Докл. АН СССР. 1953. Т. 69. № 2. С. 223-226.

[2] *Calaf M., Hultmark M., Oldroyd H.J., Simeonov V.* Coherent structures and  $k^{-1}$  spectral behavior // Physics of Fluids. 2013. № 25, 125107.

[3] *Зубковский С.Л., Федоров М.М.* Экспериментальное определение пространственных корреляционных функций поля скорости ветра в приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22, № 9. С. 909-916.

[4] *Копров Б.М., Соколов Д.Ю.* Пространственные корреляционные функции компонент скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы // Изв. АН СССР, ФАО. 1973. Т. 9, № 2. С. 178-182.

[5] *Kader B.A., Yaglom A.M., Zubkovsky S.L.* Spatial correlation functions of surface-layer atmospheric turbulence in neutral stratification // Boundary-Layer Meteorology. 1989. V. 47, Issue 1. P. 233-249.

[6] *Hutchins N., Chauhan K., Marusic I., Monty J., Klewicki J.* Towards reconciling the large-scale structure of turbulent boundary layers in the atmosphere and laboratory // Boundary-Layer Meteorol. 2012. V. 145. P. 273-306.

[7] *Metzger M., McKeon B.J., Holmes H.* The near-neutral atmospheric surface layer: turbulence and non-stationarity // Phil. Trans. R. Soc. A. 2007. V. 365. P. 859-876.

[8] *Koprov B.M., Koprov V.M., Makarova T.I., Golitsyn G.S.* Coherent structures in the atmospheric surface layer under stable and unstable conditions // Boundary-Layer Meteorol. 2004. V. 111. P. 19-32.

[9] *Должанский Ф.В.* Основы геофизической гидродинамики. М.: Физматлит, 2011. 264 с.

[10] *Antonia R.A., Chambers A.J., Friehe C.A., Van-Atta C.W.* Temperature ramps in the atmospheric surface-layer // J. Atmos. Sci. 1979. V. 36, № 1. P. 99-108.

[11] *Копров Б.М., Копров В.М., Шишов Е.А.* Статистические характеристики пространственно-временной изменчивости направления ветра в приземном слое // Изв. РАН, ФАО, в печати.

[12] *Kurgansky M.V., Montecinus A., Villagran V., Metzger S.M.* Micro-meteorological conditions for dust-devil occurrence in the Atacama Desert // Boundary-Layer Meteorol. 2011. V. 138. P. 285-298.

## 1.5. Турбулентная спиральность и потенциальный вихрь в приземном слое атмосферы

**Б.М. Копров<sup>1</sup>, В.М. Копров<sup>1</sup>, О.А. Соленая<sup>1</sup>, О.Г. Чхетиани<sup>1,2</sup>,  
Е.А. Шишов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН

Выполнены измерения вариаций всех компонент векторов скорости  $u_i'$ , ротора скорости  $\omega_j'$  и градиента температуры  $G_k' = \partial T' / x_k$ , а также вариаций “акустической” температуры  $T'$  по методике тетраэдра, впервые использованной в Цимлянской экспедиции 2012 года [1]. Использовалась установка, состоящая из четырех трехкомпонентных акустических анемометров-термометров *Gill Windmaster*, размещенных в вершинах тетраэдра с базовым масштабом 0,7 м (в отличие от эксперимента 2012 года, когда базовый масштаб был равен 5 м). Измерения проводились в августе 2014 года на полигоне ИФА РАН в Цимлянске на высотах 3, 5, 13,1 и 25 м, при различных условиях стратификации. Общая продолжительность регистраций составила около 200 часов. Вариации определялись как отклонения от 20-минутного скользящего среднего. Вычислены ряды мгновенной спиральности  $He = u_i'\omega_i' = u_1'\omega_1' + u_2'\omega_2' + u_3'\omega_3$  и средние значения всей этой суммы и ее слагаемых по каждому из 12 выбранных дневных и 10 ночных 2-х часовых интервалов.

Выполнены оценки безразмерной спиральности  $\overline{He} / \overline{ab} = \text{Cos}\varphi$ , где черта сверху означает осреднение по 2-х часовому интервалу,  $\overline{a}, \overline{b}$  – это средние модули векторов  $\overline{u'}$ ,  $\overline{\omega'}$ , а  $\varphi$  – средний угол между ними. Оказалось, что этот угол отличается от 90° в среднем по всем дневным измерениям на 5 градусов, тогда как среднеквадратичное значение вариаций угла  $\varphi$  составляет несколько десятков градусов. Среднее по 12 дневным реализациям значение спиральности имеет порядок 0.2 м/сек<sup>2</sup>, а средний косинус близок к  $0,08 \pm 0,03$ . В ночное время спиральность оценивается величиной  $(0,07 \pm 0,03)$  м/сек<sup>2</sup>, а косинус близок к  $0,025 \pm 0,03$ .

Вычислены матрицы ковариаций и корреляций для перечисленных выше величин во всех парных сочетаниях и для всех выбранных дневных и ночных интервалов. Недиagonальные члены ковариационной матрицы  $u_i\omega_j$  превышают по модулю диагональные в несколько раз. Оценены аналогичные характеристики потенциального вихря  $P = (\rho / T) \cdot \omega_i \partial T' / \partial x_i$  в приближении несжимаемости.

Вычислены коспектры вариаций  $(u_i'\omega_j')$ ,  $\omega_i'G_j'$ ,  $u_i'T'$ ,  $\omega_i'T'$  в диапазоне частот  $10^{-3} - 10^1$  Hz на каждой высоте как для неустойчивой, так и устойчивой стратификации. Обсуждается систематическая ошибка, обусловленная пространственным осреднением измеряемых величин по масштабу тетраэдра (5 м и 0.7 м экспериментах 2012 и 2014 годов соответственно). Эффект осреднения проявляется в занижении значений ковариаций  $u_i\omega_j$  и в искажении соответствующих коспектров.

### Введение

Распределение по высоте температуры атмосферы в целом и ее приземного слоя в частности создается главным образом за счет поглощения длинноволнового излучения [2]. Наблюдаемое расслоение поля температуры в пограничном и приземном слое атмосферы представлены на рис. 1 и 1а. Как видно, в переходный период от неустойчивости к устойчивости температура синхронно уменьшается на всех уровнях, а вместе с тем уменьшается и амплитуда ее вариаций.

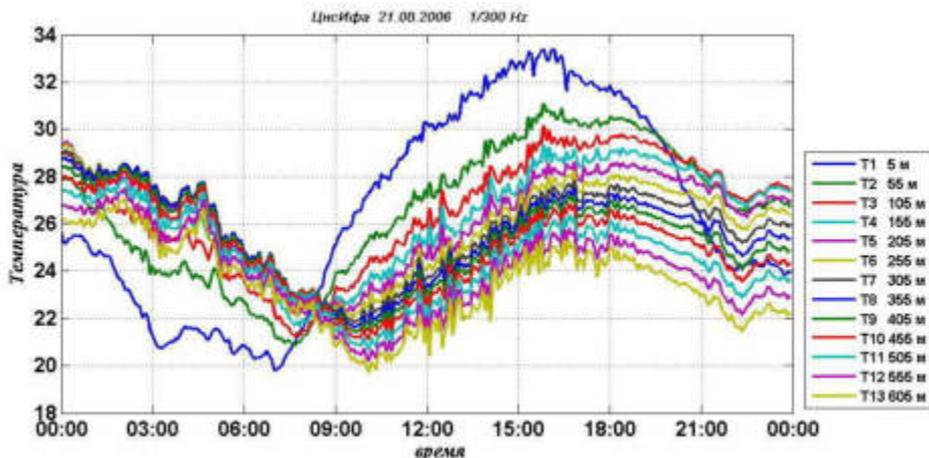


Рис. 1

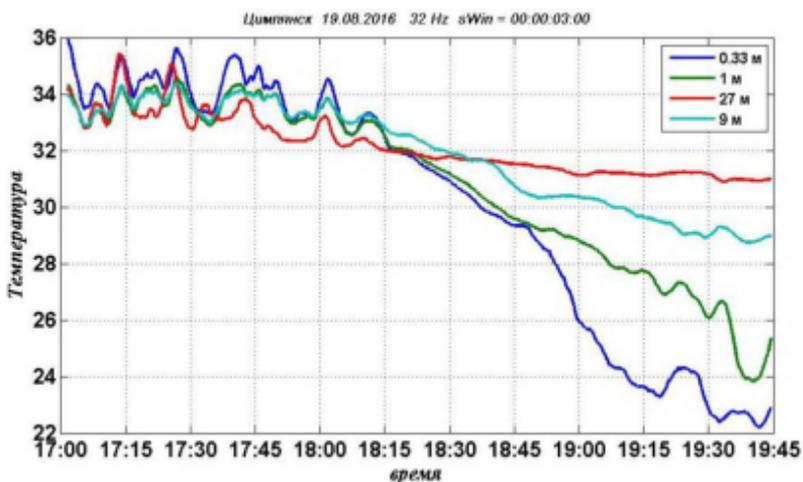


Рис. 1а

И то и другое указывает на нарушение состояния стационарности, которое является основным предположением полуэмпирической теории приземного слоя Молина-Обухова [3]. Предполагая в дальнейшем работать в рамках этой теории, мы выбирали для анализа временные интервалы, где нестационарность проявляется

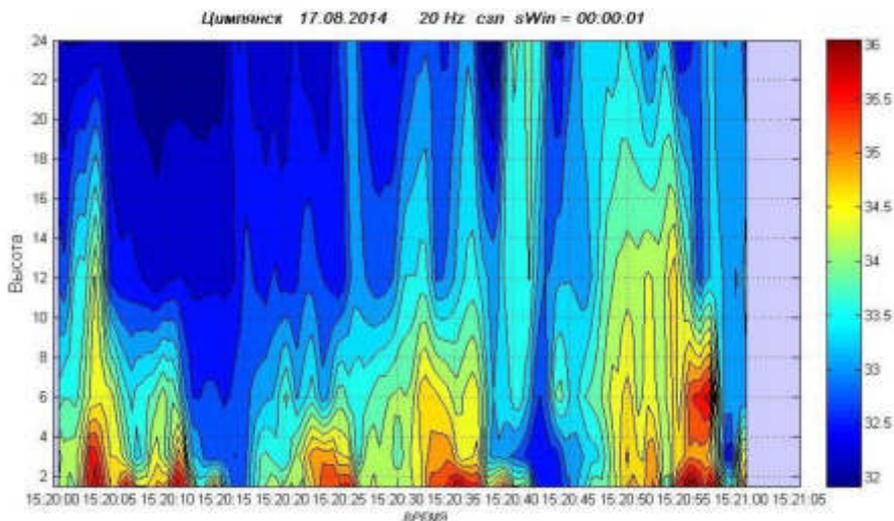


Рис. 2

в минимальной степени. В нашей работе [4] исследовалась временная изменчивость мгновенных профилей температуры и была разработана методика построения карт температуры, т. е. временной развертки высоты изотермических поверхностей. Такая карта (рис. 2) показывает, что расслоение не разрушается в стационарных условиях при наличии ветра – происходит лишь деформация изотермических поверхностей, которые должны при этом иметь вид всхолмленной равнины.

Поскольку при умеренном ветре воздух с достаточной точностью можно считать несжимаемым [3], временные вариации плотности в приземном слое определяются температурой. Изопикнические поверхности расслоенной жидкости не пересекаются в силу лагранжевой инвариантности плотности [4], поэтому не пересекаются и изотермы, так что воздух движется по изотермическим слоям.

Было введено понятие когерентной структуры как области, где температура синхронно превышает средний уровень на интервале высот порядка толщины всего приземного слоя на величину порядка ее среднеквадратичного значения. Эти структуры обладают асимметрией, выражающейся в том, что во фронтальной части наблюдается разрежение, а в их тыловой части – сгущение изотермических поверхностей. Было высказано предположение, что в силу свойства растяжения вихревых нитей [5, 6] в этой области происходит и интенсификация завихренности (ротора скорости).

Теперь мы можем проверить это предположение, исследуя потенциальный вихрь, т.е. скалярное произведение векторов ротора и градиента температуры. Напомним, что в приближении Буссинеска для потенциального вихря справедливо равенство  $\Pi = \langle \omega_i \partial \rho' / \partial x_i \rangle \approx \bar{\rho} / \bar{T} \langle \omega_i \partial T / \partial x_i \rangle$ , где по  $i$  подразумевается суммирование от 1 до 3. В идеальной жидкости потенциальный вихрь является интегралом движения [7].

### 1.5. Турбулентная спиральность и потенциальный вихрь в приземном слое атмосферы

Другим скаляром, важным для описания вихревых движений, является скалярное произведение скорости на ротор, получившее название спиральности:  $He = u_i \omega_i$ , где  $\vec{\omega} = rot \vec{u}$  .]

В крупномасштабной динамике земной атмосферы спиральность синоптических образований определяется вращением Земли. В северном полушарии спиральность циклонов и антициклонов имеет положительный знак (вращение против часовой стрелки). Такой же знак имеет и большинство (порядка 80%) мезомасштабных образований (смерчи и торнадо) северного полушария. Этот факт можно понимать так, что спиральность может иметь место и на не вращающейся планете. Таким образом, все синоптические вихри обладают спиральностью и ее знак всегда положителен, независимо от направления их вращения. Что же касается смерчей и вихрей типа "пыльных дьяволов", то они характеризуются восходящим движением, но могут иметь как правое, так и левое вращение. По-видимому, общее вращение в данном случае создает преимущество в развитии лишь тем случайно образующимся вихрям, знак спиральности которых положителен. Отметим, что у локализованных вихревых структур типа пыльных дьяволов, смерчей, торнадо векторы скорости и ротора практически коллинеарны, т. е.  $\cos\varphi = \pm 1$ .

Считается, что взаимное расположение векторов скорости и ротора, которое возникает в спиральных вихрях, уменьшает влияние вязкости на перемещение жидких частиц. Это свойство характеризуется термином "ламинаризация". Она наблюдается в течениях по трубе в районе ее изгибов. Известно также, что движение крови по артериям обладает спиральностью. Поэтому знание знака, среднего значения и характера временных вариаций спиральности весьма важно при исследовании обменных процессов приземного слоя.

В полуэмпирической теории приземного слоя Мони́на-Обухова [3] предполагается, что поворотом ветра с высотой в силу влияния ускорения Кориолиса можно пренебречь, что позволяет спиральность считать равной нулю, так что  $\overline{\cos\varphi} = 0$ . Под спиральность при этом понимается среднее значение произведения вариаций скорости и ротора в одной точке

Матрица ковариаций компонент скорости и ротора (поток вихря) в условиях приземного слоя впервые теоретически рассматривались Е.А. Новиковым [8]. Первая попытка экспериментальной проверки выводов этой работы была предпринята нами в [9]. Компоненты ротора измерялись фазовым акустическим способом как циркуляция скорости по контуру с размером 6 см по методике, предложенной В.М. Бовшеверовым [10]. Диагональные элементы ковариационной матрицы  $\overline{u'_i \omega'_j}$  не измерялись. Отметим, что вопреки предсказаниям работы [8], не равными нулю оказались не только недиагональные члены матрицы  $\overline{u'_i \omega'_j}$ , но также члены другой диагонали, т. е.  $\overline{u'_1 \omega'_3}$ ,  $\overline{u'_3 \omega'_1}$ . В работе [9] исследовались также коспектры компонент скорости и вихря и спектральные коэффициенты корреляции.

На основе схемы В.М. Бовшеверова Д.Ю. Соколовым был изготовлен двухкомпонентный циркулиметр с размером рамки около полуметра. В комбинации с расположенным рядом трехкомпонентным анемометром это позволило измерять совместно несколько компонент ковариационного тензора скорости на ротор, в

том числе и слагаемые спиральности [11], а также оценивать некоторые двухточечные моменты. Работы проводились в летнее время на высоте 46 м на Звенигородской станции ИФА. В этих первых измерениях средней спиральности в приземном слое атмосферы [11] было установлено, что  $Cos\varphi$  оценивается значением порядка нескольких сотых. Это значит, что мгновенная спиральность, т. е. произведение вариаций скорости и ротора представляет собой случайный процесс, в котором амплитуда вариаций по крайней мере на порядок больше среднего значения.

Первые совместные измерения спиральности  $He$  и потенциального вихря  $\Pi$  в приземном слое были выполнены в Цимлянской экспедиции 2012 года и описаны в [1], где дан также краткий обзор теоретических работ по спиральности. Измерения проводились с помощью установки, состоящей из четырех акустических анемометров-термометров, размещенных в вершинах прямоугольного тетраэдра, т.е. тетраэдра, в одной из вершин которого все межреберные углы прямые. Базовый анемометр находился в прямоугольной вершине на высоте 5 метров, причем расстояние между ним и каждым из оставшихся трех составляло 5 метров. Пространственные производные были заменены на разности, деленные на расстоя-

ния. Было получено, что вертикальное слагаемое спиральности  $u'_3\omega'_3$  имеет положительный знак, как и крупномасштабная спиральность циклонов и антициклонов северного полушария. Сумма же горизонтальных слагаемых, напротив, отрицательна и по модулю превосходит вертикальное, так что общая сумма получается отрицательной.

Значения ротора, используемые при вычислении ковариаций ротора и скорости, представляют собой средние значения ротора по объему с характерным размером 5 м, а в качестве скорости берется скорость в одной из вершин тетраэдра (а именно в прямоугольной вершине). И то, и другое может существенно иска-зить локальные значения ковариаций, в особенности значение ковариации  $u'_3\omega'_3$ . Возможно, что отрицательный знак спиральности в эксперименте 2012 года обусловлен именно существенным занижением вклада вертикального слагаемого спиральности  $u'_3\omega'_3$  в общую сумму.

Поэтому в 2014 году была предпринята новая попытка совместных измерений спиральности и потенциального вихря с использованием тетраэдра существенно меньшего размера (0,7 м), установленного на вершине мачты переменной высоты. Это позволило провести измерения на высотах 3,5, 13,5 и 25 м. Имея в виду установить связь между когерентными структурами и спиральностью, мы ввели в измерительную программу также измерение мгновенного профиля температуры по методике, развитой в [4, 12]. В данной статье мы уделяем основное внимание исследованию спиральности.

## 1. Измерительный комплекс

На рис. 3 показана установка “Тетраэдр” с базовым размером 0.7 м на вершине мачты “Унжа” с четырьмя анемометрами *Gill*. Чтобы минимизировать аэродинамические помехи от элементов рамы установки, была предусмотрена возможность поворота рамы на ветер – перед измерением она ориентировалась так, что-



Рис. 3

бы биссектриса прямого угла горизонтальной грани тетраэдра оказалась приблизительно на линии ветра. Для этого между вершиной мачты и рамой был установлен подшипник. Тем самым обеспечивался вынос измерительного объема вперед (против ветра) на расстояние порядка метра от основных элементов конструкции рамы.

Мгновенный профиль температуры измерялся пятью термометрами сопротивления с инерцией  $0.01 \text{ сек}$ , размещенными в логарифмической шкале между поверхностью и вершиной мачты.

Поскольку по плану дальнейшей обработки измерений предполагается исследовать реакцию “мгновенного” профиля температуры и “мгновенной” спиральности на прохождение теней кучевых облаков, в измерительный комплекс был включен датчик нисходящего потока солнечной радиации.

## 2. Регистрация и обработка данных

Регистрация велась сериями продолжительностью не менее двух часов, как в дневное, так и в ночное время. Абсолютное большинство регистраций получено в ходе измерений на высоте  $25 \text{ м}$ . Общая продолжительность регистрации за период с 4 по 22 августа превысила 100 часов. По показаниям базового анемометра вычислялось среднее направление ветра в собственной системе координат анемометров, одинаковой для всех и связанной с рамой, и производился переход к правой метеорологической системе координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль вычисленного среднего ветра. В этой системе координат и вычислялись все не-

обходимые величины – ряды вариаций компонент векторов ротора, скорости, градиента температуры и самой температуры.

Основным средством обработки получаемых данных служил созданный нами специализированный пакет программ *IfaLab* с визуальным интерфейсом, позволяющий находить не только вторые моменты, что достаточно для исследования турбулентной спиральности и потенциального вихря, но и потоки этих скаляров и другие третьи моменты. Пакет может быть настроен также на вычисление и иных функций достаточно общего вида, например, смешанных моментов любого порядка, и дает возможность исследовать связь между спиральностью и потенциальным вихрем, которая рассматривалась теоретически в ряде работ. С помощью пакета *IfaLab* выполнялись, в частности, расчеты авто- и взаимных спектров, спектральных коэффициентов корреляции и распределений вероятностей, а также температурных карт. Для получения вариаций в пакете имеется специальное средство вычитания скользящего среднего по окну заданного размера – обычно с качестве такого окна выступало окно в 20 минут.

### 3. Результаты измерений

Пример дневной реализации спиральности показан на рис. 4.

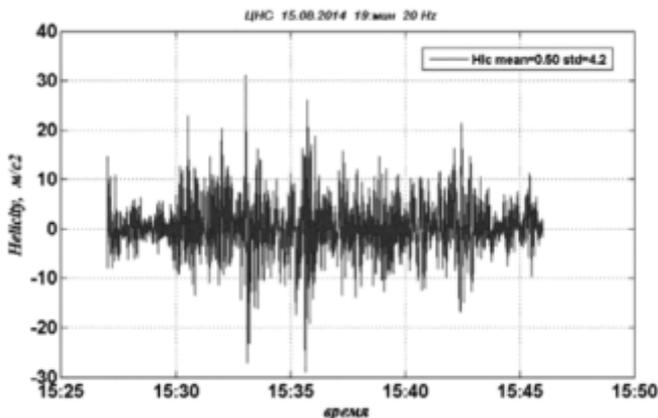


Рис. 4

Для 12 дневных и 10 ночных двухчасовых интервалов измерений на высоте 25 м были вычислены матрицы корреляций-ковариаций, соответствующие всем возможным парным сочетаниям следующих десяти параметров:

$$T', \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z, u'_x, u'_y, u'_z, G'_x, G'_y, G'_z.$$

Затем полученные матрицы были осреднены отдельно для дня (сильная неустойчивость) и для ночи (сильная устойчивость). Осредненные матрицы представлены на рис. 5 и 6.

1.5. Турбулентная спиральность и потенциальный вихрь в приземном слое атмосферы

МАТРИЦА КОВАРИАЦИЙ И КОРРЕЛЯЦИЙ. ДЕНЬ.

15.08 Серия 12 Окно выделения тренда 20 мин Интервал 14:30 – 16:30 Высота 25.1 м

*	T4	Rx	Ry	Rz	Vx	Vy	Vz	Gx	Gy	Gz
T4	-0.2946	0.1370	-0.1033	0.0116	-0.3003	-0.1212	0.1554	0.1249	0.2232	-0.1312
Rx	0.1183	4.5526	-0.4107	1.9405	-0.1421	0.9183	0.6337	0.1454	0.4631	-0.1923
Ry	-0.1124	-0.1137	2.8671	1.0271	-0.5727	0.2935	-0.2739	-0.1965	-0.1140	0.0279
Rz	0.0084	0.3570	0.2381	6.4906	-1.2915	1.3252	0.1765	0.0029	0.2374	0.0126
Vx	-0.4225	-0.0509	-0.2583	-0.3872	1.7145	-0.0782	-0.2654	0.0273	-0.1135	-0.0527
Vy	-0.1740	0.3356	0.1351	0.4055	-0.0466	1.6450	0.0540	0.0244	0.0334	-0.0181
Vz	0.4458	0.4624	-0.2519	0.1079	-0.3156	0.0656	0.4125	0.0775	0.1535	-0.0747
Gx	0.3443	0.1020	-0.1737	0.0017	0.0312	0.0285	0.1807	0.4462	0.1903	-0.1864
Gy	0.5263	0.2778	-0.0862	0.1192	-0.1109	0.0333	0.3059	0.3645	0.6106	-0.2217
Gz	-0.3813	-0.1422	0.0260	0.0078	-0.0635	-0.0223	-0.1835	-0.4402	-0.4475	0.4020

Рис. 5

МАТРИЦА КОВАРИАЦИЙ И КОРРЕЛЯЦИЙ. НОЧЬ.

11.08 Серия 16 Окно выделения тренда 20 мин Интервал 23:00 – 01:00 Высота 25.1 м

*	T4	Rx	Ry	Rz	Vx	Vy	Vz	Gx	Gy	Gz
T4	-0.0504	-0.0085	-0.0422	-0.0307	0.0759	0.0011	-0.0167	-0.0495	0.0264	-0.0318
Rx	-0.0453	0.7062	0.1637	-0.2388	0.0045	0.1817	0.0484	0.0244	-0.0507	0.0351
Ry	-0.2082	0.2159	0.8141	0.2646	-0.1707	0.0234	0.1150	0.0951	-0.0770	0.0978
Rz	-0.1256	-0.2607	0.2690	1.1881	-0.1745	-0.2493	0.0289	0.0051	-0.0856	0.0427
Vx	0.5770	0.0092	-0.3229	-0.2734	0.3431	0.0095	-0.0346	-0.0419	0.0255	-0.0187
Vy	0.0100	0.4589	0.0550	-0.4856	0.0344	0.2219	-0.0039	0.0052	-0.0062	0.0031
Vz	-0.3040	0.2347	0.5194	0.1081	-0.2405	-0.0336	0.0602	0.0217	-0.0133	0.0158
Gx	-0.6057	0.0799	0.2893	0.0129	-0.1966	0.0301	0.2428	0.1326	-0.0409	0.0578
Gy	0.3854	-0.1979	-0.2798	-0.2576	0.1430	-0.0434	-0.1779	-0.3679	0.0930	-0.0475
Gz	-0.4490	0.1326	0.3438	0.1243	-0.1011	0.0211	0.2037	0.5037	-0.4938	0.0994

Рис. 6

В наименованиях строк и колонок буквы  $R$ ,  $V$ ,  $G$  соответствуют ротору, скорости и градиенту температуры, а буквы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  указывают, какая компонента имеется в виду – по ветру, поперек ветра или в вертикальном направлении. Например,  $R_x$  – это компонента вектора  $R$  по оси  $x$ , т.е. по ветру. Диагональ матрицы представляет дисперсии, слева от диагонали даны корреляции, справа – ковариации.

Полученные данные о ковариациях компонент скорости и их корреляциях, так же как и данные о ковариациях и корреляциях скорости и температуры, согласуются с экспериментальными данными, полученными ранее в ходе многолетних исследований [13]. Ковариация  $\overline{\omega'_z T'}$  меняет знак от дня к ночи, причем соответствующий коэффициент корреляции  $r_{\omega_z T} = \overline{\omega'_z T'} / \sigma_{\omega_z} \sigma_T$  как в дневное, так и в ночное время оказался весьма незначительным по модулю в сравнении с коэффициентом корреляциями температуры с продольной и вертикальной компонентами скорости, а также с другими компонентами вектора  $\vec{\omega}$ .

#### 4. Спиральность и потенциальный вихрь

В таблице 1 приведены данные о спиральности и потенциальном вихре, полученные в ходе обработки отобранных 22 реализаций. В этой же таблице даны и соответствующие коэффициенты корреляции. Напомним, что

$$He = u'_1 \omega'_1 + u'_2 \omega'_2 + u'_3 \omega'_3 = ab \cos \varphi, \text{ где}$$

$$a = \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}, \quad b = \sqrt{\omega_1'^2 + \omega_2'^2 + \omega_3'^2},$$

Среднее значение  $\cos \varphi$  по всем избранным сериям оказалось положительным как для дневных, так и ночных реализаций и близким к  $0,08 \pm 0,03$  и  $0,025 \pm 0,008$  соответственно, причем лишь в одной дневной и одной ночной серии спиральность имела ничтожно малое значение отрицательного знака. Это значит, что среднее значение угла  $\varphi$  почти всегда меньше  $90^\circ$ : в дневное время в среднем на  $4,5^\circ$ , а в ночное – на  $1,5^\circ$ . Тот факт, что вертикальное слагаемое спиральности имеет положительный знак как при неустойчивой, так и устойчивой стратификации, согласуется с результатом 2012 года, относящимся к высоте 5 м.

Диагональные элементы ковариационной матрицы по модулю в среднем в несколько раз меньше модулей остальных членов. Это же относится и к коэффициентам корреляции  $r_{ij} = u_i \omega_j / \sigma_{u_i} \sigma_{\omega_j}$ . В то же время максимальные значения недиагональных коэффициентов корреляции по модулю превышают 0.5, т.е. сопоставимы с коэффициентами корреляции между компонентами скорости и температурой.

Интересно отметить, что среднее значение “вертикального” слагаемого спиральности  $\overline{u'_3 \omega'_3}$  в большинстве рассмотренных дневных и ночных измерений имеет положительный знак.

Ковариационная матрица  $\overline{u'_i \omega'_j}$  содержит информацию не только о средней за серию спиральности, которая представляет собой осредненное скалярное произведение вариаций скорости и ротора  $He = \overline{\vec{v}' \cdot \vec{\omega}'} = \overline{a \cdot b} \cdot \cos \varphi$ , но и о векторном произведении

$\overline{A'} = \overline{\vec{v}' \times \vec{\omega}'} = i(\overline{v'_2 \omega'_3} - \overline{v'_3 \omega'_2}) - j(\overline{v'_1 \omega'_3} - \overline{v'_3 \omega'_1}) + k(\overline{v'_2 \omega'_1} - \overline{v'_2 \omega'_1}) = a \cdot b \cdot \sin \varphi$ , поскольку слагаемые в каждой скобке этого выражения являются элементами ковариационной матрицы.

Таблица 1

День/Ночь	Дата	Секунда	Высота	Скорость ветра	$\vec{\omega}$	$\vec{u}$	$ \vec{G} $	$H = (\vec{\omega} \cdot \vec{u})$	$\frac{H}{ \vec{\omega}  \cdot  \vec{u} }$	$P = (\vec{\omega} \cdot \vec{G})$	$\frac{P}{ \vec{\omega}  \cdot  \vec{G} }$
<b>День</b>											
d	2014-08-07	08	3.5	3.1	1.14	0.867	0.236	0.022	0.0217	-0.0012	-0.0043
d	2014-08-07	20	13.1	2.3	1.13	0.792	0.505	0.071	0.0796	-0.0071	-0.0124
d	2014-08-08	12	25.1	5.9	1.92	2.039	1.070	0.399	0.1021	-0.0069	-0.0033
d	2014-08-09	12	25.1	2.9	1.55	1.985	0.856	0.499	0.1621	0.0234	0.0176
d	2014-08-10	12	25.1	3.9	1.49	1.013	0.699	0.135	0.0895	0.0095	0.0091
d	2014-08-11	08	25.1	3.8	2.21	1.201	1.420	-0.015	-0.0055	0.0362	0.0116
d	2014-08-12	05	25.1	2.6	2.27	1.465	1.303	0.211	0.0635	0.0663	0.0224
d	2014-08-15	12	25.1	5.7	3.73	1.942	1.208	0.328	0.0453	0.0440	0.0098
d	2014-08-18	12	25.1	4.9	2.03	1.164	0.743	0.012	0.0050	0.0015	0.0010
d	2014-08-19	08	25.1	4.7	1.78	1.961	0.767	0.469	0.1347	0.0137	0.0100
d	2014-08-20	04	13.1	2.1	1.12	1.692	1.153	0.287	0.1517	-0.0389	-0.0301
d	2014-08-21	08	13.1	3.5	1.16	1.031	0.825	0.142	0.1182	0.0256	0.0268
d	2014-08-22	05	3.5	2.6	2.02	1.107	1.158	0.124	0.0553	0.0539	0.0231
<b>Ночь</b>											
n	2014-08-07	32	25.1	2.7	0.58	0.416	0.299	0.014	0.0558	-0.0035	-0.0200
n	2014-08-08	20	25.1	3.2	0.37	0.254	0.306	0.001	0.0123	0.0001	0.0005
n	2014-08-09	04	25.1	2.9	0.40	0.382	0.276	0.006	0.0398	-0.0005	-0.0046
n	2014-08-09	17	25.1	5.4	1.24	0.502	0.596	0.006	0.0089	-0.0026	-0.0036
n	2014-08-10	04	25.1	5.2	0.84	0.368	0.670	0.004	0.0141	0.0009	0.0016
n	2014-08-10	16	25.1	5.1	0.50	0.285	0.555	0.004	0.0278	0.0019	0.0068
n	2014-08-11	16	25.1	4.4	1.65	0.791	0.570	0.057	0.0437	-0.0098	-0.0105
n	2014-08-15	04	25.1	3.7	1.21	0.616	0.568	0.054	0.0722	-0.0129	-0.0187
n	2014-08-17	12	25.1	7.1	2.48	1.137	0.438	0.020	0.0072	-0.0022	-0.0020
n	2014-08-18	20	25.1	5.1	1.89	0.956	0.268	0.070	0.0386	-0.0100	-0.0198
n	2014-08-19	12	13.1	3.3	0.89	0.577	0.325	0.021	0.0412	0.0016	0.0057
n	2014-08-20	08	13.1	1.5	0.16	0.132	0.189	-0.001	-0.0560	-0.0001	-0.0025

Как видно из таблицы 1, эти слагаемые всегда имеют противоположные знаки, так что модуль каждой компоненты вектора  $\vec{A}$  равен сумме модулей ее членов. В данном случае среднее “турбулентное” значение  $\sin \varphi$ , очевидно, близко к единице. В то же время, как отмечалось выше, в природе существуют локализованные вихревые структуры типа “пыльных дьяволов” или торнадо, в которых спиральность близка к единице, а векторное произведение скорости на ротор близко к нулю. Подобные структуры наблюдаются и в лабораторных экспериментах по конвекции над вращающейся нагретой плоскостью [16].

Наблюдаемое положительное при любой стратификации (и малое по абсолютной величине) значение турбулентной спиральности можно объяснить нарушением зеркальной симметрии, связанной с поворотом ветра с высотой в циклонах и антициклонах северного полушария, которые обладают положительной спиральностью. По-видимому, с этим же связан преимущественно положительный знак спиральности в торнадо северного полушария. В работе [17] указано на важность учета турбулентной спиральности в моделях атмосферного пограничного слоя.

### 5. Коспектры компонент ротора и скорости

По реализациям таблицы 1 были вычислены коспектры ротора и скорости для всех комбинаций компонент  $\vec{\omega}$  и  $\vec{u}$ . На рис. 7 и рис. 8 представлены дневной и ночной коспектры, относящиеся к реализациям, в которых безразмерная спираль-

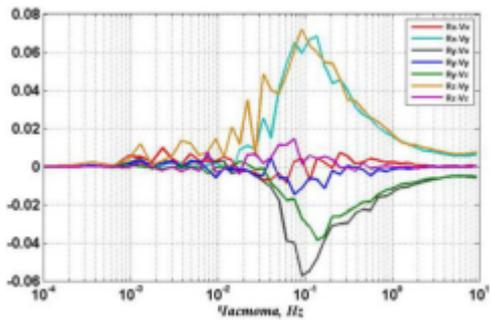


Рис. 7

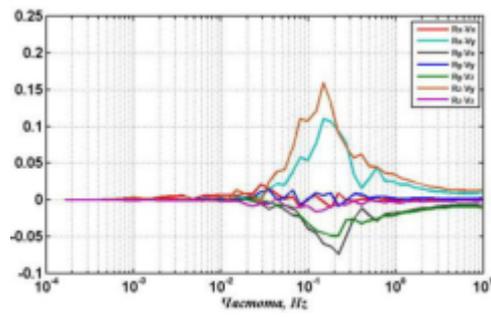


Рис. 8

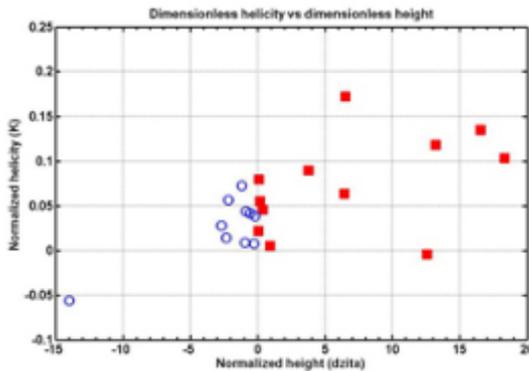


Рис. 9

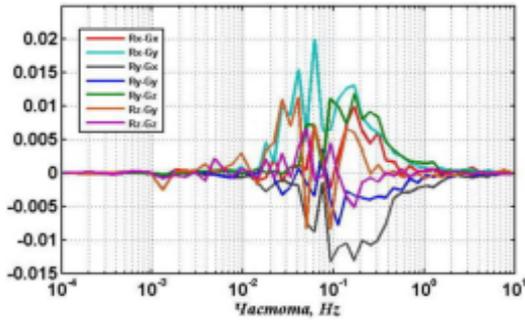


Рис. 10

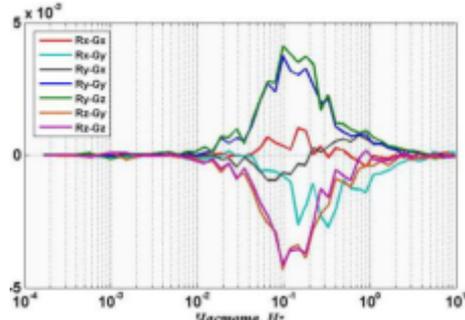


Рис. 11

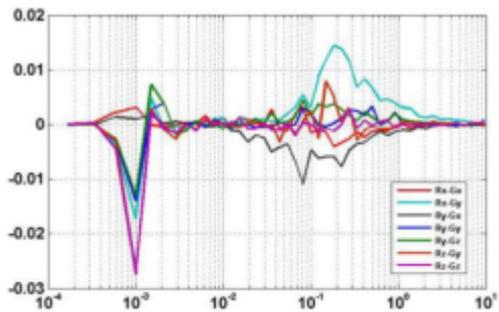


Рис. 12

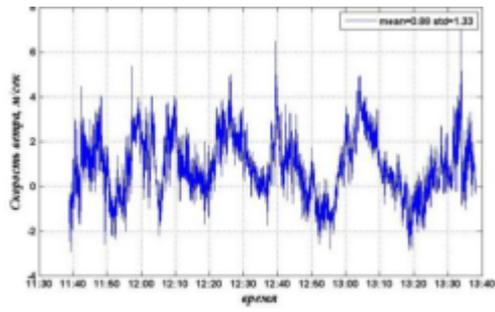


Рис. 13

1.5. Турбулентная спиральность и потенциальный вихрь в приземном слое атмосферы  
 ность ( $Cos\varphi$ ) была близка к средним значениям из таблицы 1. На этих рисунках по оси ординат отложены действительные части комплексной взаимной спектральной плотности (коспектры), умноженные на частоту, а по оси абсцисс – логарифм частоты. В таком представлении площадь под каждой кривой равна интегральному значению соответствующей ковариации. Номерами 1, 4 и 7 обозначены коспектры, относящиеся к продольному, поперечному и вертикальному слагаемым спиральности. Их сумма есть по определению коспектр спиральности. Как видим, дневные недиагональные коспектры 18 августа имеют максимум в районе  $0,1 \text{ Hz}$  и при отклонении абсциссы в обе стороны от этого значения убывают практически до нуля. Отчетливо видно, что как в дневных, так и ночных условиях все “диагональные” коспектры, (ответственные за спиральность) по модулю в несколько раз меньше любых недиагональных. Это наводит на мысль о спектре когерентности.

Максимальный положительный вклад в интегральный коспектр спиральности дает коспектр вертикального слагаемого спиральности  $R_z V_z$ , а коспектры горизонтальных слагаемых обычно малы и имеют противоположные знаки.

На результат измерения автоспектров и коспектров компонент скорости и ротора влияет главным образом пространственное осреднение по объемам датчиков скорости и ротора и их взаимное расположение, которое описывается спектральным коэффициентом передачи. Его расчеты даже для автоспектра ротора, а тем более для коспектров  $u_i' \omega_j'$  связаны с огромными трудностями. В данном случае мы попытались оценить влияние приборного осреднения путем сравнения коспектров, измеренных с использованием датчиков существенно различающегося размера (порядка  $0,7 \text{ м}$  в измерениях 2014 года и  $6 \text{ см}$  в работе 1994 года [9]). Предварительный вывод таков, что интегральное значение ковариаций в экспериментах 2014 года может быть занижено за счет приборного осреднения на величину порядка 40%. Связь между нормированной спиральностью и параметром  $\zeta$  демонстрирует рис. 9.

## 6. Коспектры компонент ротора и градиента температуры

Понятие потенциального вихря было введено в атмосферную динамику независимо Россби, Эртелем и Обуховым. Это название отражает тот факт, что неоднородность плотности жидкости может служить источником завихренности течения [6].

Среднее значение  $Cos\varphi$  для потенциального вихря по всей совокупности данных, представленных в таблице 1, составило  $+0,0065$  в дневное время и  $-0,0039$  – в ночное, так что угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{G}$  отличается от  $90^\circ$  в среднем всего лишь на десятые доли градуса.

На рис. 10 и рис. 11 демонстрируются коспектры для одной дневной и одной ночной реализации, в которых  $Cos\varphi$  был близок к упомянутому среднему значению. В отличие от коспектров слагаемых спиральности, т. е. членов основной диагонали ковариационной матрицы  $u_i \omega_j$ , ”диагональные” коспектры потенциального вихря, не всегда малы в сравнении со всеми остальными. Кроме того, на этом рисунке видно, что диагональные коспектры  $R_y G_y$ ,  $R_z G_z$  имеют близкие амплитуды

ды и противоположные знаки и компенсируют друг друга, а коспектр  $R_x G_x$  по сравнению с ними мал по амплитуде.

У некоторых коспектров между ротором и градиентом температуры наблюдается второй, низкочастотный экстремум (в данном случае отрицательный) на частоте около  $10^{-3} \text{ Hz}$ , который вносит заметный вклад в соответствующую ковариацию (рис. 12). Отметим, что фильтр, соответствующий вычитанию 20-минутного скользящего среднего, отсекает вариации с частотами ниже  $1,4 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$  и на вариации с частотой  $10^{-3} \text{ Hz}$  практически не действует. Как видим, спектральный анализ позволяет разделить волновой и турбулентный вклады в спиральность.

Было замечено, что низкочастотный максимум наблюдается в тех случаях, когда в реализациях продольных компонент скорости наблюдаются цуги квазипериодических вариаций большой амплитуды с частотой около  $10^{-3} \text{ Hz}$ . Это относится, в частности, к реализации между 11-38 и 13-38 20 августа (рис. 13). Такие вариации и ранее неоднократно отмечались в подобных условиях. Возможно, они порождаются гравитационными волнами, источниками которых в устойчиво стратифицированной атмосфере являются атмосферные фронты, и орографические возмущения.

### Заключение

1. Разработана методика и выполнены измерения общей продолжительности порядка 200 часов всех компонент векторов скорости ротора, градиента температуры, а также самой температуры по методу тетраэдра на различных высотах от 3.5 до 25 м.

2. Отобрано для анализа 12дневных и 10 ночных интервалов измерений на высоте 25 м, для которых вычислены и занесены в оперативную память синхронные текстовые файлы всех перечисленных сигналов. Это облегчает более детальную обработку в будущем.

3. Вычислены ковариационно-корреляционные матрицы между этими рядами данных для каждого из 22 выбранных интервалов.

4. Среднее значение спиральности днем оценивается как  $0.2 \text{ м/сек}^2$ , средний косинус  $0.08 \pm 0.03$ , в ночное время средний косинус близок к  $0.025$ , а спиральность – к  $(0.07 \pm 0.03) \text{ м/сек}^2$ .

5. Вычислены коспектры между вариациями всех компонент скорости и ротора.

6. Получены коспектры между компонентами ротора и градиента температуры.

7. Путем сравнения коспектров, полученных в данном эксперименте с пространственным осреднением порядка 1 метра с аналогичными коспектрами, полученными в [9] с осреднением порядка 0.1 м, оценена систематическая ошибка (занижение) интегральных значений ковариаций между компонентами скорости и ротора, обусловленная пространственным осреднением.

8. Получена зависимость безразмерной спиральности от безразмерной высоты.

### Литература

[1] Копров Б.М., Копров В.М., Курганский М.В., Чхетиани О.Г. Спиральность и потенциальный вихрь в приземной турбулентности // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 6. С. 1-11.

1.5. Турбулентная спиральность и потенциальный вихрь в приземном слое атмосферы

- [2] Фридман А.А. О распределении температуры с высотой при наличии лучистого теплообмена Земли и Солнца // Известия Главной физ. Обсерватории. 1920. №2. С. 42.
- [3] Монин А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Труды Геофиз. инст. АН СССР. 1954. Т. 24 (151). С. 163-187.
- [4] Копров Б.М., Копров В.М., Макарова Т.И. Конвективные структуры приземного слоя воздуха // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2000. Т. 36. № 1. С. 34-44.
- [5] Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: University Press, 1970.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 735.
- [7] Должанский Ф.В. Основы геофизической гидродинамики / Под общ. ред. Е.Б. Гледзера. ФИЗМАТГИЗ, 2011. С. 264.
- [8] Новиков Е.А. Поток вихря // Изв. АН СССР. 1972. Е. 8. № 7. С. 459-462.
- [9] Копров Б.М., Калугин В.В., Тиме Н.С. Турбулентный поток вихря // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. № 1. С. 13-17.
- [10] Бовшеверов В.М., Гурвич А.С., Кочетков А.М., Ломадзе С.О. Измерение частотного спектра мелкомасштабной циркуляции скорости в турбулентном потоке // Изв АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7. № 4. С. 371-376.
- [11] Копров Б.М., Копров В.М., Пономарев В.М., Чхетиани О.Г. Измерение турбулентной спиральности в пограничном слое атмосферы // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 5. С. 627-630.
- [12] Koprov B.M., Zubkovsky S.L., Koprov V.M., Fortus M.I., Makarova T.I. Statistics of Air Temperature Spatial Variability in the Atmospheric Surface Layer // Boundary-layer meteorology. 1998. V. 88. P. 399-423.
- [13] Kaimal J.C., Wyngaard J.C., Izumi Y. Spectral characteristics of surface-layer turbulence // Quart. J. R. Met. 1972. V. 98. P. 563-589.
- [14] Boubnov V.M., Golitsyn G.S. Convection in Rotating Fluids. Dordrecht. Kluwer Ac. Publ. 1995.
- [15] Белян А.В., Мусеев С.С., Чхетиани О.Г. О турбулентной вязкости в спиральной турбулентности // ДАН. 1994. Т. 334(1). С. 41-43.

## 1.6. Явления обратного каскада в турбулентности со спиральностью

*Е.Б. Гледзер<sup>1</sup>, О.Г. Чхетиани<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Институт космических исследований РАН*

В настоящем разделе рассмотрены взаимодействия в гидродинамической турбулентности, которые нарушают симметрию положительных и отрицательных компонент спиральности в поле скоростей. В идеальном случае, когда одна из компонент полагается равной нулю, в рассматриваемой системе возникает два знако-определенных интеграла движения, которые приводят к явлению обратного каскада энергии, подобно тому, как это происходит в случае двумерной турбулентности. В этой связи с использованием квазинормального приближения рассматривается генерация крупномасштабных движений, проявляющаяся как неустойчивость парных моментов. Этот механизм обсуждался в 90-е годы. Решающим пунктом данного механизма является присутствие в турбулентности с крупномасштабными спиральными возмущениями спиральности (и энергии) на мелких масштабах. Возможность возбуждения крупномасштабных движений в том случае, когда присутствуют и положительная и отрицательные компоненты спиральности рассмотрена в рамках каскадной модели турбулентности с анализом разных типов взаимодействий между уровнями. Во всех рассмотренных случаях обнаруживается появление явлений обратного каскада при превышении пороговых значений для крупномасштабных спиральных шумов. Величина порога зависит от степени «перемешивания» спиральных компонент поля скорости разных знаков.

### Введение

Возможность обращения каскада энергии в трехмерной несжимаемой жидкости вследствие нарушения зеркальной симметрии движений и соответствующей генерации спиральных возмущений во всем диапазоне масштабов стала обсуждаться с начала 70-х годов. Внимание к спиральности как к фактору самоорганизации гидродинамических течений впервые было отмечено в [1, 2]. Так в [1] рассматривалось взаимодействие двух спиральных волн и использовался термодинамический подход. Было отмечено, что (в этом подходе) при наличии спиральности нет состояний с отрицательной температурой, как это было получено ранее в двумерном случае, однако, происходит перераспределение энергии в сторону крупных масштабов по сравнению со случаем нулевой спиральности. В [2] была предложена модель, связывающая развитие вихревых образований типа тропического циклона с крупномасштабной неустойчивостью в спиральной турбулентности. Подобные идеи на качественном уровне обсуждались в [3]. Отметим рассмотрение в [4] триадных взаимодействий спиральных мод с точки зрения возможностей обратного каскада.

Действительно, турбулентные каскады при наличии спиральности могут быть как в форме параллельных каскадов энергии и спиральности в сторону малых масштабов с одинаковым наклоном спектра в  $-5/3$ , так и спиральный обратный

каскад с наклоном  $\sim 7/3$  без диссипации энергии [5]. Подобные типы каскадов наблюдаются в ряде случаев в атмосферных и МГД течениях [6] и, в частности в мезомасштабной турбулентности в предтайфунных условиях [7].

Спиральность развивается в турбулентных течениях в присутствии вращения сдвигового течения, внешнего магнитного поля [8, 9, 10]. Она является характерным свойством множества атмосферных и техногенных течений [11]. К примеру, спиральностью обладают экмановское течение [12, 13], валиковая циркуляция [14] и турбулентность в атмосферном пограничном слое [15, 16, 17]. Обратный каскад энергии со спиральностью и самоорганизация в трехмерной турбулентности исследовался в [1, 4]. Численные и лабораторные МГД эксперименты демонстрирующие проявления обратного каскада были выполнены в [8, 18, 19].

В дополнение к прямым численным исследованиям эффектов спиральности в трехмерных турбулентных течениях существует несколько основных подходов в том случае, когда уравнения имеют знако-определенный невязкий интеграл движения. В первой из работ на эту тему крупномасштабные, как предполагалось, возникали в ходе развития неустойчивости изотропной неосесимметричной турбулентности [20]. Соответствующая теория была основана на квазинормальном приближении для статистики поля скоростей. Уравнения, описывающие систему были получены для моментов второго порядка в однородной спиральной турбулентности. Рассматривалась эволюция слабых крупномасштабных неоднородных возмущений, развивающихся на фоне однородной турбулентности.

Следует отметить, что гипотезы о квазинормальности пульсаций, включая гипотезу (приближение) Миллионщикова, оказываются неприменимыми для турбулентных потоков при больших числах Рейнольдса с развитым инерционным интервалом при рассмотрении спектров и характеристик перемежаемости только в этом диапазоне масштабов. Традиционная проблема в применимости этой гипотезы состоит в возможности появления областей с отрицательной энергией, которые получались при численных расчетах довольно давно. В используемом здесь подходе, как и в [21] гипотеза квазинормальности не приводит к подобным трудностям. Это достигается выбором из возможных решений, описывающих возбуждение крупномасштабных мод только с положительно определенной энергией и удовлетворяющим также хорошо-известному неравенству со спиральностью.

В другом подходе используется разложение по собственным функциям оператора ротора с коэффициентами для положительных и отрицательных компонент спиральности [4, 22]. Подобное представление впервые было рассмотрено А.Крайя в 1958 г. (см. [23]). Выделяется 4 разных типа взаимодействий между спиральными компонентами разных знаков (если учитывать смену знаков спиральности, то взаимодействий будет 8 [24]). Некоторые из этих взаимодействий могут представлять собой процессы обратного каскада энергии, например, взаимодействия спиральных мод одного знака. В численных экспериментах в [25] было показано, что при ограничении взаимодействиями спиральных мод только одного знака возникает обратный каскад энергии подобно тому, который наблюдается в двумерной турбулентности. Результаты с внешним параметром, контролирующим смешивание между количеством положительно и отрицательно поляризованных спиральных мод представлены в [26].

Другой широко используемый здесь подход – это каскадные модели турбулентности с комплексной модификацией (модели GOY) [27–29] и уравнения с упрощенным взаимодействием только соседних уровней [30]. Подобные модели используются для исследования эффектов перемежаемости, аномальных скейлингов для высших моментов. В то же время они также описывают спектральные распределения энергии и спиральности и соответствующие потоки.

Во 1-ом разделе подход, предложенный в [20], модифицирован для использования в Фурье-пространстве. Для замыкания используется гипотеза Миллионщикова, согласно которой моменты четвертого порядка представляются в виде суммы произведений парных моментов. Мы получаем уравнения, которые описывают крупномасштабную неустойчивость в спиральной турбулентности, рассмотренную ранее в [20, 21]. Значения масштабов для основной турбулентности и растущих возмущений были найдены численно и аналитически. Инкремент неустойчивости зависит от распределения по масштабам невозмущенной спиральной турбулентности.

Похожий сценарий неустойчивости обнаружен и в численном исследовании каскадной модели, представленном в 3 секции. Анализируются трехмодовые взаимодействия о определены их типы, ответственные за генерацию крупномасштабных структур. Предметом основного исследования являются мгновенные и усредненные потоки энергии и спиральности. В ранее опубликованном исследовании авторов рассматривались только спектральные распределения, демонстрирующие рост крупномасштабной составляющей при наличии шумов на промежуточных масштабах. Далее в 4 секции это явление исследуется анализом трехмодовых взаимодействий, полученных путем разложения поля скоростей на положительно и отрицательно определенные по знаку спиральности (здесь мы следуем подходу, предложенному в [4, 22]). Сами уравнения взаимодействий получены из уравнений каскадной модели. Определена подсистема, ответственная за генерацию крупномасштабных возмущений. В заключении обсуждаются полученные результаты.

## 1. Неустойчивость вторых моментов в спиральной турбулентности

Как мы уже упоминали выше, линейная устойчивость парных корреляционных моментов поля скорости по отношению к слабым неоднородным случайным возмущениям исследовалась в [20]. Общее поле скорости  $u_i(\mathbf{x}, t)$  при этом представлялось как  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^1$ . Здесь  $\mathbf{u}^0$  представляет собой изначально однородную турбулентность, а  $\mathbf{u}^1$  – малое возмущение турбулентного поля. Основная переменная, используемая для анализа задачи это двухточечные моменты второго порядка

$$Q_{ij}^{10}(\xi, \tau; \mathbf{x}, t) = \langle u_i^1(\mathbf{x} + \xi, t + \tau) u_j^0(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Энергия и спиральность будут соответственно

$$E = Q_{ii}^{10}(\xi, \tau; \mathbf{x}, t), H = \varepsilon_{ipk} \frac{\partial}{\partial \xi_p} Q_{ki}^{10}(\xi, \tau; \mathbf{x}, t).$$

Для них была получена система уравнений:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \bar{\nu} \Delta_{\xi} \right) E - \alpha H = A_1, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \bar{\nu} \Delta_{\xi} \right) H + \alpha \Delta_{\xi} E = A_2.$$

Здесь  $\alpha$  пропорциональна средней спиральности турбулентности  $H_0 = \langle \mathbf{u}^0 \nabla \times \mathbf{u}^0 \rangle$  и времени релаксации  $\tau^* = L_{tur} / E_{tur}^{1/2}$  (которое оценивается как отношение интегрального масштаба турбулентности и среднеквадратичной скорости):

$$\alpha \sim H_0 \tau^* = \frac{H_0 L_{tur}}{E_{tur}^{1/2}}. \quad (1)$$

$\bar{\nu}$  – турбулентная вязкость. Правые части системы (1)  $A_1$  и  $A_2$  содержат вклад от более высоких порядков теории возмущений. Здесь используется подход, основанный на диффузионном приближении Орзага [31]: как правило, уравнения для парных моментов включают третьи моменты. Четвертые моменты, возникающие в уравнении для третьих моментов представляются в соответствии с гипотезой Миллионщикова как комбинации произведений парных моментов, в то время как производная по времени исключается использованием эффективного времени релаксации  $\tau^*$ .

Как нетрудно видеть, система (1) имеет неустойчивые решения: в спектральном представлении при  $k \rightarrow 0$  инкремент неустойчивости имеет вид  $\lambda = |\alpha| k$ . Стоит отметить, что неустойчивость происходит на масштабах, больших, чем масштабы невозмущенной турбулентности [20].

Здесь мы придем к этой неустойчивости, также используя близкую гипотезу квазинормальности в Фурье-представлении. Поскольку мы интересуемся поведением системы на крупных масштабах, то мы пренебрегаем влиянием молекулярной вязкости. Стартуя от спектральных функций

$$\langle u_i(\mathbf{k}, t) u_j(\mathbf{k}_1, t) \rangle = F_{ij}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1), \quad F_{ij}(\mathbf{k}, t) = F_{ji}(-\mathbf{k}, t),$$

применяя соотношения вида  $\frac{d^2(uu)}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot u + 2 \frac{du}{dt} \cdot \frac{du}{dt} + u \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}$  и разлагая моменты четвертого порядка на произведения парных моментов, мы получаем уравнений для второй производной спектральной функции  $F_{ij}$ :

$$\frac{d^2 F_{ij}(\mathbf{k}, t)}{dt^2} = R_{ij}(\mathbf{k}) + \tilde{R}_{ij}(\mathbf{k}), \quad R_{ij}(\mathbf{k}) = \Delta_{imn}(\mathbf{k}) \Delta_{jps}(\mathbf{k}) I_R, \quad I_R = \int F_{mp}(\mathbf{q}) F_{ns}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d\mathbf{q},$$

$$\tilde{R}_{ij}(\mathbf{k}) = T_{ij}(\mathbf{k}) + T_{ji}(-\mathbf{k}), \quad T_{ij}(\mathbf{k}) = \Delta_{imn}(\mathbf{k}) F_{pj}(\mathbf{k}) I_T, \quad I_T = \int \Delta_{mps}(\mathbf{q}) F_{ns}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) d\mathbf{q}, \quad (2)$$

$$\Delta_{imn}(\mathbf{k}) = k_m \Delta_{in}(\mathbf{k}) + k_n \Delta_{im}(\mathbf{k}), \quad \Delta_{in}(\mathbf{k}) = \delta_{in} - k_i k_n / k^2, \quad k = |\mathbf{k}|.$$

Правая часть первого уравнения (2) содержит члены  $T_{ij}(\mathbf{k})$ ,  $T_{ji}(-\mathbf{k})$ , пропорциональные  $F_{pj}(\mathbf{k})$  и  $F_{pi}(-\mathbf{k})$ , которые могут вести к экспоненциальной неустойчивости, описанной выше.

Система уравнений (2) имеет тот же порядок сложности, как и начальное Фурье-представление. Рассмотрим влияние на крупномасштабную турбулентность с волновыми числами  $k$  мелкомасштабных возмущений, расположенных в сферическом слое  $Q_0 - \Delta Q < q < Q_0 + \Delta Q$ . Соответственно,  $q: Q_0$ , а  $k = Q_0$  (рис. 1).

Здесь мы разделяем по масштабам внешнюю мелкомасштабную турбулентность с волновыми числами  $Q_0$  от возможно сгенерированной в ходе развития неустойчивости турбулентности с волновыми числами  $k$ . Для учета взаимодействий между растущими возмущениями с волновыми числами  $k$  нам необходимо рассмотреть интегрирование произведений вида  $T_{ij}(\mathbf{k})$ ,  $T_{ji}(-\mathbf{k})$  в области  $q < k_0$ ;  $k$ . Соответственные интегралы представляются как

$$\int \dots d\mathbf{q} = \int_{q: Q_0} \dots d\mathbf{q} + \int_{q < k_0} \dots d\mathbf{q}.$$

Первый член в правой части (2)  $R_{ij}(\mathbf{k})$  пропорционален квадрату волнового числа  $k^2$  и содержит интеграл от квадрата мелкомасштабного спектра  $F_{mp}(\mathbf{q})F_{ns}(-\mathbf{q})$ ,  $q < Q_0$ . Его действие аналогично внешней силе и не ведет к неустойчивости.

Решение уравнения (2) в случае спиральной турбулентности может быть представлено в виде:

$$F_{ij}(\mathbf{k}, t) = \Delta_{ij}(\mathbf{k})F(k, t) + \varepsilon_{ij}k_l H(k, t). \quad (3)$$

Представляя  $\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{k}$  запишем  $\Delta_{mps}(\mathbf{q})$  в (2) для  $q : Q : Q_0$ ,  $k = Q_0$  как:

$$\Delta_{mps}(\mathbf{Q} - \mathbf{k}) \approx \Delta_{mps}(\mathbf{Q}) - k_\alpha \frac{\partial \Delta_{mps}(\mathbf{Q})}{\partial Q_\alpha} + \frac{1}{2} k_\alpha k_\beta \frac{\partial^2 \Delta_{mps}(\mathbf{Q})}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}.$$

Функция  $\Delta_{mps}(\mathbf{q})F_{ns}(\mathbf{q} + \mathbf{k})$  в области интегрирования  $q < k_0$ ;  $k$  записывается как:

$$\Delta_{mps}(\mathbf{q}) \left( F_{ns}(\mathbf{k}) + q_\alpha \frac{\partial F_{ns}(\mathbf{k})}{\partial k_\alpha} \right).$$

Нам необходимо провести интегрирование по угловым переменным  $\mathbf{Q} = Q \cos(\theta)$ ,  $Q \sin(\theta) \sin(\varphi)$ ,  $Q \sin(\theta) \cos(\varphi)$ , где  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ , и выполнить похожую процедуру для  $\mathbf{q}$ . Члены с нечетными степенями  $Q_\alpha$  и  $q_\alpha$  обращаются в 0 после интегрирования.

Для величин  $F(k, t)$ ,  $H(k, t)$  мы получаем:

$$\frac{d^2 F(k, t)}{dt^2} = -F \left[ f k^2 + I_0 \frac{d(k^5 F)}{k^4 dk} \right] - g k^4 H + k^2 C_0, \quad I_0 \sim k_0^5,$$

$$\frac{d^2 H(k, t)}{dt^2} = -H \left[ f k^2 + I_0 \frac{d(k^5 F)}{k^4 dk} \right] + F \left[ g k^2 + I_0 \frac{d(k^2 H)}{k dk} \right], \quad (4)$$

$$f = \frac{8\pi}{5} \int_{Q-Q_0} F(Q) Q^2 dQ, \quad g = \frac{12\pi}{5} \int_{Q-Q_0} H(Q) Q^2 dQ,$$

где постоянная  $I_0$  пропорциональна интегралу  $\int_{q \leq k_0} q^4 dq$ , а постоянная  $C_0$  возникает из первого члена  $R_{ij}(\mathbf{k})$  в правой части (2) и пропорциональна интегралам  $Q^2 F^2(Q)$  и  $Q^4 H^2(Q)$  по переменной  $Q : Q_0$  (здесь входят квадраты  $F$  и  $H$ , в отличие от их первых степеней в  $f$  и  $g$  в (4)).

Дробные коэффициенты в (4) возникли после интегрирования по угловым переменным. Точные значения коэффициентов в  $I_0$ ,  $C_0$  не важны для зависимостей от размерных параметров  $f$ ,  $g$ . Величины  $f$  и  $g$  задают внешние мелкомасштабные воздействия. При этом,  $5f/2$  является энергией внешней турбулентности

$$E_{ext} = \frac{1}{2} \int F_{ii}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 4\pi \int F(Q) Q^2 dQ = \frac{5}{2} f, \quad Q = |\mathbf{Q}|, \quad (5)$$

в то время как величина  $g$  не является спиральностью, которая имеет вид:

$$H_0 = \int \varepsilon_{ijl} Q_l F_{ji}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 8\pi \int H(Q) Q^4 dQ.$$

Поскольку слой интегрирования узкий:  $Q_0 - \Delta Q < Q < Q_0 + \Delta Q$ ,  $\Delta Q = Q_0$ , то мы получаем соотношение между спиральностью и параметром  $g$  в (4):

$$g \approx 10H_0/(3Q_0^2). \quad (6)$$

Поскольку, спиральная турбулентность при всех  $k$  удовлетворяет условию

$$F(k, t) > 0, \quad k |H(k)| < F(k), \quad (7)$$

то мы получаем:

$$|g| < \frac{12\pi}{5} \int |H(Q)| Q^2 dQ < \frac{3f}{2Q_0}, \quad (8)$$

где предполагается интеграл  $\int_{Q: Q_0} \dots dQ$ . При  $k = Q_0$  из (8) получим

$$\frac{|g|k}{f} = 1. \quad (9)$$

Рассмотрим три упрощенные модели, следующие из (4).

**Случай (А).** Оставляются только линейные по  $F$ ,  $H$  члены в (4). Для  $C_0 = 0$ , соответствующего  $R_{ij}(\mathbf{k}) = 0$  in (2), мы получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(k, t)}{dt^2} &= -Ffk^2 - Hgk^4, \\ \frac{d^2 H(k, t)}{dt^2} &= -Hfk^2 + Fgk^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассматривая экспоненциально растущие  $F$ ,  $H$ :  $\exp(\lambda t)$ ,  $\text{Re}[\lambda] > 0$ , мы получаем выражение для инкремента:

$$\lambda^2 = -fk^2 \pm igk^3, \quad \frac{\lambda}{k} \approx \pm if^{1/2} + \frac{gk}{2f^{1/2}}. \quad (11)$$

Последнее приближение справедливо при условии (9). Как видно из (11), инкремент роста крупномасштабных возмущений пропорционален  $\frac{k|g|}{f^{1/2}}$ . В терминах параметров  $H_0$  и  $E$ :  $f$  имеет вид:

$$\frac{k|g|}{f^{1/2}} \sim \frac{H_0 |Q_0|^{-1} k}{E^{1/2} Q_0}. \quad (12)$$

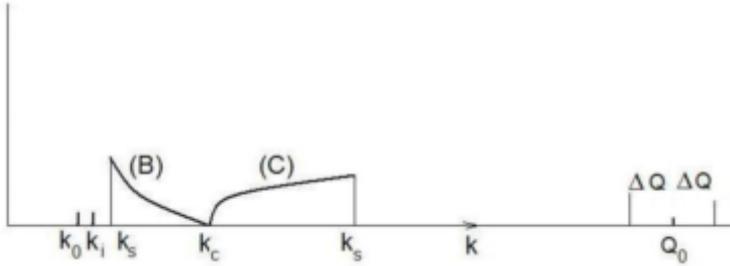


Рис. 1. Размещение волновых чисел и схематическое представление функций  $F_0$  (13) и  $q_0 k_i^{-1/2} (k - k_c)^{1/2}$  (24) для решений (B) и (C)

Полученное выражение оказывается близким по форме  $\alpha$  в (1), если  $E_{tur}$  и  $L_{tur}$  идентифицировать как  $E$ :  $f$  и  $Q_0^{-1}$ , соответственно, и учесть также, что генерируемый и генерирующий масштабы заранее разнесены – множитель  $\frac{k}{Q_0}$ .

Однако, (11) не может рассматриваться как решение для спектральных функций  $F$  и  $H$ , поскольку спектр энергии  $F(k)k^2$  не может быть отрицательным. В то время  $F$  и  $H$  оказываются осциллирующими, что следует из второй формулы в (11).

Следовательно, нам нужно найти решения (4), удовлетворяющие (7). Подобные решения могут быть найдены, если мы извлечем стационарные решения для  $F$  и  $H$  из (4) и проанализируем их устойчивость.

Случай (B). Нелинейная модель. Как и в предыдущем случае (A) мы полагаем  $S_0 = 0$  и пренебрегаем членом  $gk^4 H$  в (4) (что справедливо для (9)). Вместе с волновым числом  $k_0$ , определяющим  $I_0$  в (4), вводится волновое число  $k_c$ ,  $k_c > k_0$  (рис. 1).

Для получения стационарных решений (4) необходимо обратить выражения в квадратных скобках в 0 при  $k < k_c$  ((B) рис. 1). Решение с  $F > 0$  будет

$$F_0(k) = \frac{fk_c^2}{7I_0} \left[ \left( \frac{k_c}{k} \right)^5 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right], \quad H_0(k) = \frac{gk_c^2}{4I_0} \left[ \left( \frac{k_c}{k} \right)^2 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

При  $k \rightarrow k_c$ , условие  $k_c |H_0| < F_0$  сводится к

$$\frac{|g|k_c}{f} < 1, \quad (14)$$

которое справедливо для  $|g| < f/Q_0$  и  $k_c = Q_0$ .

Решение (13) дает  $E_s$  при  $k < k_c$ . Если мы примем, что основной внешний приток энергии  $E_{ext}$  происходит в слое  $Q_0 - \Delta Q < q < Q_0 + \Delta Q$ , то энергия из решения (13) должна быть по меньшей мере меньше, чем энергия  $E_{ext}$  (5) в этом диапазоне волновых чисел ( $E_c < E_{ext}$ ). Ограничиваясь волновым числом  $k_s$ ,  $k_s < k_c$  ((B) на рис. 1), с соответствующей энергией

$$E_s = 4\pi \int_{k_s}^{k_c} F_0(k) k^2 dk,$$

мы получим условие  $E_c < E_{ext}$  для  $k_s$  в переменных  $x_s$ ,  $\frac{k_c}{k_s} = \exp(x_s)$  с  $x_s \rightarrow 0$ :

$$\frac{fk_c^2}{7I_0} \int_{k_s}^{k_c} (k_c^5 k^{-3} - k^4 k_c^{-2}) dk < \frac{2}{5} f, \quad x_s < \frac{7}{5} \frac{k_0^5}{k_c^5}. \quad (15)$$

Решение (13) находится на масштабах  $k_s < k < k_c$  ((В) на рис. 1): в  $x$ -переменных  $\frac{k_c}{k} = \exp(x)$  – при  $0 < x < x_s$ . Если  $k_0 < k_c$ , то это значит  $x = 1$  и, следовательно энергия  $E_c$  представляет собой шум по сравнению с основной внешней энергией  $E_{ext}$ ,  $E_c = E_{ext}$ .

Решения (4) рассматриваются в виде  $F = F_0 + F'$ ,  $H = H_0 + H'$ . Перейдя к переменной  $x$  в

$$F = \frac{fk_c^2}{I_0} (\varphi_0 + \Phi e^{5x}), \quad H = \varepsilon \frac{fk_c}{I_0} (\psi_0 + \Psi e^{2x}), \quad (16)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{7} (e^{5x} - e^{-2x}), \quad \psi_0 = \frac{1}{4} (e^{2x} - e^{-2x}),$$

мы получим уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \phi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\varepsilon^2 e^{-7x} \Psi + e^{5x} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \phi_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \psi_0 e^{3x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e^{5x} (\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}).$$

В (16),(17)

$$\varepsilon = \frac{gk_c}{f}, \quad \tau = (fk_c^2)^{1/2} t. \quad (18)$$

При  $x \rightarrow 0$ , т.е. при  $k \rightarrow k_c$ , когда  $\phi_0 \rightarrow x$ ,  $\psi_0 \rightarrow x$ , линейные члены в (17) дают экспоненциально растущее решение

$$\Phi = x^\alpha A_f \exp(\lambda \tau), \quad \Psi = x^\alpha A_h \exp(\lambda \tau), \quad (19)$$

где

$$(\lambda^2 - \alpha) A_f = -\varepsilon^2 A_h, \quad ((\lambda^2 + \alpha) A_h = \alpha A_f, \quad (20)$$

$$\lambda = |\varepsilon| C_\lambda, \quad \alpha = \varepsilon^2 C_\alpha, \quad C_\lambda = (C_\alpha^2 - C_\alpha)^{1/4}.$$

$A_f$  и  $A_h$  связаны друг с другом как

$$A_h = \frac{1}{(1 - 1/C_\alpha)^{1/2} + 1} A_f,$$

представляют собой малые начальные возмущения.

Малый параметр  $\varepsilon$  в (16), (18) определяет относительную роль внешней спиральности при волновых числах  $k < k_c = Q_0$ . В соответствии с (9)  $|\varepsilon| = 1$ . При  $C_\alpha > 1$ , возмущения растут экспоненциально:

$$\lambda \tau = t \cdot \frac{|g| k_c^2}{f^{1/2}} C_\lambda. \quad (21)$$

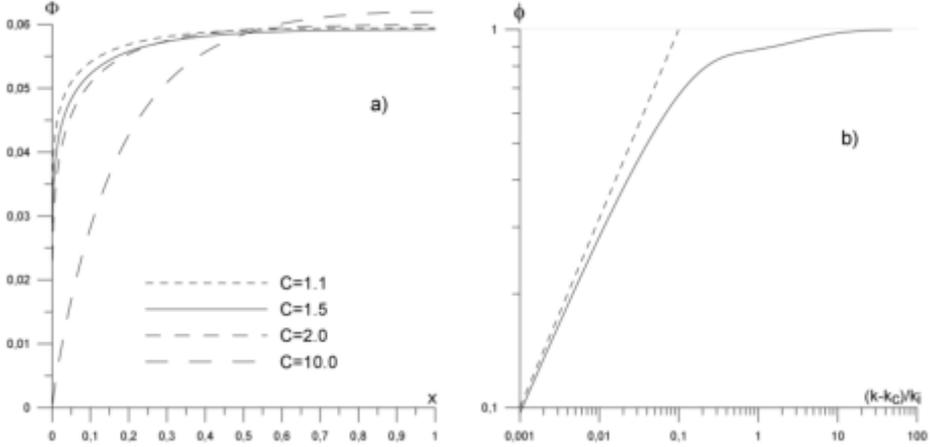


Рис. 2. а). Функция  $\Phi$  в решении 17) при  $\tau = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $C_\alpha = 1.1; 1.5; 2.0; 10.0$ ;

б). Функция  $\phi$  стационарного решения (23) для  $\frac{k_c}{k_i} = 5.0$

Решение для спиральности  $\Psi$  с амплитудой  $A_h$ , представленное в (19), существует, если  $C_\alpha > 1$ , что также определяет и существование положительных значений для  $\lambda$ .

Асимптотическое решение (17) при  $x \rightarrow 0$  обеспечивает выше указанное условие малости энергии крупномасштабных возмущений  $E_c = E_{ext}$ . Произвольность постоянной  $C_\alpha > 1$  в (19), (20) отражает тот факт, что мы используем только условие регулярности при  $k \rightarrow k_c$  ( $x \rightarrow 0$ ). Величина (или порядок)  $C_\alpha$  (определяется формой решения при  $x \rightarrow 0$ ). Вследствие экспоненциальной зависимости от времени решение  $\Phi(x, \tau)$  в точке  $x$  имеет вид (из (19), (20))

$$\Phi(x, \tau) = A_f \exp\left(|\varepsilon| C_\alpha^{1/2} (1 - C_\alpha^{-1})^{1/4} \tau - \varepsilon^2 C_\alpha \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Отсюда, время  $\tau = \tau_x$  при котором  $\Phi(x, \tau) = A_f$  определяется как

$$\tau_x = |\varepsilon| \ln(1/x) \left( \frac{C_\alpha^3}{C_\alpha - 1} \right)^{1/4}.$$

Функция от  $C_\alpha$  в скобках имеет минимум при  $C_\alpha = 1.5$ , т.е. возмущения для  $\Phi(x, \tau)$  имеют максимальный рост при  $C_\alpha = 1.5$  с учетом вида  $\Phi(x, \tau)$  при  $x \rightarrow 0$ .

Асимптотическое решение при  $x \rightarrow 1$  было представлено в [21]. Численное решение (17) при  $C \equiv C_\alpha = 1.1; 1.5; 2.0; 10.0$  в момент времени  $\tau = 0.7$  показано на рис. 2а. Видно, что амплитуды при  $C_\alpha : 1.1 \div 2$  при  $x \rightarrow 0$  существенно больше чем для  $C_\alpha : 10$ .

**Случай (С).** Полная модель (4) (с  $C_0 > 0$ ). Для ее исследования мы введем волновое число  $k_i$  and и безразмерные функции  $\phi(k, t)$ ,  $\psi(k, t)$ :

$$k_i^2 = \frac{C_0 I_0}{f^2}, \quad F = \frac{C_0}{f} \phi, \quad H = \frac{g}{f} \frac{C_0}{f} \psi. \quad (22)$$

Также введем безразмерное время  $\tau$ , масштаб  $q$  и параметр  $\varepsilon$

$$\tau = \left(\frac{4}{3} k_i^2 f\right)^{1/2} t, \quad \varepsilon = \frac{g k_i}{f}, \quad q = \frac{k}{k_i},$$

Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} &= -\phi(q^2 + 5\phi + q \frac{\partial \phi}{\partial q}) - \varepsilon q^4 \psi + q^2, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= -\psi(q^2 + 5\phi + q \frac{\partial \phi}{\partial q}) + \phi(q^2 + 2\psi + q \frac{\partial \psi}{\partial q}). \end{aligned} \quad (23)$$

Решение системы (23) ищется в форме ряда по  $k \rightarrow k_c$ , где  $k_c$  крупномасштабное волновое число для  $k > k_c$  ((C) на рис. 1):

$$\begin{aligned} \phi &= (q_0 + A(\tau)) \left(\frac{k - k_c}{k_i}\right)^{1/2} + q_1 \frac{k - k_c}{k_i} + \dots, \\ \psi &= B(\tau) \left(\frac{k - k_c}{k_i}\right)^{1/2} + \alpha \frac{k - k_c}{k_i} + \dots, \\ q_0 &= \left(\frac{2k_c}{k_i}\right)^{1/2}, \quad q_1 = -\frac{2k_c}{3k_i}, \quad \alpha = -2 \frac{k_c}{k_i}. \end{aligned} \quad (24)$$

Члены  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $\alpha$  в (24) представляют стационарное решение (23) при  $\frac{k - k_c}{k_i} \rightarrow 0$  (того же типа, что и (13)). При  $k \gg k_c$ , функция  $\phi$  имеет асимптотику

$\phi \rightarrow 1$ . Численное решение (23) для  $\phi$  представлено на рис. 2b вместе с нулевым приближением  $q_0 \left(\frac{k - k_c}{k_i}\right)^{1/2}$  (пунктирная прямая линия на рис. 2b). С этим при-

ближением, обеспечиваем обсуждаемое ранее условие малых шумов  $E_s = E_{ext}$  и, введя верхнюю границу по волновым числам  $k_s$  ((C) на рис. 1), как и в (15) мы получим

$$E_s = 4\pi \int_{k_i}^{k_s} \frac{C_0}{f} q_0 \left(\frac{k - k_c}{k_i}\right)^{1/2} k^2 dk = \frac{2}{5} f,$$

что дает условие на  $k_s$ :

$$\frac{k_s}{k_c} - 1 = \left(\frac{f^2 k_i}{C_0 k_c^4}\right)^{2/7}.$$

Члены, содержащие  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  в (24) описывают неустойчивые возмущения,

$$\frac{d^2 A}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 \frac{k_c^4}{k_i^4} B, \quad \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{2k_c^2}{3k_i^2}\right) B = -\frac{k_c^2}{k_i^2} A. \quad (25)$$

Для экспоненциального роста :  $e^{\lambda\tau}$  и  $\varepsilon = 1$  в (25) следует

$$\lambda = |\varepsilon| \left(\frac{k_c}{k_i}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}. \quad (26)$$

Зависимость от  $\varepsilon$  в (26) соответствует (21). Возмущения в (19),(25) растут экспоненциально: используя (23) для  $\tau$ ,  $\varepsilon$  в (26), выпишем

$$\lambda\tau = t \cdot \frac{|g|k_c^2}{f^{1/2}} 2^{1/2}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что инкремент  $\Lambda$ , определяемый использование (6) как

$$\frac{\Lambda}{k_c} = \alpha \sim \frac{g|k_c}{f^{1/2}} \sim \frac{|H_c| Q_0^{-1} k_c}{E^{1/2} Q_0}$$

имеет тот же вид как и в (1) с другим множителем, зависящим от формы решений в (17), (23). Здесь  $k_c$  – это волновое число экспоненциально растущего крупномасштабного возмущения.

В окрестности  $k_c$ ,  $k < k_c$ , функции в (13) могут быть разложены по степеням  $(1 - \frac{k}{k_c})$  с главным членом

$$F_0(k) = F_c \left(1 - \frac{k}{k_c}\right), \quad H_0(k) = H_c \left(1 - \frac{k}{k_c}\right), \quad F_c = \frac{fk_c^2}{I_0}, \quad H_c = \frac{gk_c^2}{I_0}. \quad (28)$$

Для решений (22),(24) при  $k \rightarrow k_c$

$$F_0(k) = F_c \left(\frac{k}{k_c} - 1\right)^{1/2}, \quad F_c = \frac{2f}{I_0} k_i k_c. \quad (29)$$

Выражения в (28) для  $F_c$  и  $H_c$  могут быть рассмотрены, как определяющие граничное волновое число  $k_c$  (ниже которого возникают нефизические значения энергии  $F_c > 0$ ) и амплитуды  $H_c$  в терминах данной амплитуды  $F_c$ ,

$$k_c = \left(\frac{F_c I_0}{f}\right)^{1/2}, \quad H_c = \frac{F_c g}{f}.$$

Соответствующее граничное значения  $k_c$  для (29) будет

$$k_c = \frac{F_c I_0}{2fk_i},$$

где  $k_i$  определяется (22).

Эти соотношения показывают, что амплитуда энергии  $F_c$  основной (невозмущенной) турбулентности определяет и масштаб :  $1/k_c$  возникающих неустойчивых крупномасштабных мод.

Выражения (13), (16), (24) показывают нам путь построения решений, удовлетворяющих (7) для турбулентного потока со спиральностью, ведущих к реализации сценария крупномасштабной неустойчивости, описанной в [20],[21] и в начале данного раздела. Турбулентность определяется в (13), (16), (24). Интегралы  $f$  и  $g$  в (4) описывают мелкомасштабные внешние источники крупномасштабной неустойчивости.

### 3. Каскадные модели с интегралами энергии и спиральности

Результаты, представленные ниже основаны на каскадной модели, имеющей интеграл спиральности в форме близкой к соответствующему интегралу в уравнениях Навье-Стокса. Он определяется как разность двух положительно определенных квадратичных форм (некоторые результаты были представлены ранее в [21]). В другом виде рассмотренные ниже уравнения были описаны в [32] для системы с общим вращением (анизотропный случай)

Рассмотрение далее ведем в компенсированных безразмерных переменных в Фурье-пространстве для амплитуд поля скорости на сферических слоях с волновыми числами  $k_j$ . Волновое число  $j$ -ого каскада будет  $k_j = q^j$ , а  $q = 2$  коэффициент фрагментации масштаба. Положительные и отрицательные компоненты спиральности скоростей  $u_j^\pm$  пропорциональны  $q^{-j/3} \{y_j, z_j\}$  (Закон "5/3" для спектра энергии соответствует случаю  $|y_j, z_j| \sim \text{const}$ , где  $y_j, z_j$  положительные и отрицательные спиральные моды соответственно; все они являются комплексными). Уравнения динамики имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{V}_j}{dt} = ik_{j-1}^{2/3} \mathbf{B}_j - R^{-1} k_j^2 \mathbf{V}_j + \mathbf{F}_j, \quad (30)$$

$$\mathbf{V}_j = \{y_j, z_j\}, \mathbf{F}_j = \{f_j, g_j\}, \mathbf{B}_j = \sum_{m=1}^4 \{B_j^m(\mathbf{y}, \mathbf{z}, B_j^m(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad (31)$$

где блоки  $B_j^m(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  соответствуют 4 типам взаимодействий, а именно,

$$\begin{aligned} B_j^1 &= \beta_1 z_{j-2} z_{j-1} + \beta_2 y_{j-1}^* z_{j+1} + \beta_3 y_{j+1}^* z_{j+2}, \\ B_j^2 &= \beta_4 z_{j-2} y_{j-1} + \beta_5 z_{j-1}^* y_{j+1} + \beta_6 z_{j+1}^* z_{j+2}, \\ B_j^3 &= \beta_7 y_{j-2} y_{j-1} + \beta_8 y_{j-1}^* y_{j+1} + \beta_9 y_{j+1}^* y_{j+2}, \\ B_j^4 &= \beta_{10} y_{j-2} z_{j-1} + \beta_{11} z_{j-1}^* z_{j+1} + \beta_{12} z_{j+1}^* y_{j+2}. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\beta_j$  обеспечивают сохранение интегралов энергии и спиральности при отсутствии вязкой диссипации ( $R^{-1} = 0$ ) и нулевых внешних сил  $f_j, g_j$ :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{j=1}^N E_j, E_j = q^{-\frac{2}{3}(j-1)} (|y_j|^2 + |z_j|^2), \\ H &= \sum_{j=1}^N H_j, H_j = q^{\frac{1}{3}(j-1)} (|y_j|^2 - |z_j|^2), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\beta_1 = \beta_3 \frac{q-1}{q(q+1)}, \beta_2 = -\beta_3 \frac{1+q^2}{q(q+1)}, \beta_5 = \beta_4 \frac{1+q^2}{1+q}, \beta_6 = -\beta_4 \frac{q(q-1)}{1+q},$$

$$\beta_7 = -\beta_9 \frac{1}{q}, \beta_8 = -\beta_9 \frac{1+q}{q}, \beta_{11} = \beta_{10}(1-q), \beta_{12} = \beta_{10}q.$$

Коэффициенты  $\beta_3, \beta_4, \beta_9, \beta_{10}$  произвольные, так что взаимодействия блоков  $B_j^m$  независимы друг от друга. Значения этих коэффициентов принимаются далее равными 0 или 1.

При числе Рейнольдса  $R = 10^8$  количество каскадов в численных экспериментах составляет  $N = 20$ . Внешние силы задаются в виде  $f_j = a_j F_j r_{j,j} = b_j F_j r_j$ , где  $r_j$  случайные переменные, однородно распределенные в интервале  $[-1, 1]$ . Относительную роль играет внешнее возбуждение действительной и мнимой частей положительной спиральной компоненты  $\dot{y}_j$  в (30), (31), которые выбираются как  $\text{Re}(a_j) = 0.1$  и  $\text{Im}(a_j) = -1.0$ . Отрицательная компонента спиральности  $\dot{z}_j$  возбуждается схожим образом.

Если  $b_j = 0$ , то внешние силы возбуждают только одну ( $\dot{y}_j$ ), в то время как ( $\dot{z}_j$ ) генерируется нелинейными взаимодействиями. Это обеспечивает приток положительной спиральности. Если обе компоненты возбуждаются одинаковыми внешними силами ( $a_j = b_j, \text{Re}(a_j) = 0.05, \text{Im}(a_j) = -0.5$ ), то спиральность в этом случае в среднем равна 0. Амплитуды внешних сил  $F_j$  задаются тремя способами:

(I)  $F_j = 1.0$  на  $j = 2, 3$  (т.е. возмущение крупных масштабах на ярусах 2,3) и  $F_j = 0$  на остальных ярусах.

(II)  $F_j = 1.0$  или  $F_j = 2.0$  на  $j = 10, 11$  (узко-спектральное мелкомасштабное возмущение на ярусах 10,11) и  $F_j = 0$  на остальных ярусах.

(III)  $F_j = 1.0$  или  $F_j = 2.0$  на  $j = 10, 11$ ;  $F_j = 0.05$  для  $j = 2 \div 9$  (крупномасштабный шум и узко-спектральное возмущение); и  $F_j = 0$  на остальных ярусах.

Во всех вариантах задания внешнего воздействия использовались силы с притоком спиральности или его отсутствием.

Взаимодействие различных блоков  $B_m$  в (30), (31) дают отличающиеся сценарии развития каскада энергии между ярусами. Рассмотрим далее динамику триплетов, вовлеченных в  $B_m$ .

В первом блоке  $B_1$ , при задании  $|z_j|$  в начальный момент времени, мы имеем уравнения трехмодового взаимодействия

$$\frac{dz_{j+1}}{dt} = iq^{\frac{2}{3}j} \beta_2 z_j^* y_{j+2}, \quad \frac{dy_{j+2}}{dt} = iq^{\frac{2}{3}(j+1)} \beta_1 z_j z_{j+1},$$

откуда

$$\frac{d^2 z_{j+1}}{dt^2} = -q^{\frac{2}{3}(2j+1)} (\beta_1 \beta_2) |z_j|^2 \cdot z_{j+1}.$$

Поскольку  $\beta_1 \beta_2 < 0$ , то происходит экспоненциальный рост  $z_{j+1}$  и  $y_{j+2}$ , т.е. этот блок реализует прямой каскад от яруса  $j$  к  $j+1, j+2$  (рис. 3а).

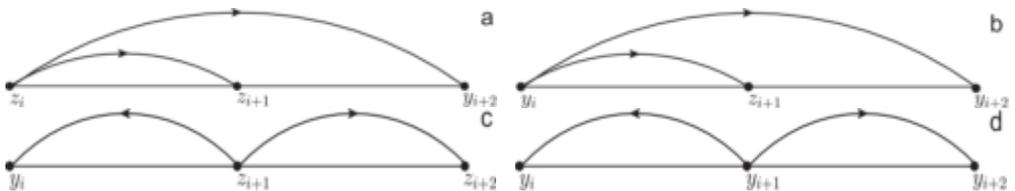


Рис. 3. Прямые и обратные каскады в трехмодовых взаимодействиях каскадной модели

Похожая ситуация имеет место для блока  $B_4$  (рис. 3б):

$$\frac{dz_{j+1}}{dt} = iq^{\frac{2}{3}j} \beta_{11} y_j^* y_{j+2}, \quad \frac{dy_{j+2}}{dt} = iq^{\frac{2}{3}(j+1)} \beta_{10} y_j z_{j+1},$$

откуда

$$\frac{d^2 z_{j+1}}{dt^2} = -q^{\frac{2}{3}(2j+1)} (\beta_{10} \beta_{11}) |y_j|^2 \cdot z_{j+1}.$$

Поскольку  $\beta_{10} \beta_{11} < 0$ , то  $z_{j+1}$  и  $y_{j+2}$  растут экспоненциально при  $q > 1$ .

Другая ситуация возникает для блоков  $B_2$  и  $B_3$ . Для  $B_2$  при задании в начальный момент времени  $|z_{j+1}|$ , мы получаем

$$\frac{dy_j}{dt} = iq^{\frac{2}{3}(j-1)} \beta_6 z_{j+1}^* z_{j+2}, \quad \frac{dz_{j+2}}{dt} = iq^{\frac{2}{3}(j+1)} \beta_4 y_j z_{j+1},$$

откуда

$$\frac{d^2 y_j}{dt^2} = -q^{\frac{2}{3}(2j)} (\beta_4 \beta_6) |z_{j+1}|^2 \cdot y_j.$$

Поскольку  $\beta_4 \beta_6 < 0$ , то  $y_j$  и  $z_{j+2}$  растут экспоненциально, т.е. мода  $j+1$  возбуждает крупномасштабный ярус  $j$ , наряду с  $j+2$ . В этом случае происходят и прямые и обратные каскады (fig. 3в).

Аналогично, для  $B_3$ ,

$$\frac{dy_j}{dt} = iq^{\frac{2}{3}(j-1)} \beta_9 y_{j+1}^* y_{j+2}, \quad \frac{dy_{j+2}}{dt} = iq^{\frac{2}{3}(j+1)} \beta_7 y_j y_{j+1},$$

откуда

$$\frac{d^2 y_j}{dt^2} = -q^{\frac{2}{3}(2j)} (\beta_7 \beta_9) |y_{j+1}|^2 \cdot y_j.$$

Поскольку  $\beta_7 \beta_9 < 0$  то возбуждаются моды  $y_j$  и  $y_{j+2}$  (рис. 3г).

Поскольку уравнения (30), (31) симметричны по отношению к замене  $y \leftrightarrow z$ , то имеются также и взаимодействия с учетом этих замен.

Во взаимодействиях с блоками  $B_1$ ,  $B_4$  (рис. 2а, 2б) мелкомасштабные моды  $j+1$ ,  $j+2$  неустойчивы относительно более крупномасштабных  $y_j$ ,  $z_j$ : здесь генерируется прямой каскад энергии. Во взаимодействиях с блоками  $B_2$ ,  $B_3$  (рис. 2в, 2г) возникают как прямой, так и обратный каскады. Однако имеется существенное отличие взаимодействий в блоках  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_4$  от взаимодействий в блоке  $B_3$ . В первых трех происходит перемешивание спиральных мод разных знаков  $y_j$  и  $z_j$ . При этом обратный каскад в блоке  $B_2$   $z_{j+1} \rightarrow y_j$  подавляется прямым каскадом по блоку  $B_4$  ( $y_j \rightarrow z_{j+1}$ ,  $y_j \rightarrow z_{j+2}$ ). Поэтому для существования обратного каскада энергии в смешанных спиральных взаимодействиях необходим достаточно высокий уровень шумов в модах, чтобы неустойчивости успевали сгенерировать значительную величину моды  $y_j$  при взаимодействиях по блоку  $B_2$ , которая не успевала бы "рассосаться" в результате взаимодействий по блоку  $B_4$ .

Взаимодействия в блоке  $B_3$  не перемешивают знаки спиральных мод (имеются также взаимодействия, аналогичные  $B_3$ , с заменой  $y \leftrightarrow z$ ). Поэтому по  $B_3$  существуют прямой и обратный каскады энергии, причем обратный каскад может быть более развит из-за уменьшенного действия вязкости на крупных масштабах. Соответствующие процессы имеют место в каскадной системе с двумя положи-

тельно определенными интегралами движения, которая моделирует двумерную турбулентность [27], [33], [34]). Уравнения такой модели близки к взаимодействиям в блоке  $B_3$ , если в (30), (31) оставить только этот блок.

Далее все эти выводы рассмотрены на основе численных экспериментов. С учетом описанных различий взаимодействий во всех блоках рассматриваются случаи (см. таблицу 1):

**Таблица 1.** Конфигурации и внешние силы в численных экспериментах

N	Конфигурации			Ярусы воздействий		
	1111	1001	0110	$j = 2,3$	$j = 2 \div 9$	$j = 10,11$
1	+	+	+	$F = 1(+)$	—	—
2	—	+	+	—	—	$F = 1(+)$
3	—	+	+	—	$F = 0.05(+)$	$F = 1(+)$
4	+	—	—	—	—	$F = 1(+)$
5	+	—	—	—	$F = 0.05(0)$	$F = 1(+)$
6	+	—	—	—	$F = 0.05(0)$	—
7	+	—	—	—	$F = 0.05(+)$	$F = 1(+)$
8	+	—	+	—	—	$F = 2(+)$
9	+	—	+	—	$F = 0.05(+)$	—
10	+	—	+	—	$F = 0.05(+)$	$F = 2(+)$

(а) в уравнения входят все блоки с одинаковыми весами, т.е.  $\beta_3 = \beta_4 = \beta_9 = \beta_{10} = 1$ , в краткой записи {1111};

(б) в уравнения входят только блоки  $B_1, B_4$ , т.е.  $\beta_3 = 1, \beta_4 = 0, \beta_9 = 0, \beta_{10} = 1$ , в краткой записи {1001};

(в) в уравнения входят только блоки  $B_2, B_3$ , т.е.  $\beta_3 = 0, \beta_4 = 1, \beta_9 = 1, \beta_{10} = 0$ , в краткой записи {0110}

В таблице 1 для ряда экспериментов также указаны способы задания внешнего силового воздействия для указанных выше случаев при выбранных конфигурациях систем.

В случае 1) при  $j = 2, 3$  – силы  $F_j = 1(+)$ , знак (+) указывает на наличие притока спиральности от действия сил на ярусы 2 и 3 (в этом случае  $\text{Re}(a_j) = 0.1, \text{Im}(a_j) = -1.0, b_j = 0, j = 2, 3$ ).

Так же для случая 2): при  $j = 10, 11$  – силы  $F_j = 1(+)$  с соответствующим заданием коэффициентов  $a_j, b_j$  на ярусах  $j = 10, 11$ .

В случае 3) заданы силы  $F_j = 1(+)$  на ярусах  $j = 10, 11$ , и кроме того,  $F_j = 0.05(+)$  или  $F_j = 0.05(0)$  с соответствующими коэффициентами  $a_j, b_j$  на всех ярусах  $j = 2 - 9$ , где обозначение (0) указывает на нулевой приток спиральности от внешних сил на ярусах  $j = 2 - 9$ .

Во всех вариантах внешнего воздействия использовались силы, как с потоком спиральности, так и без. Если внешние силы действуют только на крупные масштабы, то система (30), (31) должна формировать на малых масштабах колмогоровское распределение энергии по масштабам (спектр "-5/3") и аналогичный спектр для спиральности.

На рис. 3а представлены энергии  $E_j$  (см. (32)) ярусов для конфигураций {1111}, {1001}, {0110} при крупномасштабном  $j = 2, 3$  внешнем воздействии. Спектры соответствуют закону "-5/3" (прямая сплошная линия; количество ярусов

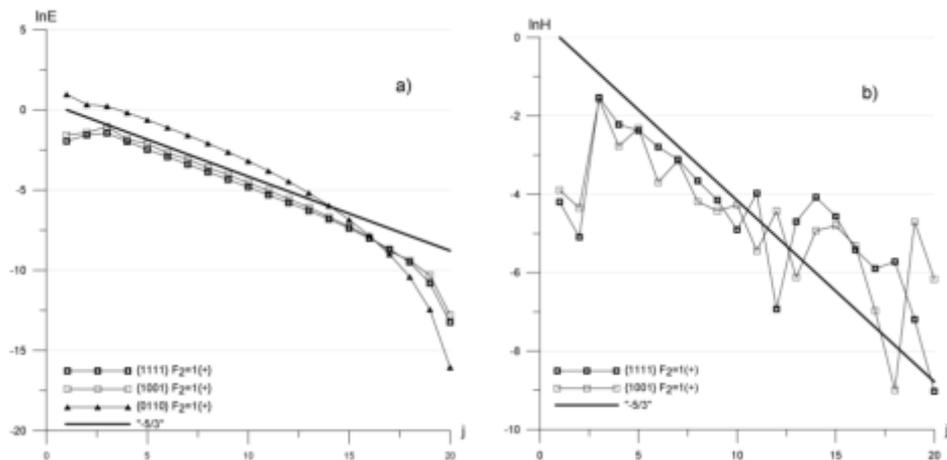


Рис. 4. (а) Энергии  $E_j$  ярусов для конфигураций {1111}, {1001} и {0110} при крупномасштабном возбуждении на  $j = 2, 3$  (таблица, эксперимент 1); (б) спиральность  $H_j$  для {1111}, {1001}

$j \sim \ln(k)$ ; по этой причине рис. 4а приведен в билогарифмической шкале ( $\log E$ ,  $\log k$ ). Однако обращает на себя внимание отличие для спектра конфигурации {0110} (блоки  $B_2, B_3$ ), для взаимодействий в которой может иметь место обратный каскад, что дает увеличение энергии в крупномасштабной части спектра (рис. 4а, треугольники). Дополнительно на рис. 4б представляет собой распределение спиральности (см. (32)) {1111}, {1001}. Кривые на рис. 4б хорошо согласуются со степенным законом  $\sim -5/3$  в крупномасштабной части.

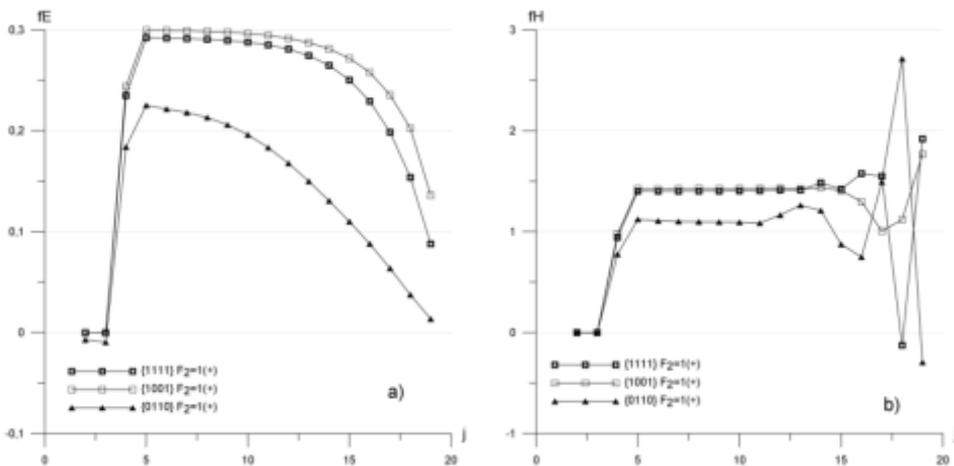
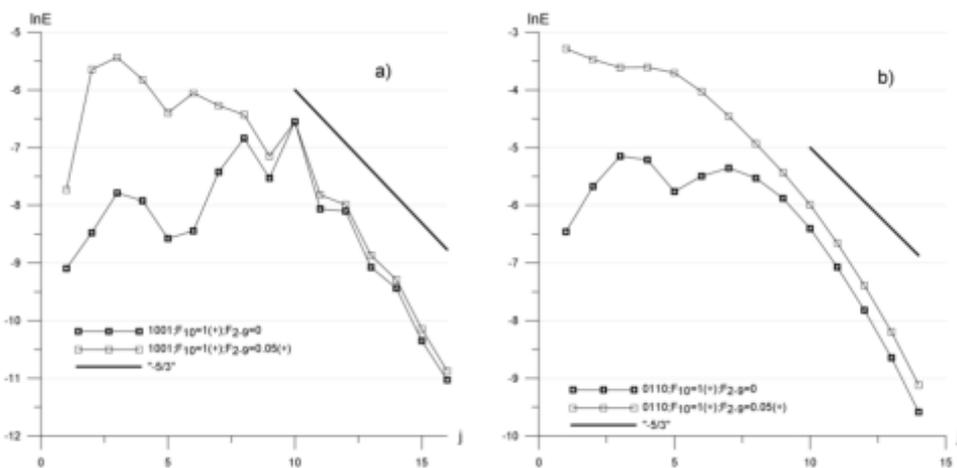


Рис. 5. (а) Поток энергии  $fE_j$  и (б) спиральности  $fH_j$  для конфигураций {1111}, {1001} и {0110} при крупномасштабном возбуждении на  $j = 2, 3$  (таблица, эксперимент 1)

На рис. 5а, рис. 5б показаны потоки энергии и спиральности, вычисляемые исходя из соотношений (без внешних сил и вязкости)  $\dot{E}_j = fE_j - fE_{j-1}$ ,

$\dot{H}_j = fH_j - fH_{j-1}$  для крупномасштабного  $j = 2, 3$  внешнего воздействия. Для потоков имеются интервалы их постоянных значений, хотя особенности взаимодействий в конфигурации {0110} (блоки  $B_2, B_3$ ) и здесь проявляются, демонстрируя уменьшенные потоки энергии и спиральности. Это следствие обсуждаемых свойств взаимодействий в блоках  $B_2, B_3$ , которые дают возможности для обратных каскадов энергии и спиральности. Следующее свойство, которому способствуют наблюдаемые явления – это невыраженность инерционного интервала.

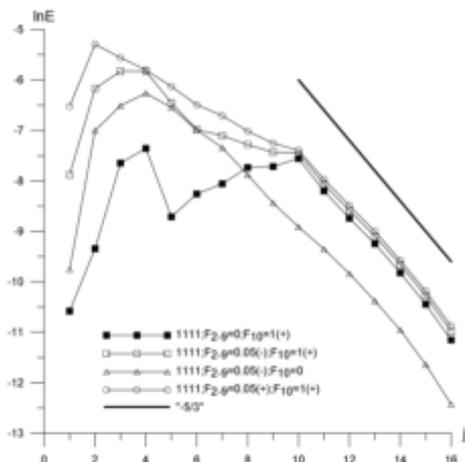


**Рис. 6.** Энергии ярусов  $E_j$  (a) {1001} и (b) {0110} в случае мелкомасштабного возбуждения на  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ) без внешнего шума на  $j = 2 - 9$  (черные квадраты) (таблица, эксперимент 2) и с внешним шумом на ярусах  $j = 2 - 9$  (контурные квадраты, таблица, эксперимент 3)

Рис. 6 представляет результаты (для взаимодействий {1001}, {0110}), в случае, если внешнее возмущение действует в мелкомасштабных ярусах  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ), но нет внешних шумов на модах  $j = 2 - 9$ ,  $F = 0$  (энергии на рис. 5а, 5б, черные прямоугольники). В этом случае крупномасштабные энергии мод не превышают внешне генерируемые энергии на ярусах  $j = 10, 11$ . При включении слабых шумов ( $F = 0.05$ ) на ярусах  $j = 2 - 9$  крупномасштабные энергии увеличиваются в несколько раз (светлые прямоугольники) и значительно превышают энергии на ярусах  $j = 10, 11$ .

Возникает вопрос, какая доля энергии в крупномасштабной области генерируется внешним возбуждением, производимым на ярусах  $j = 10, 11$ . Результаты, представленные на рис. 4–6 соответствуют случаю, когда внешние силы генерируют притоки спиральности (положительной по знаку) в ярусах  $j = 2 - 9$ ,  $j = 10, 11$  (знаки (+) в таблице и на легендах к рисункам). Имеет ли значение для крупномасштабной генерации энергии этот приток спиральности или его отсутствие?

Рисунок 7 показывает результаты в случае, когда основное внешнее возбуждение спиральности  $F = 1.0$  происходит на малых масштабах (ярусы 10, 11) и рост крупномасштабных мод зависит от внешних шумов на промежуточных масштабах. Основная цель рис. 7 продемонстрировать рост энергии на крупных масштабах (ярусы 2–4) при мелкомасштабной накачке, вызывающей обратный поток энергии.

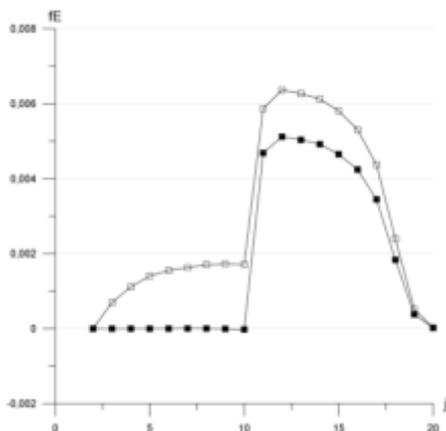


**Рис. 7.** Энергии  $E_j$  ярусов каскада для конфигурации {1111} при внешнем возмущении в мелкомасштабных ярусах  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ) (черные квадраты) и без внешних шумов на модах  $j = 2 - 9$  (таблица, эксперимент 4); с внешними неспиральными шумами на модах  $j = 2 - 9$  (светлые квадраты) (таблица, эксперимент 5); с внешними неспиральными шумами на модах  $j = 2 - 9$ , но без возмущений в мелкомасштабных ярусах  $j = 10, 11$  ( $F = 0$ ) (треугольники) (таблица, эксперимент 6); с внешними возмущениями в мелкомасштабных ярусах  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ) и внешними спиральными шумами на модах  $j = 2 - 9$  (окружности) (таблица, эксперимент 7)

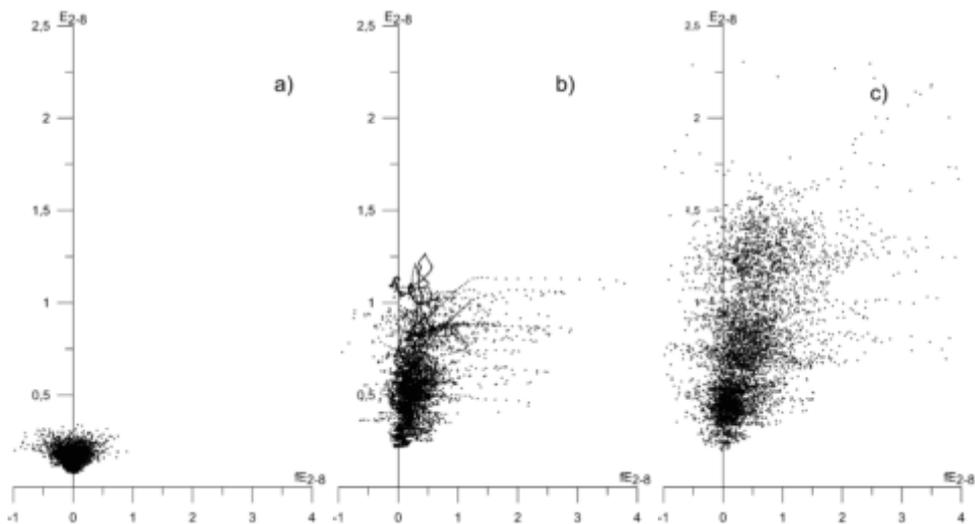
На рис. 7 для  $\ln E_j$  показаны результаты для расчетов с отсутствием внешних шумов на ярусах  $j = 2 - 9$ . Сплошными квадратами обозначены величины  $E_j$  при отсутствии внешних шумов на ярусах  $j = 2 - 9$ . Возбуждения на  $j = 10, 11$  не дают генерации крупномасштабных мод с энергией выше возмущений на  $j = 10, 11$ . Если внести шумы (без спиральности) на ярусах  $j = 2 - 9$  ( $F = 0.05$ ), но убрать возмущения на  $j = 10, 11$  ( $F = 0$ ), то уровень крупномасштабной энергии увеличится (треугольники на рис. 7). Это та доля, которую дают крупномасштабные шумы внешних сил. Если к шумам (без спиральности) на ярусах  $j = 2 - 9$  внести возмущения на  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ), то энергии  $E_j$  при  $j < 10$  станут еще больше (светлые квадраты на рис. 7). Это та доля, которую дают возмущения  $F = 1$  при  $j = 10, 11$ . Наконец, если шумы при  $j = 2 - 9$  ( $F = 0.05$ ) дают приток спиральности (положительный) к модам на ярусах  $j = 2 - 9$  и имеется возбуждение при  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ) с таким же притоком спиральности, то уровень энергий  $E_j$  при  $j < 10$  станет еще выше (окружности на рис. 7). Эффекты, связанные с распределенными по спектру источниками спиральности, докладывались также в [30].

Следует отметить, что шумы, вызванные внешним возбуждением на ярусах  $j = 2 - 9$  генерируют средний поток энергии между ярусами  $j = 2 - 9$ , что продемонстрировано на рис. 8 (контуры квадратов). Средний поток для  $F \neq 0$  положителен, то есть направлен из крупных в мелкие масштабы. Отрицательный (обратный) поток энергии возникает только в случае взаимодействий блока  $B_3$ . Это соответствует рис. 2в в [26], где обратный поток энергии существует только при параметре  $\alpha = 1.0$ , который дает уравнение из работы [25].

Другими словами, несмотря на положительный знак потока энергии, существует и генерация крупных масштабов. Происхождение крупномасштабных



**Рис. 8.** Поток энергии  $fE_j$  между ярусами  $j = 2 - 20$  для конфигурации  $\{1001\}$  при наличии и отсутствии внешних шумов на ярусах  $j = 2 - 9$  (контурные и черные квадраты соответственно)

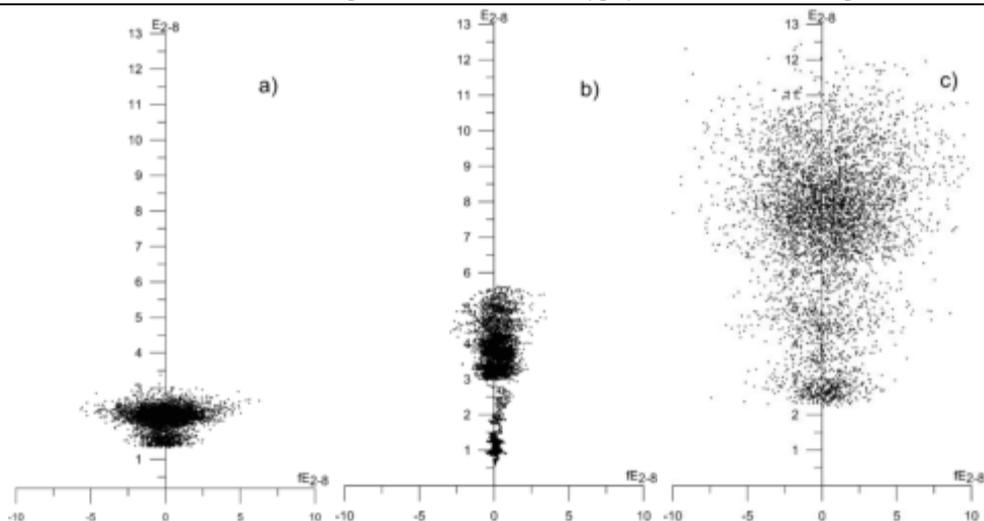


**Рис. 9.** Гистограммы  $(fE_{2-8}, E_{2-8})$  для конфигурации  $\{1111\}$  при а)  $F_{2-9} = 0, F_{10} = 2$ ; б)  $F_{2-9} = 0.05, F_{10} = 0$ ; в)  $F_{2-9} = 0.05, F_{10} = 2$

возмущений как результат действия шумов на ярусах  $j = 2 - 9$  представляет специальный предмет исследования в свете того факта, что средний поток энергии по этим ярусам направлен в сторону мелких масштабов.

Рисунки 9 и 10 показывают мгновенные значения энергии  $E_{2-8}$ , усредненной по ярусам  $2 \leq j \leq 8$  в зависимости от усредненных по  $2 \leq j \leq 8$  крупномасштабных потоков энергии  $fE_{2-8}$  (гистограмма  $fE_{2-8}, E_{2-8}$ ) для случаев: а)  $F_{2-9} = 0, F_{10} = 2$ ; б)  $F_{2-9} = 0.05, F_{10} = 0$ ; в)  $F_{2-9} = 0.05, F_{10} = 2$  и конфигурации  $\{1111\}$  – рис. 9 и  $\{0110\}$  – рис. 10.

а) Рисунки 9а и 10а. Распределение потока энергии  $fE_{2-8}$  практически симметрично в случае отсутствия шумов на крупных масштабах  $F_{2-9} = 0$ . Это соответ-



**Рис. 10.** Гистограммы  $(fE_{2-8}, E_{2-8})$  для конфигурации  $\{0110\}$  при а)  $F_{2-9} = 0, F_{10} = 2$ ; б)  $F_{2-9} = 0.05, F_{10} = 0$ ; в)  $F_{2-9} = 0.05, F_{10} = 2$

вует среднему нулевому потоку энергии при  $2 \leq j \leq 10$  (см. рис. 8 – черные квадраты).

б) Рисунки 9б и 10б. Есть внешние шумы  $F_{2-9} = 0.05$ , но в то же время нет узкоспектрального мелкомасштабного возбуждения на ярусах 10,11,  $F_{10} = 0$ . В этом случае есть приток энергии в крупные. Значения  $E_{2-8}$  возрастают по сравнению с рис. 9а, 10а. Следует заметить, что распределение потока энергии  $fE_{2-8}$  становится асимметричным в конфигурации  $\{1111\}$ . У нас есть положительный поток энергии в малые масштабы, возрастающий с ростом  $E_{2-8}$  (рис. 9б). Это следствие преимущественного влияния процессов прямого каскада для блоков  $B_1, B_4$ , как показано на рис. 3а, 3б. Распределение  $fE_{2-8}$  становится почти симметричным относительно оси  $fE = 0$  в случае обрезания этих взаимодействий – конфигурация  $\{0110\}$  (рис. 10б).

в) Рисунки 9в и 10в. В случае добавления узкоспектрального мелкомасштабного возмущения на ярусах 10,11,  $F_{10} = 2$ , распределение  $fE_{2-8}$  возрастает, особенно с ростом  $E_{2-8}$  как в сторону положительных значений потока энергии  $fE_{2-8}$ , так и в сторону отрицательных значений.

Другими словами, существуют периоды, во время которых происходят значительные обратные потоки энергии, дающие соответственный рост энергии  $E_{2-8}$ . Для конфигурации  $\{1111\}$  асимметрия распределения  $fE_{2-8}$  возрастает с ростом  $E_{2-8}$ . Это указывает на то, что большие значения энергии  $E_{2-8}$  обеспечивают доминирование прямого потока энергии в данном случае. Распределение  $fE_{2-8}$  почти симметрично для конфигурации  $\{0110\}$  (рис. 10в). Это дает существенное возрастание энергии  $E_{2-8}$  по сравнению с соответствующими значениями в  $\{1111\}$  (рис. 9в) (ослабление прямого каскада).

Во всех расчетах, в которых  $F = 1, 2; j = 10, 11$ , величины энергий  $E_j$  вниз по спектру,  $j > 10$ , практически не меняются, то есть имеет место именно крупномасштабная генерация энергии (обратный каскад). В то же время спиральности

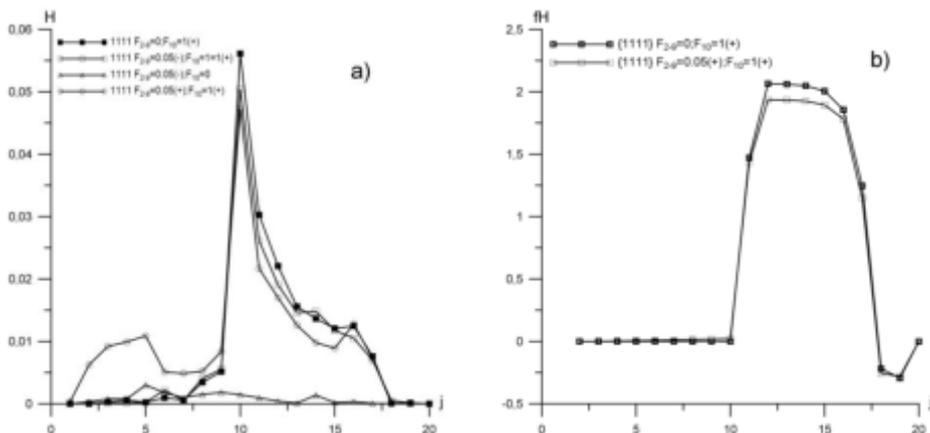


Рис. 11 (а) Спиральность  $H_j$  при тех же параметрах что и на рис. 7 и (б) потоки спиральности  $fH_j$  для конфигурации {1111} с и без внешних шумов на ярусах  $j = 2 - 9$

во всех расчетах показывают обратное поведение: каскад спиральности осуществляется только в мелких масштабах. На рис. 11а для тех же внешних параметров, что и для рис. 7, показана спиральность  $H_j$ , причем ее значения при  $j > 10$  полностью зависят от внешней накачки при  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ). И если этой накачки нет (треугольники на рис. 11а), то и  $H_j \rightarrow 0$ . Небольшой рост спиральности при  $j < 10$  имеет место только при внешнем притоке спиральности для  $F = 0.05$ ,  $j = 2 - 9$ . Это же показывает рис. 11б для потоков спиральности  $fH_j$ : внешнее возбуждение при  $j = 2 - 9$  не дает существенных отличий от почти нулевой величины потоков  $fH_j$ ,  $j < 10$  (можно сравнить рис. 11б с аналогичным рис. 8 для потоков энергии). Такая динамика энергии и спиральности аналогична для двумерной турбулентности с соответствующими потоками энтропии вниз по спектру и энергии - вверх, от масштаба внешней накачки, с существенным отличием, что в системе (30),(31) потоки энергии имеют место как вниз по спектру от масштаба  $j = 10, 11$  действия возмущений  $F = 1$ , так и вверх по спектру - в диапазоне действия внешних шумов при  $j = 2 - 9$  (рис. 8, 11б).

Таким образом, результаты рис. 6, 7, 9, 10 показывают, что передача энергии от возмущений мелких масштабов к более крупным возможна при наличии слабого внешнего силового воздействия на поле скорости с этими масштабами (внешне генерируемые шумы). Рассмотренная в этом параграфе динамика в триплетах, входящих в различные блоки  $B_m$  каскадной модели, выделяет взаимодействия, которые определяют каскад энергии к крупным масштабам. При этом эффект усиливается, если возмущения мелких масштабов и шумов осуществляют знакоопределенный приток спиральности. В этом случае одна из знакоопределенных компонент интеграла спиральности становится малой, интеграл спиральности имеет тенденцию к знакоопределенности, что приводит к динамике, близкой к двумерной, с соответствующей возможностью реализации обратного каскада энергии. Соответствующая процедура может быть проведена и для Фурье-уравнений гидродинамики при заданной внешним образом несимметрии спиральных мод, входящих в уравнения. Такое рассмотрение для взаимодействий амплитуд поля скорости с волновыми числами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k} / 2$  приведено в следующем параграфе.

#### 4. Взаимодействия триад в спиральных течениях

Уравнения Навье-Стокса в Фурье-пространстве представлены через собственные функции оператора ротора ([24], [22])

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \sum_{s_k=\pm 1} \int a_{s_k}(\mathbf{k}) \mathbf{g}_{s_k}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, [\mathbf{k} \times \mathbf{g}_{s_k}] = -is_k k \mathbf{g}_{s_k} \quad (33)$$

где

$$\mathbf{g}_{s_k}(\mathbf{k}) = \mathbf{h}(\mathbf{k}) + is_k \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}), \mathbf{h}(\mathbf{k}) = \frac{[\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \times \mathbf{k}]}{k}, \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) = \frac{[\mathbf{e} \times \mathbf{k}]}{[|\mathbf{e} \times \mathbf{k}|]}$$

и  $\mathbf{e}$  – произвольный вектор.

Для положительных и отрицательных спиральных компонент  $a_{sk}$ ,  $s_k = \pm 1$  имеем уравнения

$$\frac{da_{s_k}(\mathbf{k})}{dt} = \frac{1}{4} \sum_{s_p, s_q=\pm 1} \int \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q} C_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}^{s_k, s_p, s_q} \cdot a_{s_p}^*(\mathbf{p}) a_{s_q}^*(\mathbf{q}), \quad (34)$$

$$C_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}}^{s_k, s_p, s_q} = (s_q q - s_p p) [\mathbf{g}_{s_p}^*(\mathbf{p}) \times \mathbf{g}_{s_q}^*(\mathbf{q})] \mathbf{g}_{s_k}^*(\mathbf{k}),$$

с интегралами энергии и спиральности

$$E = \frac{1}{2} \sum_{s_k=\pm 1} \int a_{s_k}(\mathbf{k}) a_{s_k}^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k},$$

$$H = \sum_{s_k=\pm 1} \int k s_k a_{s_k}(\mathbf{k}) a_{s_k}^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Пусть задана волна в поле скорости  $a_{s_m}(\mathbf{k}_m)$  с вектором  $\mathbf{k}_m = \mathbf{k} + \boldsymbol{\eta}$ . Рассмотрим ее взаимодействие в триаде с волнами  $a_{s_p}(\mathbf{p})$  и  $a_{s_n}(\mathbf{q})$ , где  $\mathbf{p} = -\frac{1}{2}\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{q} = -\frac{1}{2}\mathbf{k} - \boldsymbol{\eta}$ , причем  $|\boldsymbol{\eta}| = |\mathbf{k}|$ . Так как  $\mathbf{k}_m + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ , то в соответствии с (34) имеем

$$\frac{da_{s_p}(-\mathbf{k}/2)}{dt} = \frac{1}{4} \sum_{s_m, s_n} \int_{|\boldsymbol{\eta}|=|\mathbf{k}|} d\boldsymbol{\eta} C_{-\mathbf{k}/2, \mathbf{k}+\boldsymbol{\eta}, -\mathbf{k}/2-\boldsymbol{\eta}}^{s_p, s_m, s_n} a_{s_m}^*(\mathbf{k} + \boldsymbol{\eta}) a_{s_n}^*(-\mathbf{k}/2 - \boldsymbol{\eta}).$$

Так же для волны  $\mathbf{k}$  при  $\mathbf{p} = -\frac{1}{2}\mathbf{k} + \boldsymbol{\eta}$ ,  $\mathbf{q} = -\frac{1}{2}\mathbf{k} - \boldsymbol{\eta}$ :

$$\frac{da_{s_k}(\mathbf{k})}{dt} = \frac{1}{4} \sum_{s_p, s_q} \int_{|\boldsymbol{\eta}|=|\mathbf{k}|} d\boldsymbol{\eta} C_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}/2+\boldsymbol{\eta}, -\mathbf{k}/2-\boldsymbol{\eta}}^{s_k, s_p, s_q} a_{s_p}^*(-\mathbf{k}/2 + \boldsymbol{\eta}) a_{s_q}^*(-\mathbf{k}/2 - \boldsymbol{\eta}).$$

Как приближение, далее величиной  $\boldsymbol{\eta}$  в  $a^*$  в правых частях этих уравнений пренебрегаем, так что остаются только интегралы по  $\boldsymbol{\eta}$  от коэффициентов взаимодействия. Дифференцируя второе уравнение по времени и используя первое из выписанных уравнений, учитывая  $|\boldsymbol{\eta}| = |\mathbf{k}|$ , можно получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2 a_1(\mathbf{k})}{dt^2} + 2A_2^* A_1 a_1 - (3|A_1|^2 - |A_2|^2) a_{-1} &= 0, \\ \frac{1}{\mu^2} \frac{d^2 a_{-1}(\mathbf{k})}{dt^2} + 2A_1^* A_2 a_{-1} - (3|A_2|^2 - |A_1|^2) a_1 &= 0, \\ A_1 &= a_1(-\mathbf{k}/2) \equiv r_1 \exp(i\phi), \\ A_2 &= a_{-1}(-\mathbf{k}/2) \equiv r_2 \exp(i\psi). \end{aligned} \quad (35)$$

Система (35) описывает генерацию волны с волновым числом  $k$  заданной волной с числом  $k/2$ . Действительная величина  $\mu^2$  в (10) состоит из различных интегралов по  $\eta$  при  $|\eta| = |\mathbf{k}|$  с коэффициентами взаимодействия  $C$  из (7). Неустойчивые решения уравнений (35) существуют, если отношения амплитуд  $r_1/r_2$  или  $r_2/r_1$  превышают пороговые значения  $\Pi$ , зависящие от разностей фаз  $\phi - \psi$ ,

$$\frac{r_1}{r_2} > \Pi, \frac{r_2}{r_1} > \Pi, \Pi = \frac{|\cos(\phi - \psi)|}{\sqrt{3}} + \left(1 + \frac{\cos^2(\phi - \psi)}{3}\right)^{1/2}, 1 \leq \Pi \leq \sqrt{3}. \quad (36)$$

Эти уравнения описывают следующее. Зададим спиральные моды  $a_{\pm 1}(-\mathbf{k}/2)$ . Если отношение их амплитуд больше порога  $\Pi$ , т.е. задано состояние с ненулевой спиральностью (положительной при  $\frac{r_1}{r_2} > \Pi$  и отрицательной при  $\frac{r_2}{r_1} > \Pi$ ) с волновым числом  $\mathbf{k}/2$ , то генерируются более мелкомасштабные моды  $a_{\pm 1}(\mathbf{k})$ . Это прямой каскад энергии.

Но моды  $a_{\pm 1}(\mathbf{k})$  взаимодействуют с модами  $a_{\pm 1}(-\mathbf{k}/2)$ , что влияет на их динамику. Учитывая  $|\eta| = |\mathbf{k}|$  приближенно также имеем уравнения генерации волны  $a_s(-\mathbf{k}/2)$  заданной более мелкомасштабной  $a_s(\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \frac{da_1(-\mathbf{k}/2)}{dt} &= C_{1,1} a_1^*(-\mathbf{k}/2) + C_{1,-1} a_{-1}^*(-\mathbf{k}/2), \\ \frac{da_{-1}(-\mathbf{k}/2)}{dt} &= C_{-1,1} a_1^*(-\mathbf{k}/2) + C_{-1,-1} a_{-1}^*(-\mathbf{k}/2), \end{aligned}$$

$$C_{p,q} = \sum_{s=\pm 1} C_{p,q}^{(s)} a_s^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{4} \sum_{s=\pm 1} \int_{|\eta|=|\mathbf{k}|} C_{-\mathbf{k}/2, \mathbf{k}+\eta, -\mathbf{k}/2-\eta}^{p,s,q} d\eta \cdot a_s^*(\mathbf{k}), p, q = \pm 1. \quad (37)$$

При постоянных  $C_{p,q}$  инкремент  $\lambda$  в  $a$ :  $\exp(\lambda t)$  входит в уравнение

$$\begin{aligned} \lambda^4 - \lambda^2 A + B^2 &= 0, \lambda^2 = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B^2}, B^2 = |(C_{1,-1} C_{-1,1} - C_{1,1} C_{-1,-1})|^2, \\ A &= |C_{1,1}|^2 + |C_{-1,-1}|^2 + |C_{1,-1}|^2 + |C_{-1,1}|^2 - |C_{1,-1} - C_{-1,1}|^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Можно показать, что коэффициенты  $C_{p,q}^{(s)}$  пропорциональны при  $|\eta| = |\mathbf{k}|$

$$I \cdot \left( -2i(q+s) \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial k_\alpha} \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial k_\alpha} \right] \mathbf{g}_p + \frac{1}{2} i(p-q) [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\Omega}] \frac{\partial^2 \mathbf{g}_s^*}{\partial k_\alpha^2} - 2i(p+s) [\mathbf{h} \times \boldsymbol{\Omega}] \frac{\partial^2 \mathbf{g}_q}{\partial k_\alpha^2} \right), \quad (39)$$

$$\text{Здесь } I = \int_{|\mathbf{n}|=|\mathbf{k}|} (\eta_\alpha)^2 d\eta.$$

В (38) для различных коэффициентов имеются для  $a_{\pm 1}(-\mathbf{k}/2)$  как возрастающие, так и затухающие решения. Однако если в (37) оставить спиральные моды только одного знака,  $a_1^*(\mathbf{k})$  или  $a_{-1}^*(\mathbf{k})$ , то в (38) всегда имеются решения с  $Re(\lambda) > 0$ . Это следует из того, что если  $s = 1$ , то для  $p = -1$ ,  $q = -1$  коэффициент  $C_{-1,-1}^{(1)} = 0$ , как следует из уравнения (17). Аналогично  $C_{1,1}^{(-1)} = 0$ . Поэтому положив в (13)  $a_{-1}^*(\mathbf{k}) = 0$ , имеем  $C_{-1,-1} = C_{-1,-1}^{(1)} = 0$ . Отсюда

$$A = |C_{1,1}|^2 + |C_{1,-1}|^2 + |C_{-1,1}|^2 - |C_{1,-1} - C_{-1,1}|^2, B^2 = |(C_{1,-1}C_{-1,1})|^2.$$

Если  $A > 0$ , то очевидно  $Re(\lambda) > 0$ . Если же  $A < 0$ , то имеет место неравенство

$$-A = |C_{1,-1} - C_{-1,1}|^2 - |C_{1,1}|^2 - |C_{-1,1}|^2 - |C_{-1,1}|^2 < 2|C_{1,-1}| |C_{-1,1}| = 2B,$$

которое переписывается в очевидной форме

$$(|C_{1,-1}| + |C_{-1,1}|)^2 - |C_{1,-1} - C_{-1,1}|^2 + |C_{1,1}|^2 > 0.$$

Поэтому подкоренное выражение в формуле для  $\lambda^2$  отрицательно ( $A^2 < 4B^2$ ), что и для  $A < 0$  приводит к неустойчивости с  $Re(\lambda) > 0$  (осцилляционной). Аналогичный вывод справедлив, если в (13) имеются только спирально-отрицательные моды.

Таким образом, снятие симметрии положительных и отрицательных спиральных мод для рассмотренных выделенных из Фурье-уравнений гидродинамики взаимодействий может приводить к экспоненциальному росту возмущений как в прямой, так и обратной по каскаду передаче энергии от внешне возбуждаемого масштаба. Этот вывод аналогичен полученному выше для выделенных взаимодействий в каскадной модели.

### Заключение

Отправной точкой в данном исследовании при рассмотрении генерации крупномасштабных возмущений в поле скорости можно считать статью [25], в которой искусственно из Фурье-уравнений гидродинамики выбраны взаимодействия спиральных мод одного знака, что дает знакоопределенный интеграл спиральности и аналогичный двумерному обратный каскад энергии.

Здесь мы использовали три разных подхода при моделировании каскадов энергии и спиральности в трехмерной турбулентности. В первом, восходящем к методикам работ [20], реализуется идеология статистической теории турбулентности, где для замыкания цепочки уравнений для моментов применяется гипотеза Миллионщикова с целью определить в условиях спиральной турбулентности критерии генерации крупномасштабных возмущений. При таком подходе данная гипотеза не создает известных проблем с возможной отрицательностью спектра энергии, поскольку среди возможных решений выделяются только энергетически положительно определенные (также удовлетворяющие известному неравенству, связанному со спиральностью). Эти решения представлены формулами (13), (19) и описывают экспоненциально растущие решения на фоне заданной формулами (13) спиральной турбулентности. Существенно, что в таком подходе спираль-

ность не должна быть вырожденной, т.е. должна иметь определенный знак: в формуле (21) для инкремента отличие от нуля величины  $|g|$ , связанной со спиральностью, является определяющим.

В другом подходе – в динамической каскадной системе – фоновая (затравочная) турбулентность генерируется внешними шумами, связанными с внешними силами. Их присутствие также является определяющим при возбуждении крупномасштабных мод под действием узкоспектральных сил в середине инерционного диапазона волновых чисел. И в этом случае эффект усиливается, если возмущения мелких масштабов и шумов осуществляют знакоопределенный приток спиральности.

В рассматриваемой системе (30), (31) рост крупномасштабных возмущений происходит вследствие внешних шумов на промежуточных масштабах, начиная от масштаба накачки. По этой причине обратный каскад в классическом смысле, когда промежуточные возмущения формируются в инерционном интервале свободном от внешних воздействий и энергия передается по масштабам только нелинейными взаимодействиями, здесь отсутствует. Обратный перенос энергии в сторону крупных масштабов без внешнего шума проявляется только в предельном случае, рассмотренном в [25], когда существует знакоопределенный второй интеграл, обусловленный спиральными модами только одного знака. Такая система приобретает черты близкие к случаю чистой двумерной турбулентности. В системе (30), (31) такое поведение будет возможно только если мы оставим в уравнениях динамики системы только взаимодействия блока  $B_j^3$ . Действительно, в этом случае, уравнения оказываются схожими с каскадной моделью двумерной турбулентности (типа GOY модели), где наблюдается обратный поток энергии. Отсутствие "идеального" инерциального интервала верх по спектру от масштаба накачки усложняет проблему определения соответствующих спектральных характеристик поскольку на этих уровнях уже появляется зависимость от амплитуды внешнего шума. В этом случае, в соответствии с рис. 6, 7, 9, 10, определенно существует поток энергии вверх от масштаба накачки.

Динамика возмущений в трехмодовых взаимодействиях как в модельной системе, так и Фурье-уравнениях для спиральных компонент также демонстрирует, что снятие симметрии положительных и отрицательных спиральных мод для выделенных в динамике взаимодействий может приводить к экспоненциальному росту возмущений как в прямой, так и обратной по каскаду передаче энергии от внешне возбуждаемого масштаба.

При рассмотрении уравнений для положительных и отрицательных спиральных мод в Фурье-пространстве появляется определенное пороговое значение во взаимодействии мод с волновыми числами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}/2$ . Этот подход не рассматривает все множество взаимодействующих масштабов. Однако, если существует критическое минимальное значение спиральности  $H_{cr}$  для величины  $H_0$  в (1) или в (12), то оно должно определить и критический масштаб для энергии турбулентности  $E_0 \cdot L_{cr} = E_0 / H_{cr}$ . Это в самом деле указывает не порог спиральности, но порог масштаба, выше которого возмущения возбуждаются при заданном значении  $H_0$  (см. [21]). В этом случае масштаб генерируемой самой турбулентности фактически должна определяться факторами, внешними по отношению к этому турбулентного потоку. В подходе, использующем гипотезу Миллионщикова Подход с гипотезой Миллионщикова включает критический масштаб  $\sim 1/k_c$ , который свя-

зан с существованием стационарного состояния, описываемое (13), на фоне которого развиваются неустойчивые решения. Из неравенства (14) следует

$$L_{cr} = 1/k_c > \frac{|g|}{f}. \text{ Из (6) мы получаем условие}$$

$$L_{cr} > \frac{|H_0|}{2fQ_0^2},$$

которое показывает, что критический масштаб  $L_{cr}$  возрастает с ростом спиральности  $|H_0|$  или масштаба самой турбулентности  $\sim 1/Q_0$ .

### Литература

- [1] Kraichnan R. Helical turbulence and absolute equilibrium // J. Fluid Mech. 1973. V. 59 (4) P. 745–752.
- [2] Мусеев С.С., Сагдеев Р.З., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В. Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. Вып. 6(12). С. 1979–1987.
- [3] Tsinober A., Levich E. On the helical nature of three-dimensional coherent structures in turbulent flows // Phys. Lett. A. 1983. V. 99 (6-7). P. 321–324.
- [4] Knorr G., Lynov J., Pécseli H. Self-organization in three-dimensional hydrodynamic turbulence self-organization in three-dimensional hydrodynamic turbulence // Z. Naturforsch. 1990. V. 45a (9-10). P. 1059–1073.
- [5] Brissaud A., Frisch U., Leorat J., Lesieur M., Mazure A. Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence // Phys. Fluids. 1973. V. 16 (8). P. 1366–1367.
- [6] Chkhetiani O.G., Eidelman A., Golbraikh E. Large- and small-scale turbulent spectra in MHD and atmospheric flows // Nonlin. Processes Geophys. 2006. V. 13(6). P. 613–620.
- [7] Клепиков И.Н., Покровская И.В., Шарков Е.А. Спутниковые и радиодистанционные исследования мезомасштабной атмосферной турбулентности в предтайфуновых ситуациях // Исследование Земли из космоса. 1995. № 3. С. 13–24.
- [8] Pouquet A., Mininni P. The interplay between helicity and rotation in turbulence: implications for scaling laws and small-scale dynamics // Philos. Trans. Roy. Soc. A. 2010. V. 368 (1916). P. 1635–1662.
- [9] Chkhetiani O., Golbraikh E. Turbulent field helicity fluctuations and mean helicity appearance // Int. J. Non Linear Mech. 2012. V. 47 (3) P. 113–117.
- [10] Чхетиани О.Г., Мусеев С.С., Гольбрайх Е.И. Генерация спиральности в турбулентных МГД течениях // ЖЭТФ. 1998. Т. 114 (9). С. 946–955.
- [11] Moffatt H., Tsinober A. Helicity in laminar and turbulent flow // Annu. Rev. Fluid Mech. 1992. V. 24. P. 281–312.
- [12] Курганский М.В. Связь между спиральностью и потенциальным вихрем в сжимаемой вращающейся жидкостью // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25 (12). С. 1326–1329.
- [13] Hide R. Superhelicity, helicity and potential vorticity. // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1989. V. 48 (1-3). P. 69–79.
- [14] Etling D. Some aspects of helicity in atmosphere flows // Beitr. Phys. Atmos. 1985. V. 58 (1). P. 88–100.
- [15] Чхетиани О.Г. О спиральной структуре экмановского пограничного слоя // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. №5. С. 614–620.

- [16] *Копров Б.М., Копров В.М., Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* Измерение турбулентной спиральности и ее спектра в пограничном слое атмосферы // ДАН. 2005. Т. 403. №5. С. 627–630.
- [17] *Deusebio E., Lindborg E.* Helicity in the Ekman boundary layer // J Fluid Mech. 2014. V. 755. P. 654–671.
- [18] *Chen Q., Chen S., Eyink G.L.* The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 2003. V. 15 (2). P. 361–374.
- [19] *Xia H., Byrne D., Falkovich G., Shats M.* Upscale energy transfer in thick turbulent fluid layers // Nat. Phys. 2011. V. 7(4). P. 321–324.
- [20] *Belian A., Chkhetiani O., Golbraikh E., Moiseev S.* Helical turbulence: turbulent viscosity and instability of the second moments // Physica A. 1998. V. 258 (1-2) P. 55–68.
- [21] *Гледзер Е.Б., Чхетиани О.Г.* Обратный каскад энергии в развитой турбулентности при нарушении симметрии спиральных мод // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 102. Вып. 7. С. 521–529.
- [22] *Smith L.M., Waleffe F.* Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence // Physics of fluids. 1999. V. 11 (6). P. 1608–1622.
- [23] *Lesieur M.* Turbulence in fluids // Kluwer Academic Publishers. 1987. 286 p.
- [24] *Waleffe F.* The nature of triad interactions in homogeneous turbulence // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. P. 350–363.
- [25] *Biferale L., Musacchio S., Toschi F.* Inverse energy cascade in three-dimensional isotropic turbulence // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108 (16). P. 164501.
- [26] *Sahoo G., Bonaccorso F., Biferale L.* Role of helicity for large-and small-scale turbulent fluctuations // Phys. Rev. E. 2015. V. 92 (5). P. 051002.
- [27] *Гледзер Е.Б.* Система гидродинамического типа, допускающая два квадратных интеграла движения // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209, № 5. С. 1046–1048.
- [28] *Ohkitani K., Yamada M.* Temporal intermittency in the energy cascade process and local Lyapunov analysis in fully-developed model turbulence // Prog. Theor. Phys. 1989. V. 81 (2). P. 329–341.
- [29] *Biferale L.* Shell models of energy cascade in turbulence // Annu. Rev. Fluid Mech. 2003. V. 35. P. 441–468.
- [30] *Stepanov R., Golbraikh E., Frick P., Shestakov A.* Hindered energy cascade in highly helical isotropic turbulence // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 115 (23). P. 234501.
- [31] *Orszag S.* Analytical theories of turbulence // J. Fluid Mech. 1970. V. 41 (02). P. 363–386.
- [32] *Гледзер Е.Б.* Эффекты вращения и спиральности в каскадных моделях турбулентности // Докл. РАН. 2008. Т. 419. № 4. С. 488–492.
- [33] *Гледзер Е.Б., Макаров А.А.* О построении каскадной модели двумерной турбулентности // Изв. Ан. СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 9. С. 899–906.
- [34] *Gilbert T., L'vov V.S., Pomyalov A., Procaccia I.* Inverse cascade regime in shell models of two-dimensional turbulence // Ph. Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89 (7). P. 074501.

## **Глава 2. Атмосферный пограничный слой**



## **2.1. Вертикальная структура городского «острова тепла» по данным микроволнового дистанционного зондирования**

***М.И. Варенцов<sup>1,2</sup>, В.П. Юшков<sup>3</sup>, Е.А. Миллер<sup>4</sup>, П.И. Константинов<sup>1</sup>***

*<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Географический факультет*

*<sup>2</sup>Институт физики атмосферы имени А.М. Обухова РАН*

*<sup>3</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет*

*<sup>4</sup>Центральная аэрологическая обсерватория*

В настоящем разделе исследуются особенности пространственного распределения температуры воздуха и термической стратификации (вертикальных градиентов) в атмосферном пограничном слое над крупным городом и его окрестностями на примере Московского мегаполиса. Рассматривается опыт использования данных синхронных измерений трех однотипных микроволновых температурных профиломеров МТР-5, установленных в центре города и пригородах в рамках эксперимента «Триада-2». Показано, что приземная положительная аномалия температуры, известная как городской «остров тепла», прослеживается до высоты в 200–300 метров от поверхности, формируя в пограничном слое атмосферы существенные различия температуры воздуха и ее вертикальных градиентов. Также рассматривается влияние направления ветра на особенности аномалий температуры на наветренной и подветренной сторонах города.

### **Введение**

Задача изучения климатических особенностей урбанизированных территорий актуальна уже потому, что более половины населения Земли в настоящее время проживает в городах [1]. Городская застройка оказывает существенно влияние на пограничный слой атмосферы, что приводит к формированию характерных микроклиматических особенностей, в первую очередь, возникновению феномена городского острова тепла [2, 3], а также формированию аномалий «шероховатости», приземной турбулентности, альбедо, теплоемкости и пр. Микроклимат города и атмосферный перенос в пограничном слое над ним влияет на экологическую обстановку, уровень атмосферного загрязнения и метеорологическую комфортность городской среды. Так, в летние периоды экстремальной жары за счет эффекта острова тепла продолжительность теплового стресса в городе существенно больше, чем за городом, что может приводить к увеличению смертности населения [4–6].

Активные исследования в области городской климатологии и метеорологии проводятся уже несколько десятков лет по всему миру, и непосредственно эффект городского острова тепла достаточно хорошо изучен на примере различных городов в различных климатических поясах. Для изучения этого феномена используются наблюдения на метеостанциях в городе и его окрестностях, спутниковые данные о температуре подстилающей поверхности, данные измерений, выполненных в рамках специализированных измерительных компаний, а также результаты численного моделирования с использованием широкого спектра моделей. Важно отметить, что понятие «острова тепла» тепла включает в себя, по сути, три связанных друг с другом эффекта: 1) «поверхностный» остров тепла (sur-

face urban heat island, SUHI), обусловленный различиями теплофизических свойств городских и естественных поверхностей (альbedo, теплоемкость, наличие растительного покрова) и выраженный в поле температуры поверхности, восстанавливаемой, например, по данным дистанционного зондирования из космоса [7–9]; 2) «классический» остров тепла в приземном слое, диагностируемый по данным измерений метеостанций на стандартных уровнях, а значит лежащий ниже «уровня крыш» (urban canopy layer, UCL). Характеристики перемешивания в этом слое зависят от режима турбулентности, наличия источников антропогенного тепла (автотранспорт, отапливаемые здания и др.) и морфологических параметров городской застройки; 3) остров тепла в пограничном слое над городом, выше «уровня крыш», зависящий также от направления ветра, орографии города и окружающей территории, вмещающего ландшафта и ряда других условий. В большинстве уже проведенных исследований делается акцент на изучение структуры приземных метеорологических полей. Выше приземного слоя (в несколько десятков метров) «городская аномалия» температуры изучена значительно хуже. Это связано с трудностью проведения сетевых (множественных) измерений выше «уровня крыш» на относительно небольшой площади мегаполиса, сложностью анализа трехмерных метеорологических полей над городом, а также с тем, что разница температур внутри городской среды и на ее границах сопоставима с ошибкой высотных измерений, составляющей около 1 градуса [10]. По этой причине вертикальная структура городского острова тепла в целом изучена значительно хуже, чем пространственная структура приземных метеорологических полей в пределах города и его окрестностях. Существующие исследования на эту тему показывают, что создаваемые городской поверхностью возмущения метеорологических полей простираются на сотни метров вверх [11–14], выражаясь не только непосредственно в температуре воздуха, но и приводя к формированию мезомасштабных циркуляций – например, так называемого «городского бриза» [15] и влияя на конвективные процессы и режим выпадения осадков [16–18]. Однако, ввиду того, что измерения в городском воздушном бассейне выше приземного слоя еще только развиваются, часто публикуются дискуссионные и даже противоречивые результаты, так как не всегда удается разобрать, является ли они статистически корректными, поскольку как модели, так и измерения могут содержать систематическую ошибку, поведение которой еще не изучено.

Например, интересным, хотя и слабо выраженным эффектом является возникновение над городом отрицательной аномалии температуры, так называемый crossover-эффект или «линза холода» [19], впервые, по-видимому, обнаруженный по результатам вертолетного зондирования атмосферы над Нью-Йорком на высоте 300–500 метров [11]. Экспериментальные исследования данного эффекта для других городов показывают противоречивые результаты [20]. Для Московского мегаполиса это явление проявляется в данных дистанционных [21] и контактных наблюдений [14]. Следует, однако понимать, что систематические ошибки этих наблюдений могут быть достаточно значимыми. Так, «тело» Останкинской башни, на которой проводятся долговременные измерения температуры, формирует и способствует удержанию вертикальных конвективных потоков в безветренные дни. Температурные профилемеры также имеют значимую (в сравнении с самим эффектом) и связанную по высоте ошибку измерений [22]. Поэтому численные оценки этого явления существенно разнятся у разных авторов. Мезомас-

штабные модели атмосферы, дополненными параметризациями городской подстилающей поверхности, также воспроизводят данный эффект, однако высота, на которой этот эффект наблюдается, существенно различается: численные эксперименты с моделью ARPS для Парижа [23] и с моделью COSMO-CLM для Москвы [24] демонстрируют возникновение отрицательной аномалии температуры средней интенсивностью в первые десятые доли градуса над городом на высоте 200–400 над поверхностью, а эксперименты с моделью WRF для Лондона воспроизводят ее на высоте более 1 км [25].

Еще один фактор, усложняющий изучение трехмерной структуры острова тепла – влияние набегающего воздушного потока и формирующихся в нем внутренних пограничных слоев сложной конфигурации – в частности, формирование приподнятого «языка тепла» над подветренной окраиной города. Этот аспект хорошо известен из теоретических представлений [3] и подтверждается данными численного моделирования [23], однако практически не исследовался на основе данных наблюдений.

Ввиду относительно небольшого числа работ на эту тему и существенных различий используемых методик, количественные оценки различных параметров, характеризующих вертикальную структуру острова тепла, также существенно различаются. Если характеристики приземного острова тепла Московского мегаполиса, изученные в ряде работ [26–29] хорошо согласуются друг с другом, то существующие оценки его вертикальной протяженности существенно расходятся. Например, оценка средней многолетней вертикальной протяженности формируемой городом термической аномалии на основе контактных измерений на Останкинской башне, приведенная в работе [14], составляет порядка 300 метров, причем положительная аномалия температуры прослеживается до высоты в 200 метров днем и 100 метров ночью, а выше этих уровней наблюдается приподнятый «остров холода». В работе [12] приводится оценка в 500–600 метров, полученная на основе данных измерений микроволновых температурных профиломеров за один год; а по данным анализа более длинных рядов наблюдений профиломеров приведенных в работе [30], в профилях среднесуточной температуры эффект острова тепла прослеживается до высоты 300 метров. А в работе [28] описываются температурные контрасты город – фон, полученные по данным дистанционного спутникового зондирования, и прослеживаемые вплоть до высот в 1–2 км. Существенным недостатком имеющихся исследований является разрыв между изучением пространственно-временной динамики «приземного» острова тепла, по данным измерений на метеорологических станциях, и изучением его вертикальной структуры по данным дистанционного зондирования – в существующих публикациях особенности, по сути, одного и того же явления изучаются раздельно друг от друга.

Целью настоящей работы является уточнение данных о вертикальной протяженности и структуре городского острова тепла в весенне-летний период по данным результатов измерений микроволновых профиломеров МТР-5 нового поколения, полученных в результате синхронных измерений в трех точках в пределах Московской агломерации в течение апреля–июля 2015 года. Новизна используемого подхода заключается в проведении измерений в пределах города (МГУ) и в двух его пригородах, Косино и Долгопрудном, схожих по локальным особенностям застройки и расположению относительно центра города, но находящихся с

разных его сторон, что позволяет более точно диагностировать различия типа «город – фон». Специальные усилия были предприняты для коррекции малых систематических ошибок в данных наблюдений, проведено сопоставление данных приземных и дистанционных измерений. Проведение непрерывных длительных измерений вертикальной термической структуры над городом открывает возможности для изучения четырехмерной (горизонтальной, вертикальной и временной) структуры создаваемой городом термической аномалии, в частности, особенностей стратификации атмосферы с подветренной и наветренной сторон мегаполиса.

## 1. Данные и методы

### 1.1. Профилемер МТР-5

Метеорологический температурный профилемер МТР-5, выпускаемый НПО «АТТЕХ» (<http://attex.net/>) является одним из приборов дистанционного зондирования пограничного слоя атмосферы [31]. Принцип его работы основан на одноканальном приеме собственного излучения молекулярного кислорода атмосферы в полосе 5 мм (60 ГГц) и механическом сканировании по углу возвышения [32, 33]. Принципы работы температурных профиломеров хорошо известны и изложены во многих статьях и монографиях (см., например, [34]). Ключевым преимуществом дистанционных измерений профилей температуры с поверхности является малая стоимость поддержания инфраструктуры измерений в сравнении с созданием высотных метеорологических мачт, а также возможности получать данные измерений непрерывно, с малым интервалом дискретизации (около 5 минут). Кроме того, температурные СВЧ радиометры очень надежны, поэтому они получают все большее распространение в практических измерениях и системах непрерывного мониторинга.

Сравнение с традиционными контактными измерениями на мачтах и с помощью радиозондов [35, 36, 10] показывает, что СВЧ профиломеры во многих ситуациях достаточно правильно восстанавливают вертикальные профили температуры, а разница между измерениями дистанционным и контактным способом составляет около 1°C, причем часть этой разницы обусловлена ошибками традиционных измерений, которые принимаются за «эталонные» и разным пространственно-временным масштабом осреднения по области измерений. Детальное сопоставление данных непрерывных контактных и дистанционных методов измерений и учет инструментальных ошибок позволяют отделить систематическую и случайную ошибку и в нижней части АПС добиться точности восстановления температуры до 0.5 °C [22].

Хотя дистанционные средства зондирования восстанавливают измеряемые характеристики в привычных метеорологических терминах, пространственная и временная изменчивость этих характеристик, в том числе случайная, в атмосферном пограничном слое (АПС) существенно отличается от наблюдаемой традиционными контактными методами. Существенно отличаются и корреляционные свойства ошибок измерений, поскольку восстановление вертикального профиля температуры происходит по совокупности связанных угловых измерений, а принцип работы температурного профиломера МТР-5 предполагает горизонтальную однородность слоев атмосферы в течении 2х минут сканирования при

расчетах вертикальных профилей. Следует учитывать, что температурные профиломеры проводят текущую калибровку радиометра по контактными измерениям внешним датчиком температуры, а также требуют специального выбора места для установки и направления луча зондирования.

## 1.2. Эксперимент «Трида-2»

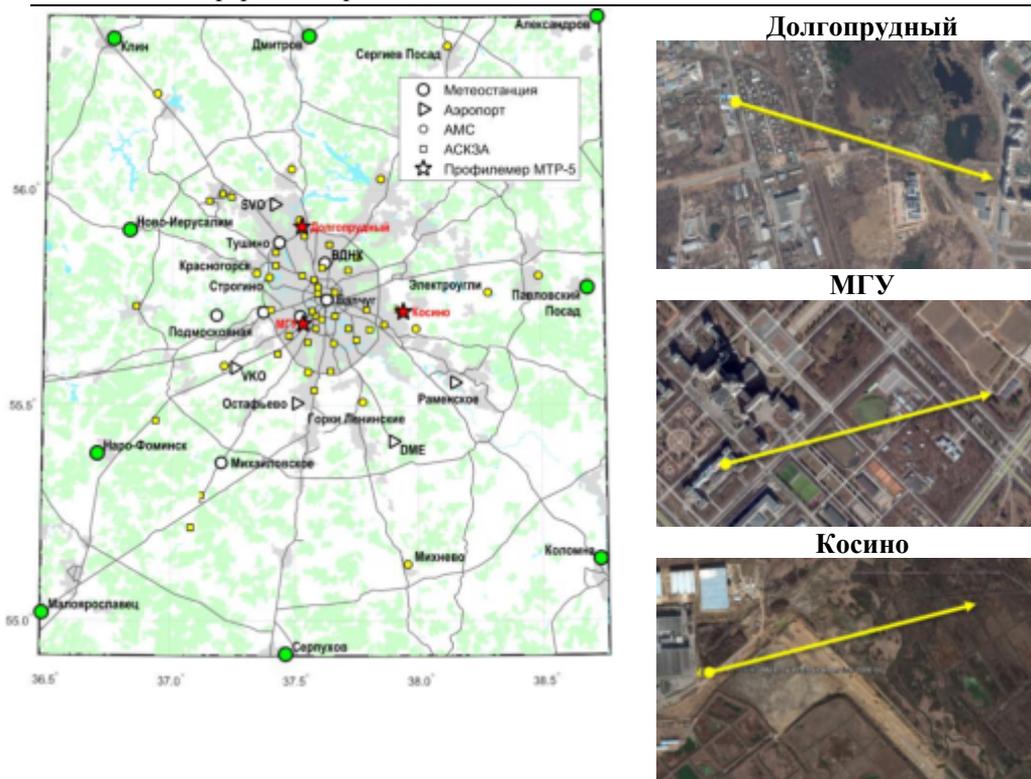
В рамках эксперимента «Трида-2» однотипные профиломеры МТП-5 были установлены в трех точках: на юго-западе Москвы, на территории МГУ имени М.В. Ломоносова на Воробьевых горах, в г. Долгопрудном, примыкающим к Москве с севера, в Центральной аэрологической обсерватории (ЦАО), и на восточной окраине Москвы, на мусоросжигательном заводе №4 в Косино (подробнее см. [37]). Местоположение этих точек показано на рис. 1. На этом же рисунке приведены спутниковые снимки окрестностей точек установки с указанием отрезков, температура воздуха над которыми измерялась профиломерами. Как видно, во всех трех случаях этот отрезок пересекал преимущественно незастроенные территории, что позволяет утверждать, что измерялась температура воздуха над естественной поверхностью в трех точках, расположенных в различных частях Московской агломерации. Высота установки прибора в Долгопрудном составляла примерно 20 метров, в МГУ – примерно 40 метров, в Косино – на высоте 4 метра. Синхронные измерения, анализируемые в данной работе, продолжались в период с 17 апреля по 3 июля 2015 года.

## 1.3. Данные приземных метеорологических наблюдений

Для оценки интенсивности острова тепла в поле приземной температуры и изучения ее взаимосвязи разницей температуры для различных высот по данным измерений профилометров, использовалась база данных метеорологических наблюдений в пределах Москвы и окрестностей, включающая себя данные измерений сетевых метеостанций, метеостанций в аэропортах Московского авиационного узла (Внуково, Домодедово, Шереметьево, Остафьева и Раменское), 25 новых автоматических метеостанций (АМС) Росгидромета, установленных в последние годы, и 38 автоматических станций контроля загрязнения атмосферы МосЭкоМониторинга, которые также измеряют основные метеорологические параметры.

Несмотря на то, что станции МосЭкоМониторинга не полностью соответствуют стандартам метеорологических измерений, сравнение данных измерений такой станции, расположенной на территории метеорологической обсерватории МГУ, с данными ее стандартных измерений, показало удовлетворительные результаты [24]. Кроме того, имеется опыт их использования для изучения феномена острова тепла Московского мегаполиса [29]. Расположение точек установки приборов МТП-5, а также всех метеостанций, АМС и АСКЗА, данные которых использовались в исследовании, приведены на рис. 1.

В качестве численной оценки интенсивности острова тепла для приземных измерений использовалось значение отклонение температуры ( $\Delta T$ ) от среднего «фонового» (загородного) уровня, который определялся по данным 9-ти метеостанций, окружающими Москву (Клин, Дмитров, Александров, Павловский Посад, Коломна, Серпухов, Малоярославец, Наро-Фоминск, Ново-Иерусалим).



**Рис. 1.** Схема расположения микроволновых профиломеров в рамках эксперимента Триада-2, а также метеостанций, АМС и АСКЗА, данные которых использовались в исследовании (слева); спутниковые снимки территории, окружающей точки установки приборов, с указанием отрезка на местности, вдоль которого происходило измерение излучения на нижнем уровне измерений (справа)

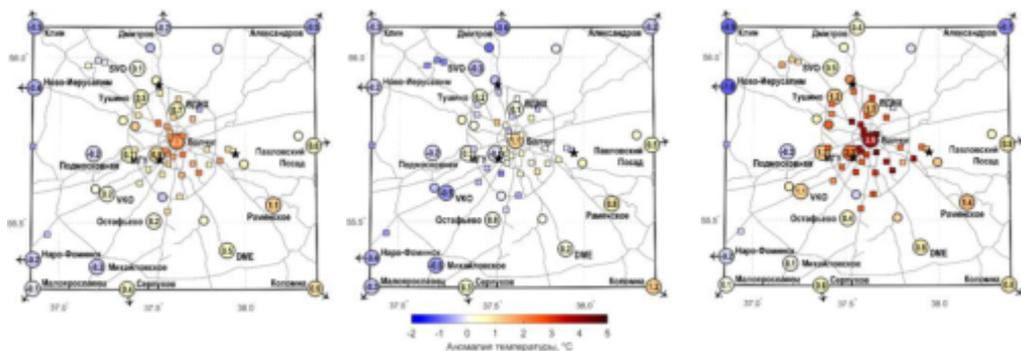
#### 1.4. Метеорологические условия в течение периода измерений

Для характеристики условий погоды в Московском регионе в течение периода измерений, были проанализированы отклонения основных метеорологических параметров от климатической нормы ВМО 1961–1990 гг. (прежде всего температуры воздуха и режима осадков). Так, по данным Метеорологической Обсерватории географического ф-та МГУ имени М.В.Ломоносова, апрель в столице выдался чуть теплее нормы (средняя температура месяца составила  $+6,2^{\circ}\text{C}$  против привычных  $5,8^{\circ}\text{C}$ ), и произошло это из-за теплого конца месяца (температура достигла  $+25,2$  градуса 29 числа). Режим осадков в апреле 2015 оставался в рамках климатической нормы. Май оказался напротив чрезвычайно влажным – за месяц выпало более 300% от месячной нормы – 154 мм осадков, причем 16 и 29 числа за сутки на город выливалось около 35 мм. При этом, месяц оказался еще и теплее обычного – средняя месячная температура составила  $+14,5^{\circ}\text{C}$  против привычных  $13,3^{\circ}\text{C}$ . 29 мая еще было и очень ветреным днем – скорость ветра на высоте 15 метров достигла в этот день своего максимума за месяц (15 м/с). Июнь также продолжил череду более теплых месяцев – превышение нормы ( $17^{\circ}\text{C}$ ) со-

ставило  $1,1^{\circ}\text{C}$ . Осадки выпадали неравномерно – за 20 и 27 июня в сумме выпало более 60% от итоговых 82 мм, что незначительно превысило привычное значение для первого летнего месяца (78 мм). Максимальная скорость ветра не поднималась выше 13 м/с.

## 2. Результаты и обсуждение

Прежде чем переходить к анализу данных измерений температурных профилемеров, необходимо рассмотреть особенности пространственно-временной динамики поля приземной температуры, чтобы убедиться, что в рассматриваемый период феномен городского острова тепла было достаточно хорошо выражен (т.к. известно, что данный эффект хорошо выражен лишь при благоприятных синоптических условиях), а также оценить, насколько существенны различия приземной температуры между точками установки микроволновых профилемеров в городе и пригородах. Последнее стало возможным в результате существенного расширения наблюдательной сети за счет появления новых АМС и АСКЗА в городе и пригородах в последние годы. Средние за рассматриваемый период значения аномалии температуры по данным имеющихся метеорологических наблюдений, рассчитанные для среднесуточной температуры, а также средней дневной (за 12 UTC) и средней ночной (0 UTC) температуры, приведены на рис. 2.



**Рис. 2.** Значения среднесуточной (справа), средней дневной (12 UTC, по центру) и ночной (0 UTC, слева) аномалии температуры воздуха за период с 17 апреля по 3 июля 2015 года. Метеостанции обозначены крупными круглыми маркерами (цифры для них указано значение аномалии температуры), АМС – маленькими круглыми маркерами, АСКЗА – маленькими квадратными маркерами. Местоположение профилемеров МТР-5 показано звездами. «Фоновые» станции, расположенные за пределами области картографирования, отмечены на ее границах

Средняя интенсивность острова тепла для центра города (для метеостанции Балчуг) за рассматриваемый период составила 2.3 градуса, при этом хорошо виден суточный ход: средняя интенсивность острова тепла за ночные сроки составляет почти  $4^{\circ}\text{C}$ , а за днем едва превышает  $1^{\circ}\text{C}$ . Благодаря большому количеству точек измерений как в пределах центральной части города, так и на его окраинах хорошо видны ключевые особенности пространственной структуры поля температуры: несмотря на существенную его пятнистость, обусловленную, видимо,

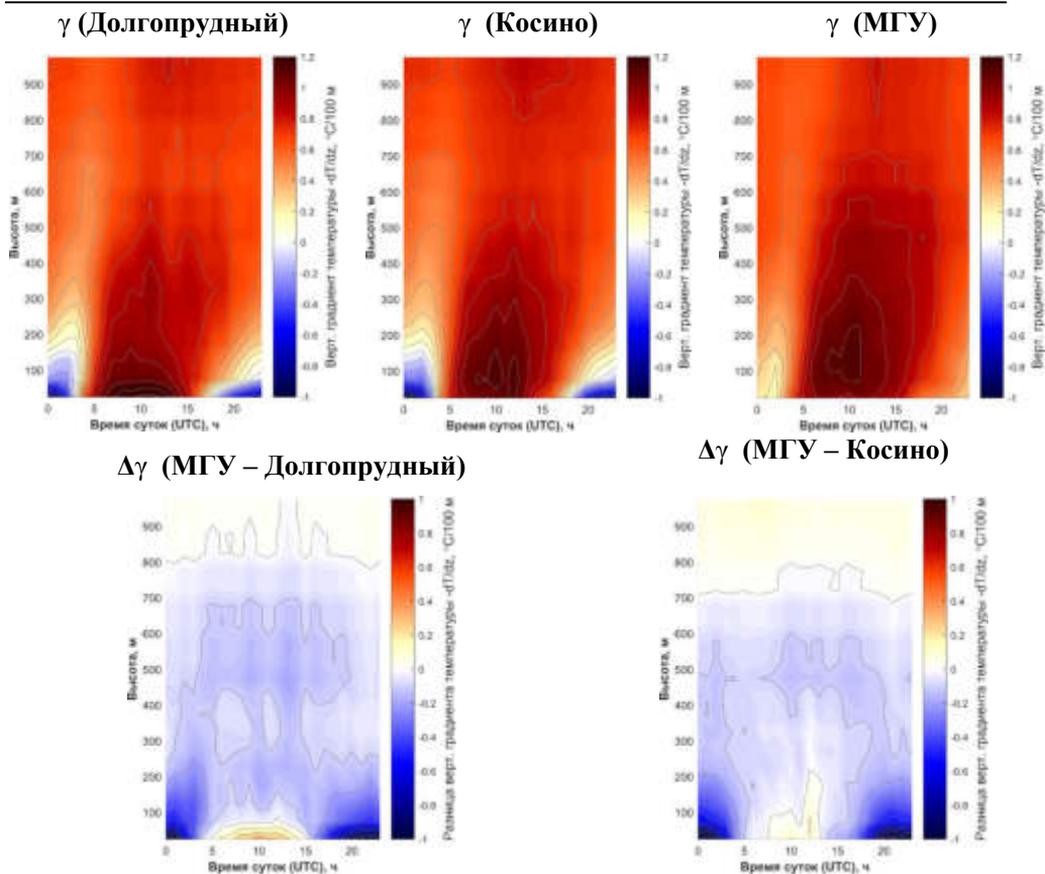
локальными особенностями территории, а также, возможно, погрешностями измерений АМС и АСКЗА, для среднесуточных и ночных температур прослеживается закономерность постепенного убывания температурной аномалии от центральной части городской агломерации к ее окраинам.

Пригородные точки измерений в Долгопрудном и Косино при этом оказываются холоднее центра города, но при этом теплее более удаленных загородных точек, и поэтому различия между ними и МГУ характеризуют аномалии термического режима города не относительно фоновой территории, а относительно пригорода, также подверженного отепляющему влиянию мегаполиса.

Перейдем теперь к анализу данных измерений температурных профиломеров и рассмотрим, в первую очередь, результаты сравнения средних значений вертикальных температурных градиентов ( $\gamma = -dT/dz$ ) и их суточного хода для каждой из точек измерений. Осреднение проводилось за период с 15 апреля по 3 июля 2015 года, только для сроков, когда для всех трех точек измерений отсутствовали пропуски данных (по этой причине, например, не учитываются измерения за значительную часть мая, так как за этот период данные измерений в Косино были недоступны). Распределения вертикальных температурных градиентов и их разницы между городской и пригородными точками ( $\Delta\gamma$ ) по высоте и времени суток приведены на рис. 3.

Для получения наглядного представления о вертикальной протяженности «острова тепла» можно построить профили для разницы температур  $\Delta T(h) = T(h) - T(1000)$ , где  $h$  – высота. Такой подход позволяет исключить нестационарную и значительную по амплитуде синоптическую и суточную изменчивость, оставляя для анализа лишь термическую стратификацию АПС. Полученные результаты хорошо согласуются с работами [12, 30]. Видно, что над городом наблюдается более неустойчивая стратификация, причем наиболее существенные различия наблюдаются в слое 0 – 300 метров в ночные часы, когда в Долгопрудном и Косино наблюдаются отрицательные значения  $\gamma$  (т.е. преобладают инверсии температуры), а в МГУ – слабоположительные. При этом для двух пригородных точек существенных различий в распределении средних значений вертикального градиента температуры по высоте и времени суток не наблюдается.

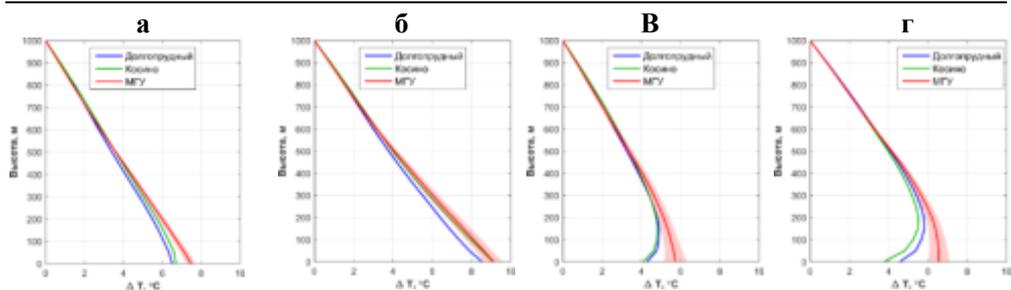
Можно допустить, что для высоты в 1000 метров над поверхностью горизонтальные различия между тремя рассматриваемыми точками в среднем за достаточно длительный период (для которого влияние отдельных синоптических ситуаций, в т.ч. фронтальных зон, можно считать случайным шумом) должны быть существенно меньше приземных контрастов температуры, обусловленных локальными особенностями подстилающей поверхности. Это подтверждается отсутствием на таких высотах значительных пространственных различий вертикальных градиентов температуры (что показано выше) и согласованностью их временной динамики [37]. Еще одной важной причиной для такого подхода является возможное наличие малой, но неизвестной систематической ошибки в данных измерений в разных точках. Следует упомянуть, что сложные приборы дистанционного зондирования, используемые для получения профилей температуры, являются хоть и однотипными, но разными, устанавливаются над разной подстилающей поверхностью на разной высоте и имеют не абсолютную, а относительную калибровку по внешнему датчику. По этой причине малые, но систематические, отклонения в измерениях внешним датчиком влияют на весь профиль



**Рис. 3.** Распределение средних значений вертикального градиента температуры ( $\gamma = -dT/dz$ ) для трех точек измерений (сверху), а также средней разницы между вертикальными градиентами температуры над городом и пригородами ( $\Delta\gamma$ , снизу) по высоте и времени суток за период 17 апреля – 3 июля 2015 года и. Изолинии равных градиентов температуры проведены через  $0.2 \text{ } ^\circ\text{C}/100 \text{ м}$

температуры. Кроме того, в нижней части АПС на пространственные различия влияет и высота установки прибора, то есть сравниваемые точки не находятся на одной высоте над уровнем земли.

Вертикальные профили средних значений отклонений температуры от температуры на верхнем уровне измерений построены и приведены на рисунке 4 для четырех выборок: 1) для всех сроков наблюдений, взятых для стандартных 3-часовых сроков наблюдений; 2) для всех дневных (12 UTC) сроков; 3) для всех ночных (0 UTC); для всех сроков, когда наблюдался хорошо выраженный остров тепла в поле приземной температуры воздуха (когда температура воздуха на метеостанции Балчуг превышала среднюю температуру по фоновым станциям более чем на  $4 \text{ } ^\circ\text{C}$ ). Выбор именно этого значения обусловлен тем, что оно соответствует средней ночной интенсивности городского острова тепла для станции Балчуг за анализируемый временной период – таким образом, выбирались случаи, когда интенсивность приземного острова тепла была выше среднего. Видно,

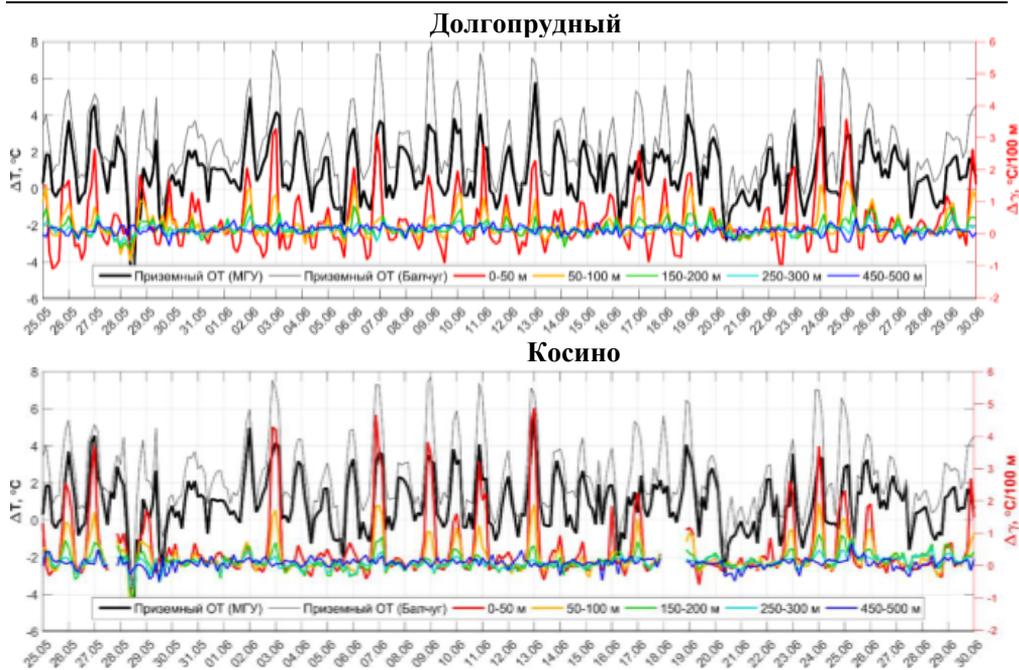


**Рис. 4.** Вертикальные профили разницы температуры  $\Delta T(h) = T(h) - T(1000)$ , осредненной все сроки измерений в течение эксперимента Триада-2 (а), за все дневные (12 UTC) сроки (б), за ночные (0 UTC) сроки (в), за все сроки с интенсивностью приземного острова тепла более  $4^\circ\text{C}$  (г). Доверительный интервал для профиля для МГУ показан светло-красным цветом

что значимые различия как для среднесуточных, так и для средних ночных профилей наблюдаются до высот 150–200 метров, и практически отсутствуют для средних дневных температур. Для выборки случаев с хорошо выраженным приземным островом тепла (в которую вошли в основном ночные, а также вечерние сроки) приземные различия несколько больше, чем просто в среднем за ночь, и также больше высота, до которой прослеживаются различия (200–300 метров). Полученные значения согласуются с частью работ, посвященных анализу вертикальной протяженности городского острова тепла над крупным мегаполисом по данным наблюдений и моделирования [14, 23, 30, 24]. При этом необходимо учитывать данные значения характеризуют лишь весенне-летний сезон и не классическую в городской климатологии разницу температур «город – фон», а различия между городом и его пригородами, которые также подвержены отепляющему влиянию локальной застройки и адвекций более теплого воздуха из центральных районов. Можно предположить, что последнее обстоятельство может приводить к занижению наблюдаемых термических контрастов в пограничном слое атмосферы и высоты, до которой они распространяются, относительно значений, которые получались бы, если бы мы использовали данные измерений над городом и над более удаленной от него «фоновой» точкой. Эффект приподнятого «острова холода» по измерениям приборов в данной конфигурации для данного временного периода не диагностируется.

Важной, однако не рассмотренной в известных исследованиях характеристикой высотной протяженности острова тепла в пограничном слое атмосферы является взаимосвязь его временной динамики с интенсивностью приземного острова тепла. Высота, до которой эта связь прослеживается, также характеризует вертикальную протяженность эффекта городского острова тепла, и должна согласовываться с оценкой, полученной на основании анализа вертикального распределения средних величин на рис. 3 и рис. 4.

Следует помнить, что разница температур между точками измерений температурных профиломеров может быть обусловлена не только реальными термическими контрастами, но и ошибками измерений, связанными с особенностями установки приборов, внешнего термодатчика и характеристиками подстилающей поверхности. Причем эти особенности оказывают влияние на значения температуры на всех высотах (т.е. ошибки на разных высотах не являются независимыми),



**Рис. 5.** Динамика интенсивности приземного острова тепла  $\Delta T$  для станций МГУ и Балчуг в сравнении с разницей вертикальных градиентов  $\Delta \gamma$  температуры между МГУ и двумя пригородными точками измерений за период с 25 мая по 30 июня 2015 года

при этом сама величина ошибки и ее временная динамика могут различаться для каждой из точек измерений, что добавляет дополнительную составляющую изменчивости разницы температуры между ними и затрудняет установление взаимосвязи между временной динамикой разницы температуры по данным измерений профиломеров и контактных измерений в приземном слое. Именно по этой причине согласованные по фазе и амплитуде колебания разницы температур между тремя точками прослеживаются вплоть до верхнего уровня измерений, что более подробно исследовано на примере данных эксперимента «Триада-1» за сентябрь–октябрь 2014 года [22].

Если же рассмотреть вертикальные градиенты температуры  $\gamma$ , результаты восстановления которых в меньшей степени подвержены влиянию локальных особенностей установки приборов, и разницу их значений между тремя точками  $\Delta \gamma$ , то для них связь с приземной интенсивностью острова тепла проявляется более однозначно. По графикам на рисунке 5 видно, что динамика величины  $\Delta \gamma$  между городской и пригородными точками для нижних уровней измерений хорошо согласуется по фазе характерных колебаний с динамикой интенсивности приземного острова тепла  $\Delta T$ . Отметим, что здесь и далее для сопоставления с данными метеорологических наблюдений, значения 5-минутных измерений профиломеров было выбраны для стандартных трехчасовых сроков и сглажены осреднением за 20 минут, предшествующих каждому сроку.

Видно, что максимальные значения  $\Delta \gamma$  достигаются в ночные часы вместе с максимальными значениями интенсивности острова тепла, также в значительной

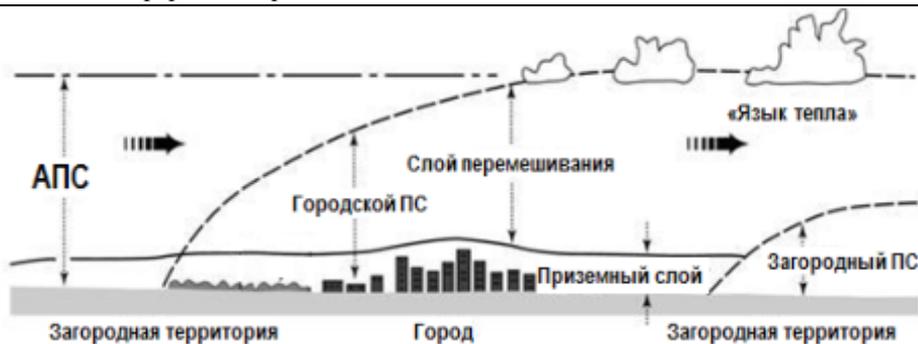


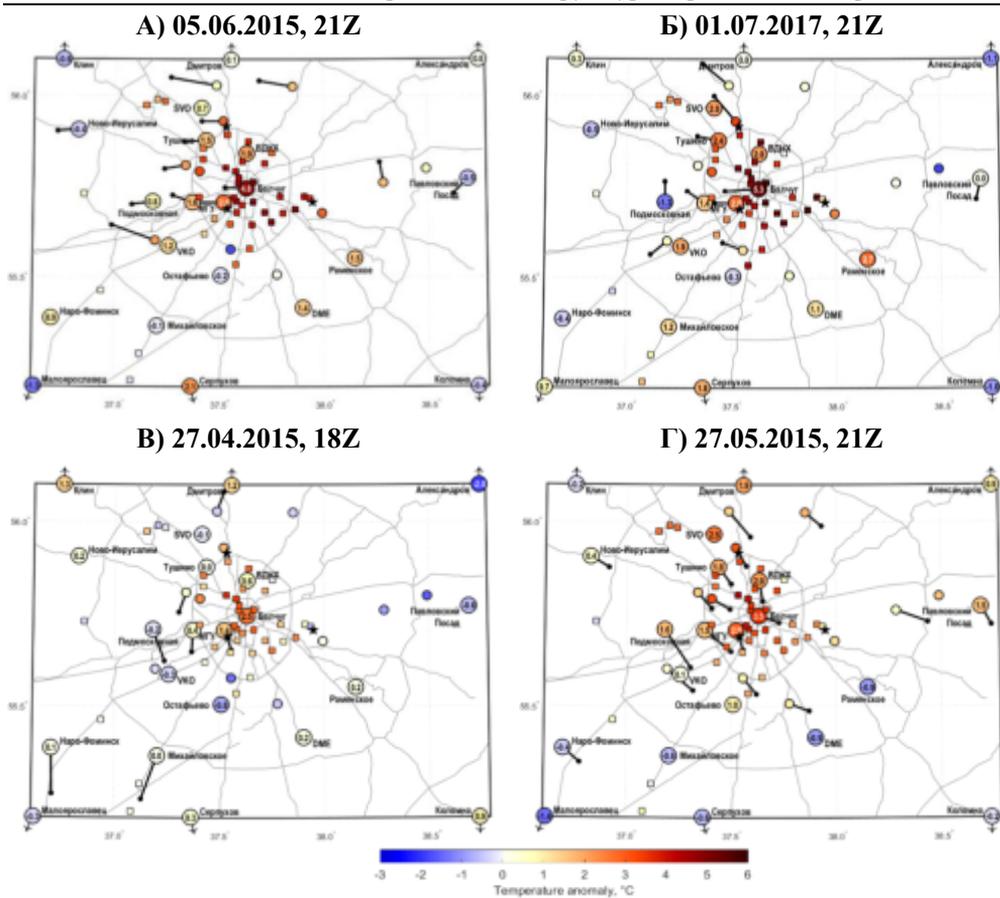
Рис. 6. Схема атмосферного пограничного слоя (АПС) над городом, адаптировано из [2]

степени согласованы колебания, обусловленные сменой синоптических периодов, имеющих характерную продолжительностью в несколько дней. Взаимосвязь значений  $\Delta T$  и  $\Delta \gamma$ , рассчитанных относительно Долгопрудного и Косино, прослеживается до уровней 200–300 метров, что совпадает с высотой, до которых прослеживаются различия средних значений температурных градиентов (рис. 3) и средних вертикальных профилей температуры (рис. 4). Наглядно проиллюстрировать данную закономерность могли бы коэффициенты корреляции между рассматриваемыми величинами, однако следует учитывать, что временные ряды этих величин имеют суточный ход и зависят от синоптической ситуации, а значит не являются независимыми величинами и даже стационарным случайным процессом. Поэтому методологически корректный расчет статистических связей требует достаточно сложной обработки исходных рядов данных, выделения детерминированной части, стационаризации и пр., что планируется сделать в дальнейшем.

Интересной новой темой, перспективы изучения которой открываются с использованием сетевых дистанционных измерений температуры, является исследование трехмерной структуры острова тепла над городом и ее зависимости от направления ветра.

На уровне общих представлений понятно, что в случае наличия устойчивого направления ветра, формируемая над городом термическая аномалия будет «сдуваться» на подветренную сторону города, причем теплый воздух при этом будет подниматься вверх, формируя приподнятый язык тепла (urban plume), ниже которого будет формироваться внутренний пограничный слой над естественной территорией. Схематическая иллюстрация этой концепции приведена на рис. 6. Можно предположить, что такие «языки тепла» над подветренной окраиной города могут оказывать влияние на статистические характеристики повторяемости и мощности атмосферных инверсий, влияя на условия перемешивания и распространения примесей, что обуславливает практический интерес к изучению данного процесса.

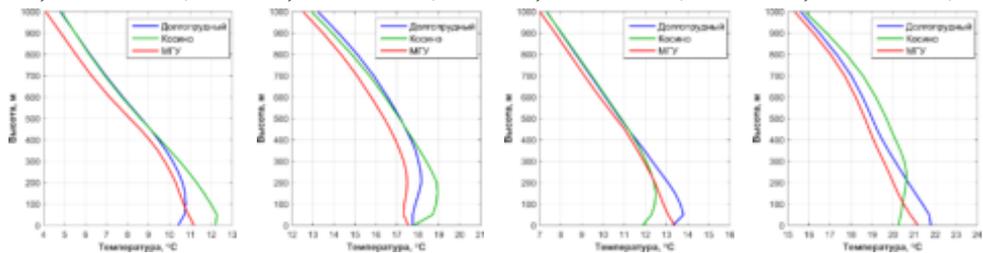
Попытка выявить и изучить формируемые таким образом «языки тепла» и их влияние на стратификацию атмосферы была предпринята с использованием данных эксперимента «Триада-2». При этом возник ряд сложностей, связанных с необходимостью разработки методологии идентификации подходящих для ана-



**Рис. 7.** Температура воздуха по данным измерений в Московском регионе за 4 срока наблюдений с преобладающим ветром северо-западных румбов (А, Б) и южных и юго-восточных румбов (В, Г). Метеостанции обозначены крупными круглыми маркерами (цифры для них указано значение аномалии температуры), АМС – маленькими круглыми маркерами, АСКЗА – маленькими квадратными маркерами. Местоположение профилей МТР-5 указано показанно звездами. Направление ветра указано направленными отрезками для станций, для которых оно доступно. «Фоновые» станции, расположенные за пределами области картографирования, отмечены на ее границах

лиза случаев с учетом направления ветра, положения приборов относительно направления ветра и застроенных территорий, а также стратификации атмосферы. Эти сложности, в совокупности с проблемой определения преобладающего направления ветра по данным метеорологических наблюдений в городе и его окрестностях, недостаточно продолжительным периодом измерений, а также с отсутствием пар точек измерений, расположенных на диаметрально противоположных окраинах города, на настоящий момент не позволили провести полноценную классификацию случаев с наблюдаемыми «языками тепла» и их статистический анализ. Тем не менее, удалось идентифицировать несколько отдельных случаев (case-studies), для которых прослеживается влияние направления ветра как на приземное

А) 05.06.2015, 21Z    Б) 01.07.2017, 21Z    В) 27.04.2015, 18Z    Г) 27.05.2015, 21Z



**Рис. 8.** Вертикальные профили температуры воздуха за 4 срока наблюдений с преобладающим ветром северо-западных румбов (А, Б) и южных и юго-восточных румбов (В, Г)

поле температуры, так и на особенности стратификации атмосферы с наветренной и подветренной сторон города.

Распределение температуры воздуха по данным измерений метеостанций и станций МосЭкоМониторинга для нескольких случаев приведено на рис. 7, а профили температуры воздуха – на рис. 8.

Для первых двух случаев (А и Б на рис. 7–8) наблюдалось преобладающее направление ветра северо-западных румбов (среднее направление ветра по окружающим Москву метеостанциям находилось между 270 и 360°), а для двух других (В, Г) – юго-восточных румбов (среднее направление ветра находилось между 90 и 180°). Стрелки, указывающие направление ветра на рис. 7, показывают, что в выбранных случаях ветер данных румбов действительно наблюдался на значительном числе станций (т.е. среднее направление ветра не является «формальным» результатом сложения векторов, направленных в разные стороны). Выбор именно таких направлений ветра обусловлен тем, что при северном и северо-западном ветре Долгопрудный оказывается на наветренной стороне мегаполиса, а Косино – на подветренной, а при юго-восточном ветре наблюдается симметричная обратная ситуация. При этом во всех четырех случаях наблюдался выраженный эффект острова тепла в поле приземной температуры (его интенсивность для центра города более 2.5 °С являлась одним из критериев отбора случаев).

Хорошо видно, что особенности распределение приземной температуры на рис. 7 и ее вертикального распределения на рис. 8 различаются для случаев с преобладающим северо-западным и юго-восточным ветром. На рис. 7 видно, что область наиболее высоких температур сдвигается на подветренную сторону города. Это соответствует результатам подобных исследований на примере Лондона [38] и Бирмингема [39, 40]. Как показывают профили температуры, представленные на рис. 8 для этих случаев, на высотах до 200–400 метров с подветренной стороны города наблюдаются более высокие температуры, чем с наветренной стороны. При этом особенности стратификации различаются. Так, в случаях Б и В над подветренной окраиной формируется характерный приподнятый язык тепла инверсия температуры в нижнем 50-метровом слое. А в случаях А и Г, напротив, на подветренной окраине города наблюдаются не только более высокие значения температуры, но и менее устойчивая стратификация. Все это показывает, что измерения даже всего лишь трех приборов позволяют фиксировать и наглядно демонстрировать сложные трехмерные эффекты в пограничном слое атмосферы над городом (которые ранее можно было исследовать только по данным мо-

делирования), и, с другой стороны, подчеркивает сложность этих эффектов и необходимость проведения более детальных и аккуратных измерений для их полноценного изучения.

### Заключение

Анализ пространственных различий приземной температуры и ее вертикальных градиентов (термической стратификации) в пограничном слое атмосферы над городом Москвой и двумя его пригородами по данным измерений температурных профиломеров, выполненный с учетом возможных систематических ошибок дистанционных измерений, показал, что в течение весенне-летнего периода влияние городского острова тепла распространяется до высоты 200–300 метров над поверхностью. Временная динамика интенсивности острова тепла в поле приземной температуры согласуется с динамикой разницы ее вертикальных градиентов между городом и пригородами на высотах до 300 метров. Выше этого уровня профили температуры и термической стратификации над городом и пригородами ведут себя синхронно с точностью до ошибок измерений. Эффект приподнятого острова холода, формирование которого над городами (в том числе над Москвой) отмечается в ряде работ, не удалось диагностировать по данным измерений температурных профиломеров, что может быть связано как с его малой интенсивностью, не превышающей погрешности измерений, так и с особенностями расположения точек измерений, не позволяющим рассмотреть все различия между городом и «фоновой» загородной территорией. Также показано, что пространственные особенности городского острова тепла в поле приземной температуры и термической стратификации атмосферы над городом и пригородами зависят от направления ветра: область наибольших аномалий температуры «сдувается» набегающим воздушным потоком на подветренную сторону города, а над подветренным пригородом при устойчивой стратификации может формироваться приподнятый «язык» тепла.

### Литература

- [1] U.N. World Urbanization Prospects. The 2009 Revision. Rep., 1-47 p. United Nations. Department of Economic and Social Affairs. Population Division. New York, 2010.
- [2] Ландсберг Г.Е. Климат города. Л.: Гидрометеиздат, 1983. С. 248.
- [3] Oke T.R. Boundary layer climates. Routledge. 1987. 435 p.
- [4] Buechley R.W., Van Bruggen J., Truppi L.E. Heat island = death island? // Environmental Res. 1972. V. 5. № 1. P. 85-92.
- [5] Tan J., Zheng Y., Tang X., Guo C., Li L., Song G., Zhen X., Yuan D., Kalkstein A.D., Li F., Chen H. The urban heat island and its impact on heat waves and human health in Shanghai // International Journal of Biometeorology. 2010. Vol. 54. №1. P. 74-84.
- [6] Konstantinov P.I., Varentsov M.I., Malinina E.P. Modeling of thermal comfort conditions inside the urban boundary layer during Moscow's 2010 summer heat wave (case-study) // Urban Climate. 2014. Vol. 10. Pt. 3. P. 563–572.
- [7] Peng S., Piao S., Ciais P., Friedlingstein P., Otle C., Bréon F.M., Nan H., Zhou L., Myneni R.B. Surface urban heat island across 419 global big cities // Environmental science & technology. 2011. V. 46. № 2. P. 696-703.

- [8] *Hu L., Brunzell N.A.* A new perspective to assess the urban heat island through remotely sensed atmospheric profiles // *Remote Sensing of Environment*. 2015. V. 158. P. 393–406.
- [9] *Балдина Е.А., Константинов П.И., Грищенко М.Ю., Варенцов М.И.* Исследование городских островов тепла с помощью данных дистанционного зондирования в инфракрасном тепловом диапазоне // *Земля из космоса – наиболее эффективные решения*. 2015. Специальный выпуск. С. 38–42.
- [10] *Crewell S., Löhnert U.* Accuracy of boundary layer temperature profiles retrieved with multifrequency multiangle microwave radiometry // *Geosciences and Remote Sensing, IEEE Transactions on*. 2007. V. 45 (7). P. 2195–2201.
- [11] *Bornstein R.D.* Observations of the Urban Heat Island Effect in New York City // *J. Appl. Meteorol.* 1968. V. 7. P. 575–582.
- [12] *Кадыгров Е.Н., Кузнецова И.Н., Голицын Г.С.* Остров тепла в пограничном слое атмосферы над большим городом: новые результаты на основе дистанционных данных // *ДАН*. 2002. Т. 385. № 4. С. 541–548.
- [13] *Khaikine M.N. et al.* Investigation of temporal-spatial parameters of an urban heat island on the basis of passive microwave remote sensing // *Theoretical and Applied Climatology*. 2006. Т. 84. № 1. С. 161–169.
- [14] *Локощенко М.А., Корнеева И.А., Кочин А.В., Дубовецкий А.З., Новицкий М.А., Разин П.Е.* О высотной протяженности городского “острова тепла” над Москвой // *Докл. РАН*. 2016. Т. 466. №2. С. 213–217.
- [15] *Lemonsu A., Masson V.* Simulation of a summer urban breeze over Paris // *Boundary-Layer Meteorology*. 2002. V. 104. № 3. P. 463–490.
- [16] *Bornstein R., LeRoy G.* Urban barrier effects on convective and frontal thunderstorms // *Extended Abstracts, Fourth Conf. Mesoscale Processes*. Boulder, CO: Amer. Meteor. Soc. 1990. P. 120–121.
- [17] *Bornstein R., Lin Q.* Urban heat islands and summertime convective thunderstorms in Atlanta: three cases studies // *Atmospheric Environment*. 2000. Vol. 34. P. 507–516.
- [18] *Shepherd J.M., Pierce H., Negri A.J.* Rainfall modification by major urban areas: Observations from spaceborne rain radar on the TRMM satellite // *Journal of Applied Meteorology*. 2002. V. 41. № 7. P. 689–701.
- [19] *Нахаев М.И.* Особенности термической структуры нижних слоев атмосферы в Московском мегаполисе по данным микроволновых измерений // *Дисс. канд. физ.-мат. наук*. Москва, 2009.
- [20] *Tyson P.D., Du Toit W.J.F., Fuggle R.F.* Temperature structure above cities: review and preliminary findings from the Johannesburg urban heat island project // *Atmospheric Environment (1967)*. 1972. V. 6. № 8. P. 533–542.
- [21] *Кузнецова И.Н., Нахаев М.И.* Сезонные особенности термической структуры нижних слоев атмосферы в Московском мегаполисе по данным микроволновых измерений температуры // *80 лет Гидрометцентру России*. М.: ТРИАДА ЛТД, 2010. С. 389–400.
- [22] *Юшков В.* Что может измерять температурный профилемер? // *Метеорология и гидрология*. 2014. № 12. С. 76–88.
- [23] *Wouters H. et al.* The diurnal evolution of the urban heat island of Paris: a model-based case study during Summer 2006 // *Atmospheric Chemistry and Physics*. 2013. V. 13. № 17. P. 8525–8541.
- [24] *Варенцов М.И., Самсонов Т.Е., Кислов А.В., Константинов П.И.* Моделирование микроклимата московской агломерации с использованием региональной климатической модели COSMO-CLM // *Вестник Московского университета, серия география*. 2017 (в печати).

[25] Sparks N., Toumi R. Numerical Simulations of Daytime Temperature and Humidity Crossover Effects in London // *Boundary-Layer Meteorology*. 2015. V. 154. № 1. P. 101–117.

[26] Lokoshchenko M.A. Urban ‘heat island’ in Moscow // *Urban Climate*. 2014. Vol. 10, part 3. P. 550–562.

[27] Varentsov M., Konstantinov P., Samsonov T. Investigation of detailed spatial structure of the Moscow urban heat island with application of the newest meteorological observations and regional climate modelling // *European Geosciences Union General Assembly 2016*. Vol. 18 of *Geophysical Research Abstracts*. Germany, 2016.

[28] Кислов А.В., Варенцов М.И., Горлач И.А., Алексеева Л.И. «Остров тепла» московской агломерации и урбанистическое усиление глобального потепления // *Вестник Московского университета, серия география*. 2017 (в печати).

[29] Горчаков Г.И. и др. Московский остров тепла в блокирующем антициклоне летом 2010 г. // *Докл. РАН*. 2014. Вып. 456 (5). С. 591–595.

[30] Кадыгров Е.Н., Кузнецова И.Н., Нахаев М.И., Брусова Н.Е., Ганьшин Е.В. Диагностика городских и мезомасштабных атмосферных процессов по данным микроволновых измерений в московском мегаполисе // *Труды Всероссийских Армандовских чтений: Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред*. VII Всероссийская научная конференция. Муром: Изд.-пол. Центр МиВлГУ, 2016. С. 55–64. ISSN 2304-0297(CD-ROM).

[31] Emeis S. *Surface-based remote sensing of the atmospheric boundary layer*. Springer Science & Business Media, 2010.

[32] Гайкович К.П., Кадыгров Е.Н., Косов А.С., Троицкий А.В. Термическое зондирование пограничного слоя атмосферы в центре линий поглощения кислорода // *Изв. Вузов. Радиофизика*. 1992. Вып. 35 (2). С. 130–136.

[33] Troitsky A.V., Gajkovich K.P., Gromov V.D., Kadygrov E.N., Kosov A.S. Thermal sounding of the atmospheric boundary layer in the oxygen absorption band center at 60 GHz // *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 1993. V. 31 (1). P. 116–120.

[34] Westwater E.R., Crewell S., Matzler C. Surface-based microwave and millimeter wave radiometric remote sensing of the troposphere: A tutorial // *IEEE Geoscience and Remote Sensing Society Newsletter*. 2005. V. 134. P. 16–33.

[35] Kadygrov E.N., Pick D.R. The potential for temperature retrieval from an angular-scanning single-channel microwave radiometer and some comparisons with in situ observations // *Meteorol. Apph.* 1998. V. 5. P. 393–404.

[36] Вязанкин А.С., Кадыгров Е.Н., Мазурин Н.Ф., Троицкий А.В., Шур Г.Н. Сравнение данных микроволнового радиометра и высотной метеорологической мачты при измерениях профиля температуры и структуры ее неоднородностей // *Метеорология и гидрология*. 2001. № 3. С. 34–45.

[37] Юшков В.П. Оценка пространственных неоднородностей температурной стратификации в пограничном слое Московского мегаполиса по данным дистанционных измерений // *Оптика атмосферы и океана*. 2015. Т. 28. №11. С. 1012–2022.

[38] Bohnenstengel S.I., Evans S., Clark P.A., Belcher S.E. Simulations of the London urban heat island // *Quarterly J. Royal Meteorol. Soc.* 2011. V. 137. № 659. P. 1625–1640.

[39] Heaviside C., Cai X.M., Vardoulakis S. The effects of horizontal advection on the urban heat island in Birmingham and the West Midlands, United Kingdom during a heat-wave // *Quarterly J. Royal Meteorol. Soc.* 2015. V. 141. № 689. P. 1429–1441.

[40] Bassett R., Cai X., Chapman L., Heaviside C., Thorne J.E., Muller C.L., Young D.T., Warren E.L. Observations of urban heat island advection from a high-density monitoring network // *Quarterly J. Royal Meteorol. Soc.* 2016. V. 142. № 699. P. 2434–2441.

## 2.2. Оценки крупномасштабной спиральности в АПС по данным акустического зондирования

*Н.В. Вазаева<sup>1</sup>, О.Г. Чхетиани<sup>1,2</sup>, Р.Д. Кузнецов<sup>1,3</sup>,  
М.А. Каллистратова<sup>1</sup>, В.Ф. Крамар<sup>1</sup>, В.С. Люлюкин<sup>1</sup>, Д.Д. Кузнецов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Институт космических исследований РАН*

<sup>3</sup>*Финский метеорологический институт, г. Хельсинки*

По результатам акустического зондирования в атмосферном пограничном слое получены распределения спиральности поля скорости. Значение спиральности крупномасштабных движений ( $0,3-0,6 \text{ м/с}^2$ ) на порядок превосходят ее независимо измеренные турбулентные значения, к которым оказываются близки значения средней по слою спиральности ( $0,02-0,12 \text{ м/с}^2$ ). В условиях отсутствия сильной конвекции обнаружена хорошая корреляция хода спиральности с ходом квадрата скорости ветра на верхних уровнях зондирования (400–600 м).

### Введение

Начиная с 1950-х гг., особый интерес стал привлекаться к явлениям мезомасштабной циркуляции в АПС, ее характерным проявлениям, в частности, таким как квазипериодические валиковые структуры – упорядоченные спиралевидные вихри (роллы) с горизонтальной осью [1, 2]. Подобные долгоживущие вихри образуются уже при достаточно слабом ветре 2–3,5 м/с [3], когда происходит перестройка трехмерных конвективных ячеек в продольно ориентированные, и они хорошо визуализируются так называемыми «облачными улицами», отчетливо видимыми на спутниковых изображениях [4]. Их горизонтальные масштабы составляют порядка 3–5 км [3].

Структуры мезомасштабной циркуляции в АПС влияют на характеристики турбулентности, формируют профиль среднего течения, играют существенную роль в процессах перемешивания, в процессах переноса влаги, тепла и других субстанций через АПС в свободную атмосферу. Согласно оценкам, сделанным в [5, 6, 7], вторичные потоки воздуха в виде валиковых структур отвечают за 20–60 % всего тепло-массопереноса через АПС.

Теоретические исследования показывают, что возникновение и существование крупномасштабных когерентных структур скорее всего являются следствием развития в АПС какого-нибудь типа гидродинамической неустойчивости: динамической неустойчивости (неустойчивости, связанной с наличием точки перегиба на профиле агеострофической компоненты скорости ветра); «параллельной» неустойчивости (иногда считают частным случаем динамической неустойчивости, потеря неустойчивости в этом случае не определяется наличием точки перегиба, а происходит за счет связи между горизонтальными компонентами скорости ветра) или конвективной неустойчивости.

Модель с конвективной неустойчивостью позволяет получить спиралеобразные вихри, более или менее ориентированные в направлении геострофического ветра. Однако наблюдаемые длины волны и отношение длины волны к высоте вихрей бывают намного больше предсказанных теорией значений, поэтому во-

прос о физической причине возникновения квазипараллельных валиковых структур остается открытым. Возникают трудности в определении количественных данных о характеристиках когерентных структур в АПС.

Одной из значимых характеристик когерентных структур в АПС является спиральность – скалярное произведение поля скорости и завихренности [8]:

$$H = \mathbf{v} \cdot \text{rot}(\mathbf{v}).$$

Крупномасштабные течения в АПС, структура которых определяется совместным действием турбулентного трения и силы Кориолиса, обладают ненулевой спиральностью [9, 10, 11]. Соответственно, турбулентные движения в АПС характеризуются ненулевой спиральностью [12], что было подтверждено непосредственно в натуральных экспериментах Института физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН [13, 14] и результатами прямого численного (DNS) моделирования [15]. Особый интерес к спиральности вызван ее ролью в генезисе и динамике крупномасштабных движений атмосферы и океана [16], преимуществами от параметризации ее динамического эффекта в мезомасштабных моделях АПС [17] и возможным использованием как прогностического фактора [18].

Для получения данных о значениях спиральности необходимо знать пространственные распределения полей скорости ветра.

В настоящем исследовании проведен анализ результатов акустического зондирования атмосферного пограничного слоя, выполненных в экспедициях ИФА им. А.М. Обухова РАН в аридно-степных зонах юга России в Черноземельском районе республики Калмыкия (2007 г.) [3], на базе Цимлянской научной станции (2012 г.) [14] и на Шпицбергене (2009 г.) [19]. На основе используемых данных получены профили компонент поля скорости на высотах до 400–600 м (на Шпицбергене – до 100 м) с шагом 10–30 м и временным разрешением 5–10 секунд. Рассчитано пространственное распределение спиральности и ее временной ход, проведено сравнение с теоретическими оценками и расчетами по мезомасштабной атмосферной модели WRF-ARW.

## 1. Спиральное течение в экмановском пограничном слое

Компоненты поля скорости для экмановского течения с условиями прилипания на нижней границе имеют вид:

$$U(z) = U_G \left( 1 - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \cos \frac{z}{h} \right) - V_G \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h}; \quad (1)$$

$$V(z) = V_G \left( 1 - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \cos \frac{z}{h} \right) + U_G \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \sin \frac{z}{h}. \quad (2)$$

Здесь  $h = \sqrt{K/\Omega}$  – экмановский масштаб;  $\Omega$  – частота внешнего вращения (вращения Земли);  $V_G$ ,  $U_G$  – компоненты скорости геострофического ветра в свободной атмосфере;  $z$  – вертикальная координата;  $K$  – коэффициент турбулентной вязкости, вводимый по аналогии с кинематической вязкостью. Такой подход широко применяется при решении уравнений Экмана и исследовании задач устойчивости [8, 20], анализе мезомасштабных движений в АПС [21].

Спиральность в данном случае определяется только горизонтальными компонентами завихренности и имеет вид [8, 10, 11]:

$$H(z) = -U(z) \frac{\partial V}{\partial z} + V(z) \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3)$$

Подставив (1) и (2) в (3) получаем для вертикального распределения спиральности [8]:

$$H(z) = u_g^2 h^{-1} \left\{ \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \left( \sin \frac{z}{h} - \cos \frac{z}{h} \right) + \exp\left(-\frac{2z}{h}\right) \right\},$$

здесь  $u_g^2 = U_G^2 + V_G^2$ .

Откуда после интегрирования по вертикальной координате получим, что интегральная спиральность  $H_{int}$  в точности равна одной второй квадрата скорости геострофического ветра [10]:

$$H_{int} = \int_0^{\infty} H(z) dz = \frac{1}{2} (U_G^2 + V_G^2). \quad (4)$$

С учетом реальной структуры турбулентного АПС при различных типах стратификации значения интегральной спиральности будут отличными от (4), однако могут использоваться в качестве ее оценки и, как показано ниже, хорошо отражают ее временную динамику.

В дополнение приведем значения интегральной спиральности для простых модификаций экмановского профиля, уже обеспечивающих уменьшение угла поворота по сравнению с экмановским значением 45 градусов.

При учете вклада турбулентной спиральности в напряжения Рейнольдса [12]

$$H_{int} = \frac{1}{2} (U_G^2 + V_G^2) ((1 + g^2)^{1/2} - g),$$

где  $g \sim 0.1-0.3$  характеризует турбулентную спиральность. Для решения Тэйлора [22], в котором на нижней границе рассматриваются условия проскальзывания ( $\frac{\partial U(V)}{\partial z} = \lambda U(V)$ ), для интегральной спиральности имеем

$$H_{int} = \frac{(U_G^2 + V_G^2)}{2(1 + \frac{2g^2}{2g+1})}.$$

Здесь  $\lambda = \frac{1}{\epsilon H}$ .

## 2. Аппаратура и условия проведения измерений

Во всех экспедициях, перечисленных во Введении, измерения вертикальных профилей компонент скорости ветра проводились методом акустического зондирования атмосферы. Акустические локаторы – содары – появились в 1970-х годах на базе идей А.М. Обухова о применении явления рассеяния звука на мелко-масштабных турбулентных неоднородностях для атмосферных исследований [23]. Надёжность и точность содарных измерений исследовалась в течение многих лет [24]. В настоящее время акустическое зондирование является хорошо апробированным методом исследования нижней части АПС [25, 26], и широко применяется во всём мире [27, 28].

В наших измерениях использовались разработанные и изготовленные в ИФА РАН доплеровские трехкомпонентные моностатические содары ЛАТАН-3М и минисодары ЛАТАН-3м с частотно-кодированным зондирующим импульсом (измерение вертикальных профилей 3х компонент скорости ветра) [3, 29, 30].

1. В период с 21 июля по 1 августа 2007 г. содарные измерения проводились в прикаспийской низменности в республике Калмыкия вблизи поселка Комсомольский, южнее национального парка «Черные земли». Три пространственно разнесенных содаров были объединены в единую сеть при помощи радиотелефо-

нов и синхронизировались по сигналам со спутников системы GPS [3]. Для оценки вертикальной протяженности восходящих конвективных потоков воздуха использовался длинноволновый содар ЛАТАН-3М с разрешающей способностью по высоте 30 м, интервалом излучения пакетов импульсов 10 сек, высотным диапазоном 800 м и базовой несущей частотой 2 кГц. Три минисодара с вертикальным разрешением 20 м, периодом следования импульсов 5 сек, высотным диапазоном 400 м, базовой несущей частотой 3,5 кГц располагались в вершинах треугольника, с длинами сторон 3,5 км, 1,4 км и 3,2 км. Такая конфигурация позволяла оценить горизонтальные масштабы конвективных движений и детали пространственной структуры вихревых когерентных образований.

2. В период со 2 по 26 августа 2012 г. содарные измерения проводились на Цимлянской научной станции ИФА параллельно с измерениями, представленными в статье [14], в которой содержится подробное описание места и условий проведения работ. Использовался один минисодар ЛАТАН-3м с улучшенным до 10 м вертикальным разрешением.

3. В период с 3 по 13 мая 2009 г. измерения проходили на о. Шпицберген. Содары располагались на леднике Конгсвеген. Описание места и условий проведения измерений можно найти в [19]. Использовались 2 минисодара ЛАТАН-3м.

Измерения проводились круглосуточно. Временной ход распределения вертикальной скорости в Калмыкии и на Цимлянской научной станции (см., напр., рис. 5) хорошо иллюстрирует смену режимов стратификации: устойчивого на неустойчивый, и наоборот. Для устойчивой стратификации вертикальная скорость на высоте пограничного слоя изменяет знак на противоположный. На Шпицбергене в период измерений наблюдался устойчивый режим стратификации.

### **3. Методы обработки данных и моделирования**

Имеющиеся данные позволяют нам рассчитывать только горизонтальные компоненты спиральности. Следует отметить, что в обычных условиях основной вклад в спиральность дает ее горизонтальная составляющая, являющаяся, в частности, определяющей для валиковой мезомасштабной циркуляции в АПС [9, 31]. Значения вертикально составляющей, в данном случае, оказываются в 5–10 раз меньше горизонтальной, поскольку определяются произведением вертикальной скорости на значения горизонтального сдвига, значительно меньшего, чем вертикальный (см., напр., таблицу в [31]). На это указывают и наблюдаемые значения вертикальной компоненты турбулентной спиральности в АПС [13, 14], очевидным образом связанной с ее значениями для движений крупных масштабов. Далее мы будем говорить спиральность, полагая ее горизонтальную компоненту, вычисляемую согласно (3).

Отметим, что вертикальная составляющая спиральности оказывается значительной и превосходящей горизонтальную для интенсивных атмосферных вихрей типа торнадо и пыльных дьяволов.

При вычислении спиральности используется осредненное значение компонент скорости ветра. Для этой цели применялся прямоугольный фильтр. Выбор временного интервала осреднения проводился эмпирическим путем и составлял в данном случае 10 минут. При таких значениях хорошо воспроизводилась про-

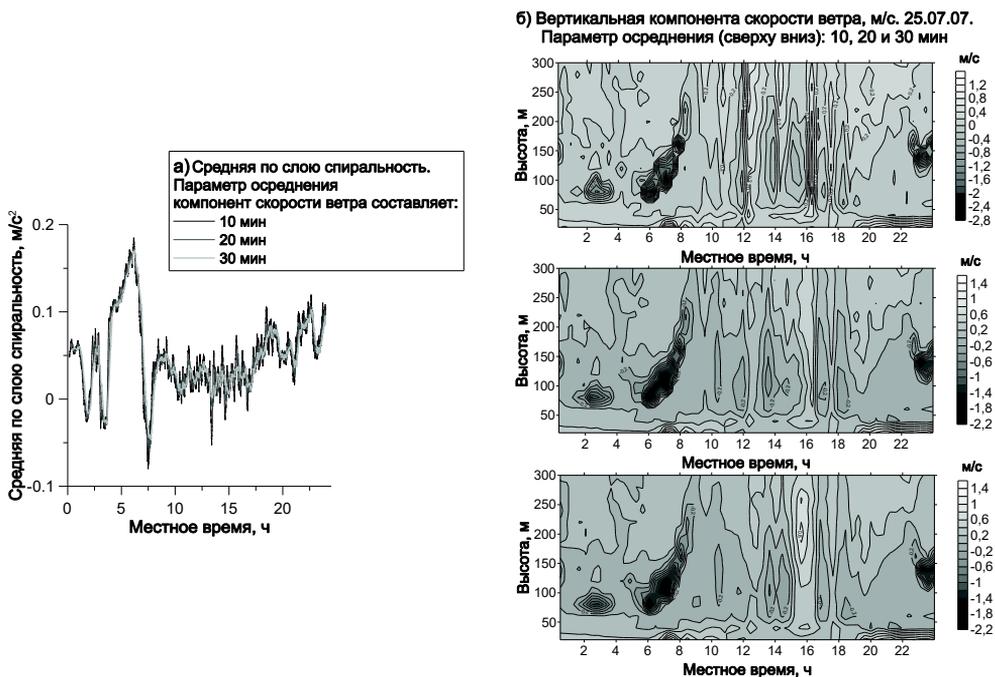


Рис. 1. Временной ход средней по слою спиральности (а) и вертикальной компоненты скорости (б) в зависимости от параметра осреднения компонент скорости ветра, 25.07.07, Калмыкия

странственно-временная структура поля скорости. На рис. 1 на примере данных от 25 июля 2007 года, Калмыкии, показано, как выбор интервала осреднения влияет на временной ход вертикальной компоненты скорости и средней по слою спиральности.

Поскольку полученные с помощью доплеровских содаров профили компонент скорости ветра даже после осреднения остаются достаточно изрезанными, то для оценки вертикальных производных скорости ветра использовалось сглаживание профилей скорости. Проводилась их аппроксимация кубическими сплайнами с последующим вычислением производных уже от гладкого профиля.

Следует отметить, что вертикальные компоненты скорости ветра позволяют лучше, чем горизонтальные, визуализировать наблюдаемые в атмосферном пограничном слое структуры. В дальнейшем будем также использовать данные для вертикальной компоненты скорости ветра. Так, на рис. 2, для 28 июля показаны проекции скорости ветра на оси X, Y, Z, а также изменение скорости по высоте и во времени. Видно, что начиная примерно с 12 ч дня образуются мезомасштабные структуры. Это может быть проиллюстрировано и спутниковым снимком района измерений [3], где наблюдается формирование «облачных улиц»: в 12:00 по Местному времени – начало формирования, в 14:00 по Местному времени – уже сформировавшиеся структуры.

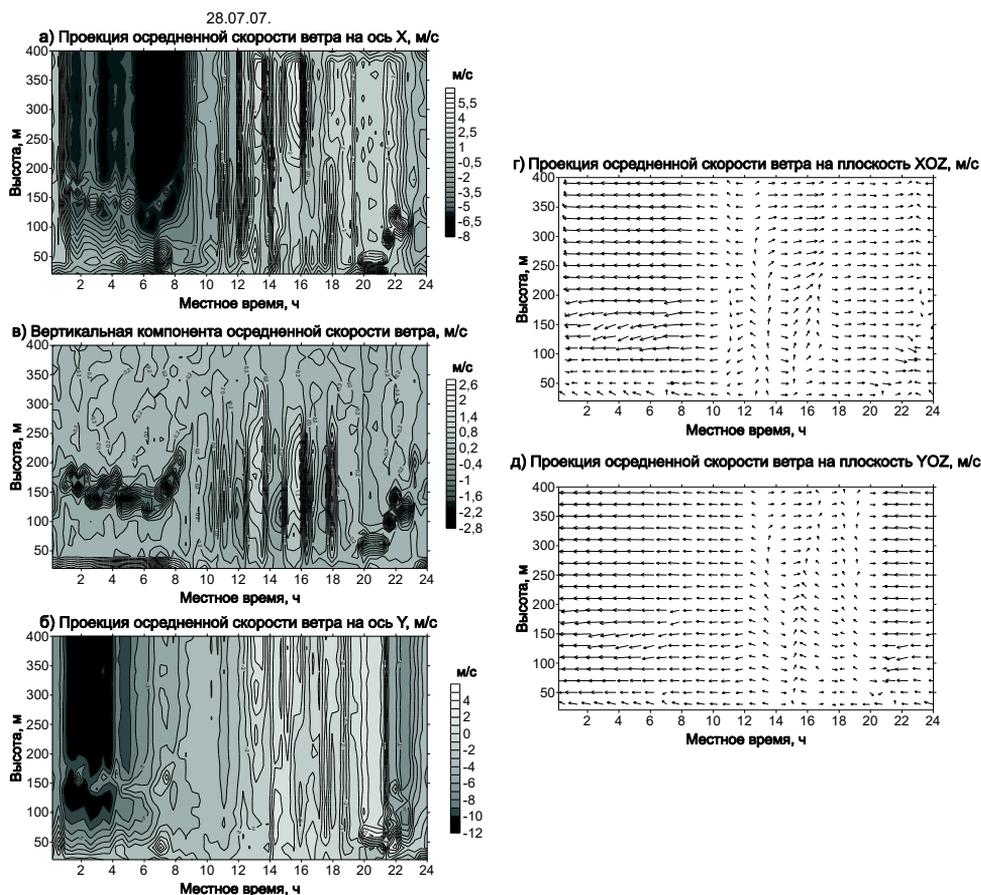
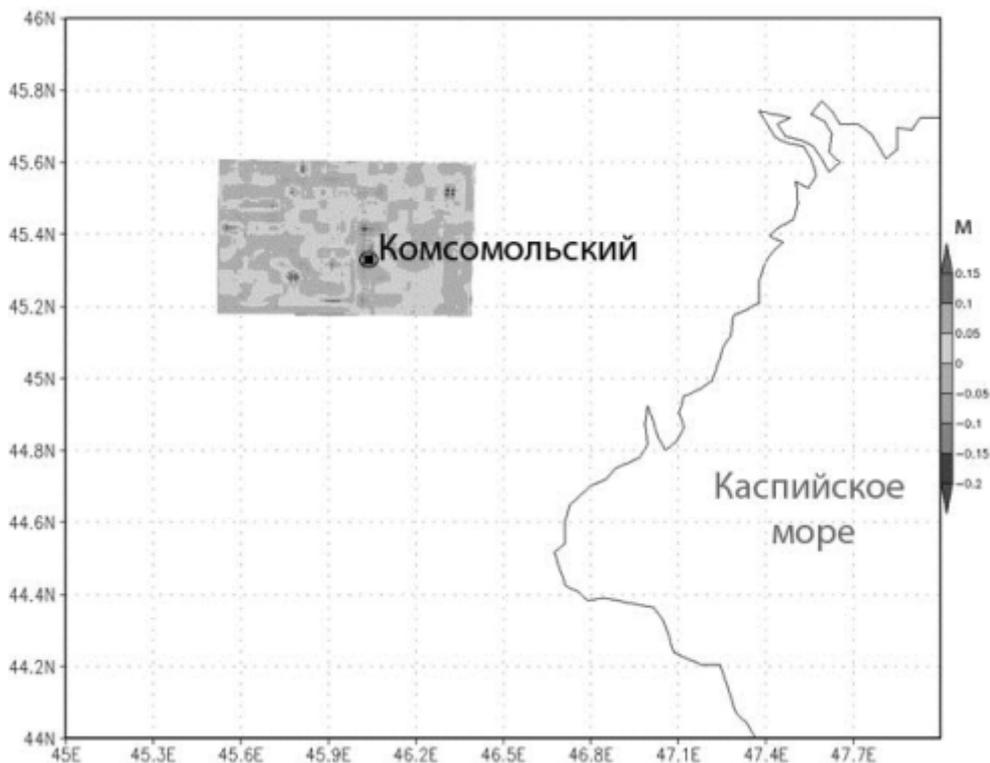


Рис. 2. Проекции осредненной скорости ветра на оси X (а), Y (б), и Z (в); на плоскость XOZ (г) и на плоскость YOZ (д), 28.07.07, Калмыкия

#### 4. Моделирование наблюдаемой синоптической ситуации при помощи модели WRF

Для численного моделирования наблюдаемой во время эксперимента в Калмыкии синоптической ситуации была выбрана открытая исследовательская негидростатическая мезомасштабная атмосферная модель WRF (версия 3.6.1) – Weather Research and Forecasting [32, 33]. В настоящее время модель WRF является одной из наиболее универсальных и отработанных открытых систем моделирования атмосферы. Она успешно и широко используется для метеорологического прогнозирования и исследовательских целей в научных организациях и метеослужбах многих стран и продолжает непрерывно развиваться [34, 35].

Прогностические переменные модели следующие: компоненты горизонтальной скорости  $u$  и  $v$  в декартовых координатах, вертикальная скорость  $w$ , возмущения потенциальной температуры и геопотенциала. По этим переменным определялся геострофический ветер для последующего расчета спиральности.



**Рис. 3.** Расчетная область крупной сетки 300 на 225 км 200×150 узлов по горизонтали с шагом 1500 м. Отдельно выделен рельеф вложенной области

При расчетах использовались вложенные сетки. Вся расчетная область 300 на 225 км рассчитывается на крупной сетке 200×150 узлов по горизонтали с шагом 1500 м. Вложенная область детализованного расчета 75 на 50 км, в котором проводится усвоение данных содаров, считается на сетке 151×106 узлов с шагом 500 м (см. рис. 3). По вертикали обе области имеют 35 уровней до высоты 5000 м со сгущением в пограничном слое. Одному шагу расчета по времени для крупной области соответствует 3 шага расчета по времени для вложенной области. Временной интервал между начальными полями метеопараметров глобального операционного анализа GFS на сетке 0,5×0,5 градусов равен 6 часам. Координаты центра расчетной области соответствуют 45° с.ш. и 45° в.д. Отметим, что мезомасштабная циркуляция начинает воспроизводиться на сетках с горизонтальным масштабом 500 метров. Когерентные вихревые структуры могут достигать 5 км в ширину, и десяти точек достаточно для качественного воспроизведения признаков мезомасштабной циркуляции. В данном случае спиральность непосредственно в модели не вычислялась, проводился лишь расчет компонент скорости ветра и геопотенциала в узлах сетки для последующего вычисления компонент геострофической скорости ветра.

Для увеличения точности прогноза характеристик атмосферы проводилось усвоение данных приземных измерений метеопараметров. В качестве усваивае-

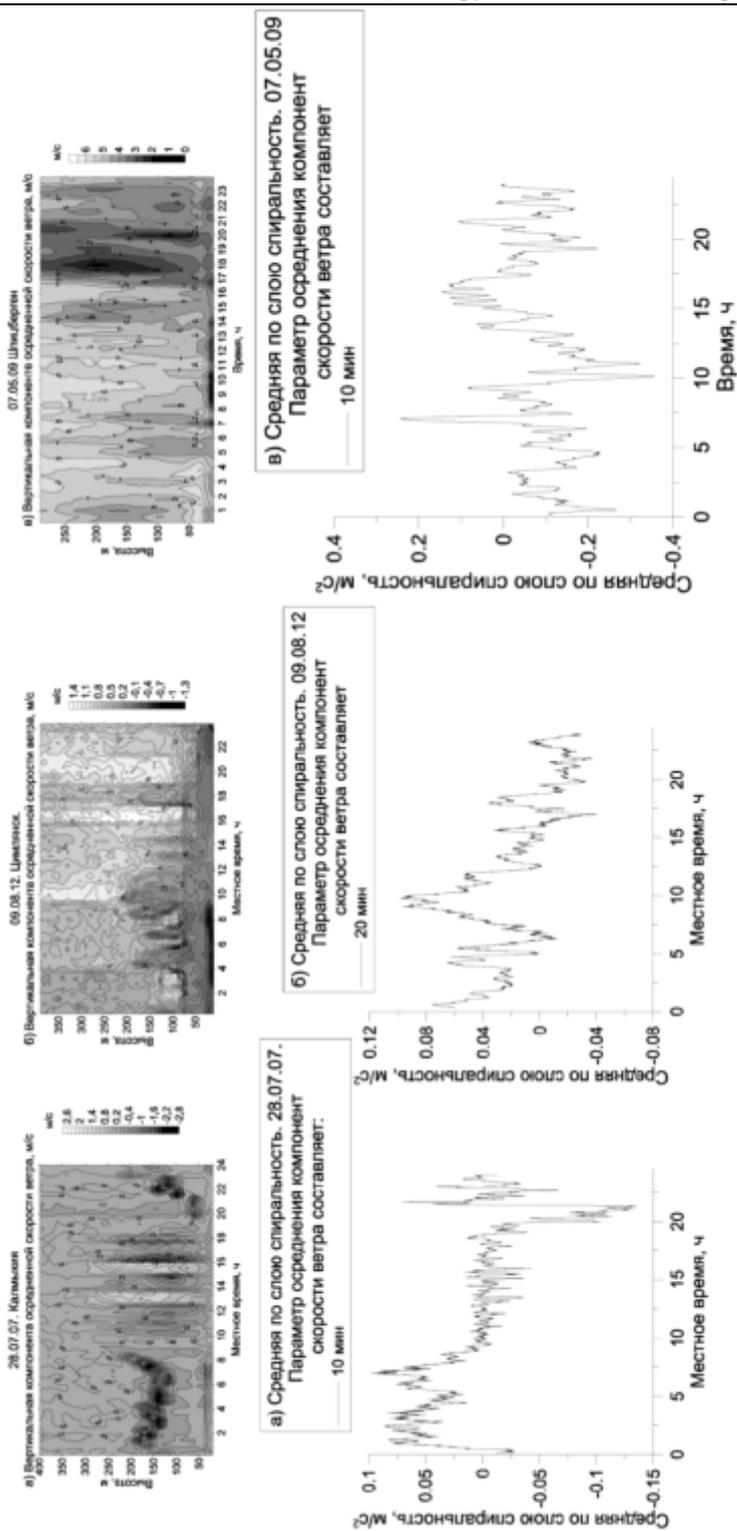


Рис. 4. Временной ход распределения средней вертикальной компоненты скорости ветра по высоте и средней по слою спиральности: (а) – Калмыкия, 28.07.07; (б) – Цимлянск, 09.08.12; (в) – Шницберг, 07.05.09

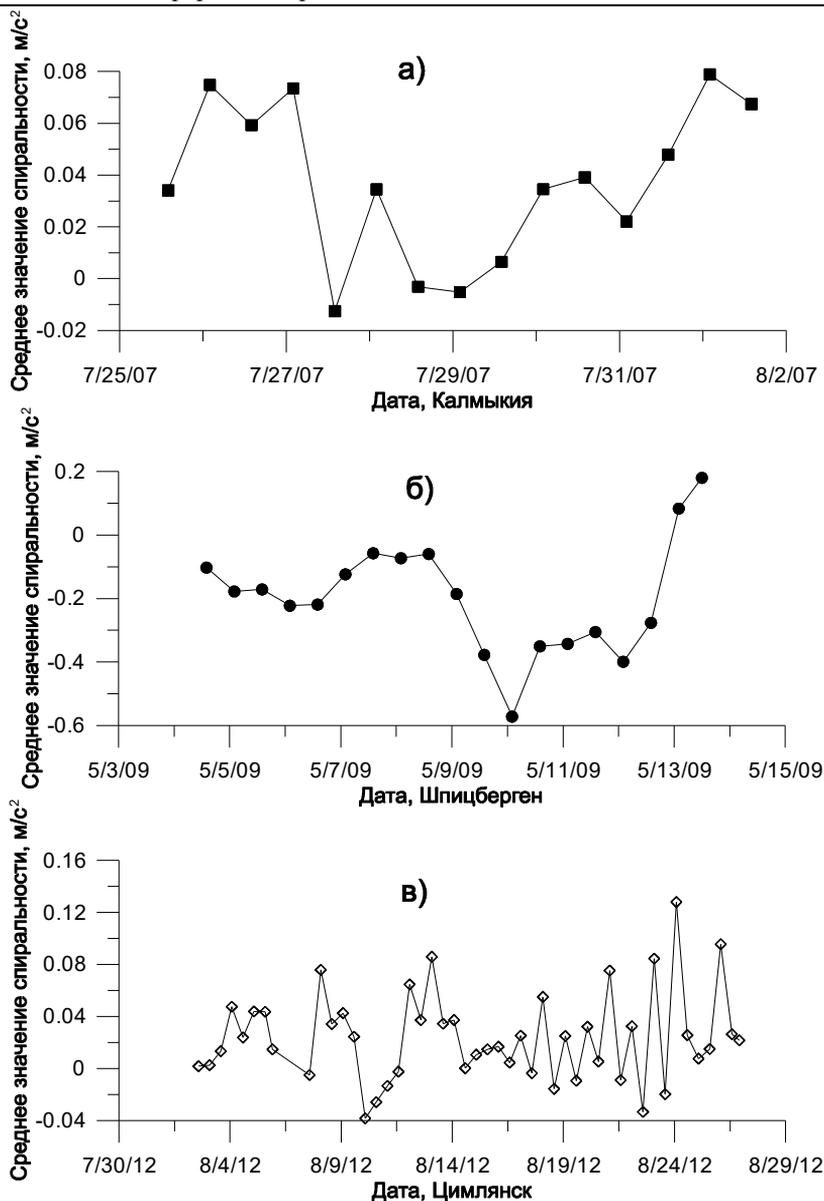


Рис. 5. Временной ход спиральности с 12-часовым усреднением для Калмыкии (а), Шпицбергена (б), Цимлянска (в)

мых данных использовались данные, полученные с длинноволнового содара, расположенного в Калмыкии, на северной окраине п. Комсомольский в точке с координатами  $45,33527^\circ$  в.д. и  $46,02687^\circ$  с.ш. Усвоение данных наблюдений производилось трехмерным вариационным методом на базе 3DVar [36].

Для получения интегральной спиральности была проведена постпроцессинговая обработка. Значения компонент геострофической скорости ветра в точке,

расположенной на расстоянии 3,5 км от точки введения усваиваемых данных, определялись через рассчитываемые моделью значения геопотенциала. Использовались формулы:

$$U_G = -\frac{g}{2\Omega \sin(\varphi)} \frac{dh_g}{dy}; U_a = U - U_G;$$

$$V_G = \frac{g}{2\Omega \sin(\varphi)} \frac{dh_g}{dx}; V_a = V - V_G.$$

Здесь  $U$ ,  $V$  – горизонтальные компоненты скорости ветра;  $U_a$ ,  $V_a$  – компоненты агеострофической скорости ветра;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения;  $\varphi$  – географическая широта;  $h_g$  – геопотенциал;  $dx = r d\theta \cos(\varphi)$ ;  $dy = r d\varphi$ ;  $r = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$  – радиус Земли;  $\theta$  – географическая долгота.

Для нахождения скорости геострофического ветра по выписанным выше формулам необходимо определиться с высотой, на которой ветер можно полагать геострофическим. Данная высота определялась как высота минимума агеострофической компоненты [37].

Компоненты геострофической скорости ветра позволяют оценить интегральные значения спиральности и сравнить с ее значениями, вычисленными по данным акустического зондирования.

## 5. Результаты

Расчеты спиральности по данным акустического зондирования устанавливают ее связь с ветром и структурами АПС.

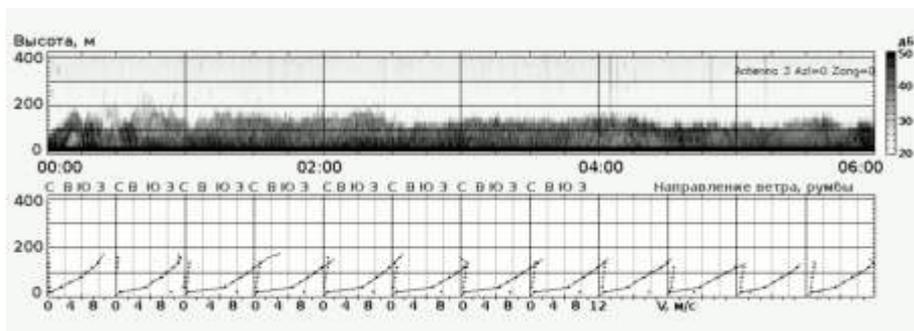
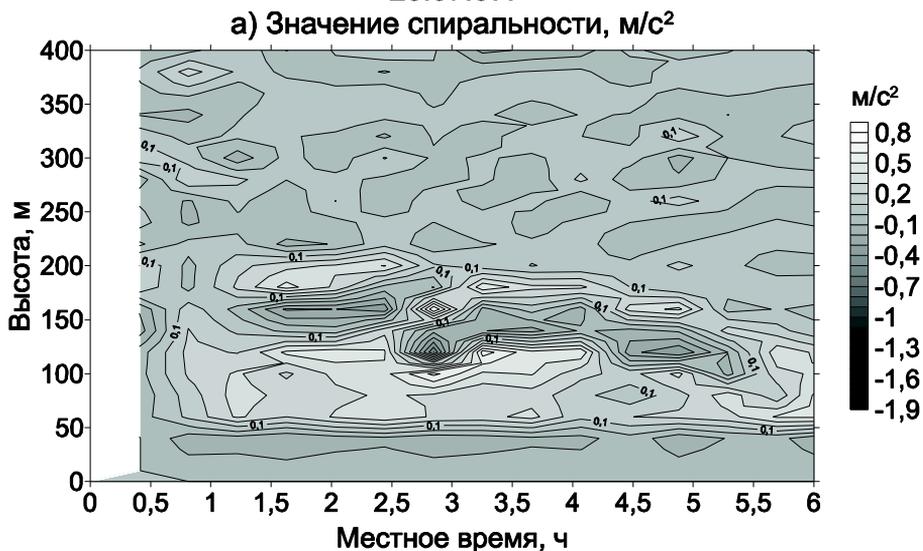
В обычных условиях определяющий вклад в спиральность АПС дают ее горизонтальные компоненты. Это подтверждается и для турбулентных данных [13, 14]. Несмотря на это, в целом ряде случаев наблюдается устойчивая корреляция между вертикальной компонентой скорости ветра и средней по слою спиральностью, что находит подтверждение в идеализированной теории экмановского пограничного слоя [17].

На рис. 4 показан временной ход распределения осредненной вертикальной компоненты скорости ветра и средней по слою спиральности: а) для 28 июля 2007 года, Калмыкия; б) для 9 августа 2012 года, Цимлянская научная станция; в) для 7 мая 2009 года, Шпицберген. На графике видны экстремумы вертикальной компоненты скорости ветра, связанные с развитием крупномасштабных когерентных структур. Временной ход спиральности с 12-часовым усреднением показан на рис. 5.

Отметим, что образование крупномасштабных структур в поле ветра прослеживается как по эхограмме вертикальной скорости, так и по временному ходу распределения спиральности по высоте. 26, 28, 30 июля и 1 августа 2007 г. в ночное время в Калмыкии наблюдалось низкоуровневое струйное течение, которое хорошо отражается и на эхограмме, и на распределении спиральности (см. рис. 6 для 28 июля).

Вертикальные профили скорости ветра на эхограмме, характеризующие ночное струйное течение, соответствуют максимальному увеличению спиральности на зависимости от времени распределения спиральности по высоте. Есть примеры ночных струйных течений и для эксперимента в Цимлянске 11 и 18 августа

28.07.07.

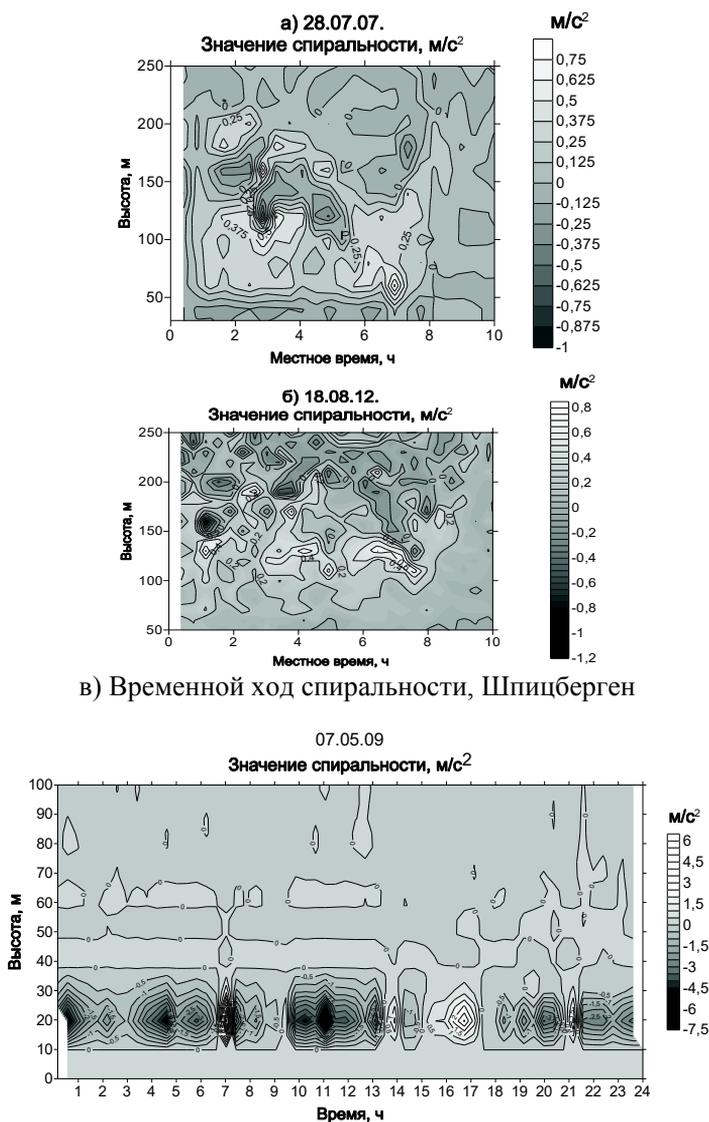


б) Эхограмма содара

**Рис. 6.** Временной ход распределения спиральности по высоте и эхограмма вертикальной компоненты скорости ветра. Калмыкия. 28.07.07, 00:00–06:00: (а) – значение спиральности; (б) – эхограмма содара. Интенсивность эхо-сигналов на эхограмме содара представлена в дБ. Черные линии с точками – соответствующие вертикальные профили скорости ветра. Точками на линиях отмечены значения, имеющие достаточную статистическую обеспеченность. Серые точки – направление ветра в румбах

2012 г. При этом следует отметить заметное повышение спиральности по сравнению с ее обычными дневными значениями, что отмечалось ранее [38]. Спиральность достигает значений  $0,8 \text{ м/с}^2$  (см. рис. 7а, 7б для Калмыкии, 28 июля, и для Цимлянска, 18 августа).

Для Шпицбергена образование структур в поле скорости АПС происходит на высоте до 50 м, что характерно для полярных широт (см. рис. 7в). Надежность полученных данных в большинстве случаев ограничена значением высоты примерно в 100 м из-за больших шумов при измерении.



**Рис. 7.** Спиральность: (а), (б) – в ночных струйных течениях: (а) – для Калмыкии, 28 июля 2007 г.; (б) – для Цимлянска, 18 августа 2012 г.; (в) – временной ход спиральности, 7 мая 2009, Шпицберген

Средние значения спиральности для крупномасштабных движений – 0,3–0,6  $m/c^2$  – на порядок превосходят ее независимо измеренные турбулентные значения [13, 14, 39].

Прослеживается хорошая связь средней по слою спиральности и энергии – суммы квадратов скоростей всех трёх компонент скорости ветра (см. рис. 8).



**Рис. 8.** Связь средней по слою спиральности и удельной кинетической энергии, Калмыкия, 25.07.07. Значения средней по слою спиральности умножены на 200 для более удобного сравнения

Отметим, что полученные в экспериментах значения средней по слою спиральности в АПС близки к теоретическим оценкам турбулентной спиральности и составляют примерно  $0,02\text{--}0,12\text{ м/с}^2$ .

Проведено исследование возможности применимости формулы (4), для идеализированной экмановской модели, для оценки интегральной спиральности. Результаты, представленные на рис. 9, иллюстрируют хорошую корреляцию рассчитанной интегрированием (3) интегральной спиральности ( $H_{int}$  (3)) и полусуммы квадратов компонент геострофической скорости ветра ( $H_{int}$ ); для экмановского пограничного слоя зависимость между двумя этими величинами впервые показана в [10]. Коэффициенты корреляции для Калмыкии и Цимлянска рассчитаны для каждого случая и близки к единице. На рис. 9 показаны результаты для 29, 30 и 31 июля 2007 года, Калмыкия:  $r_{29} = 0,7234$ ;  $r_{30} = 0,6717$ ;  $r_{31} = 0,7722$ ; 4, 9, 15 августа 2012 года, Цимлянск:  $r_4\ 08:00\text{--}16:00 = 0,7887$ ;  $r_9\ 00:00\text{--}02:00 = 0,9121$ ;  $r_9\ 09:00\text{--}16:00 = 0,9325$ ;  $r_{15}\ 12:00\text{--}21:00 = 0,7189$ .

Интегральная спиральность, рассчитанная по формуле (4) сравнивается с результатами расчетов модели WRF. Результаты выборочно показаны на рис. 10 для

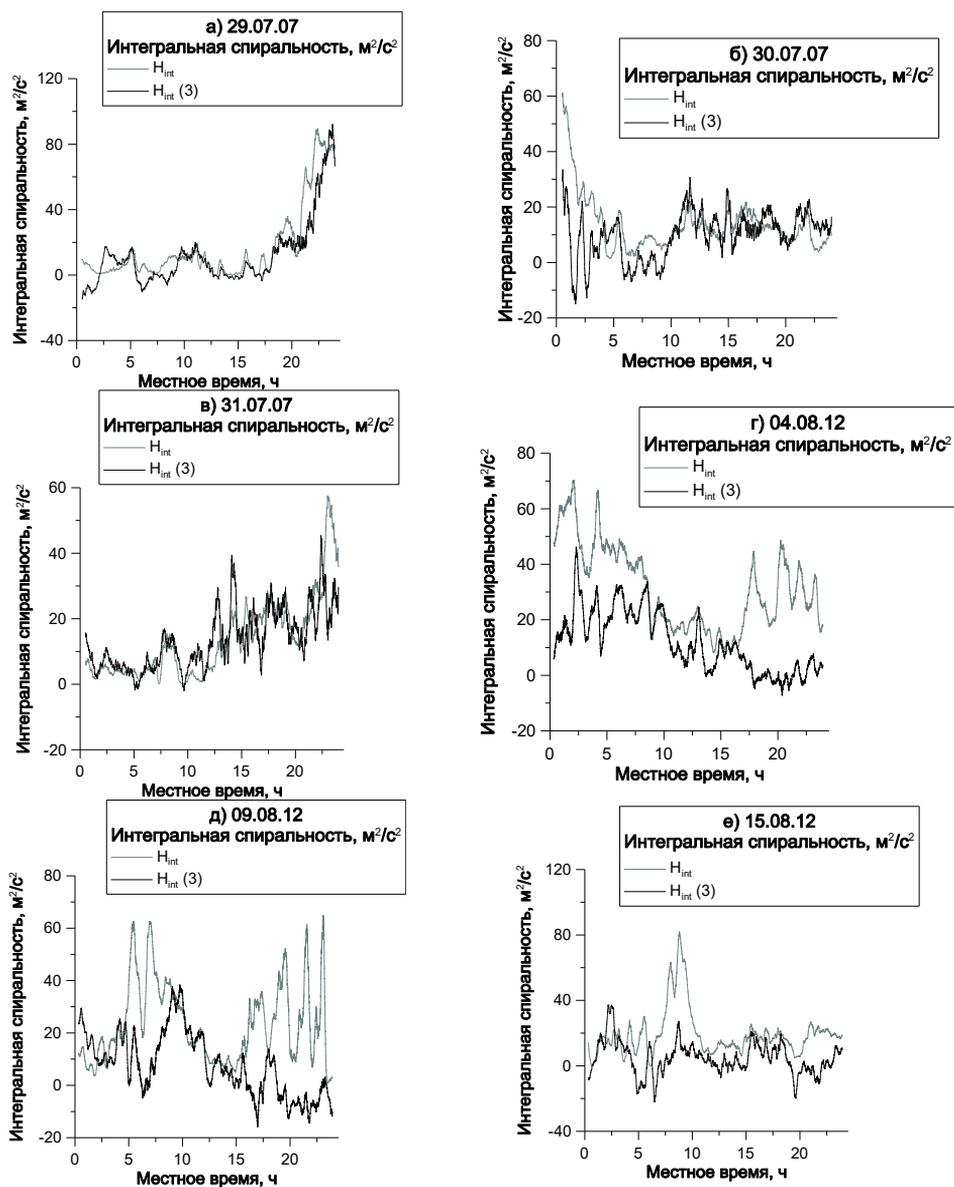


Рис. 9. Связь интегральной спиральности  $H_{int}(3)$  и суммы квадратов компонент геострофической скорости ветра  $H_{int}$  для 29 (а), 30 (б) и 31 (в) июля 2007 г., Калмыкия; 4 (г), 9(д), 15(е) августа 2012 г., Цимлянск

29 июля 2007 г. В целом, результаты расчетов с усвоением данных содара показывают более близкие к найденным ранее оценочным значениям спиральности, чем результаты расчетов без усвоения данных содара.

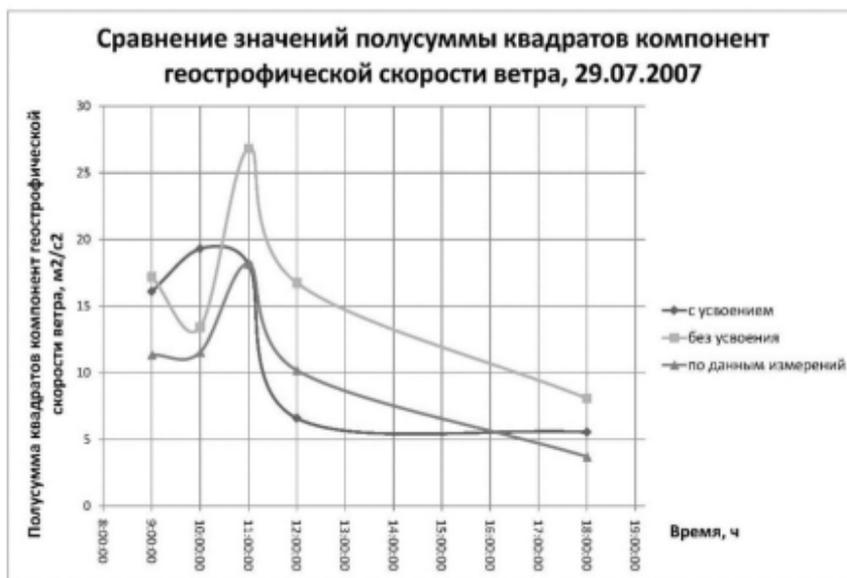


Рис. 10. Результаты расчета на WRF. Сравнение значений полусуммы квадратов компонент геострофической скорости ветра, Калмыкия, 29.07.2007

### Заключение

По результатам трех натуральных экспериментов по акустическому зондированию атмосферного пограничного слоя, выполненных в ИФА им. А.М.Обухова РАН, определены значения спиральности крупномасштабных движений, лежащих в диапазоне абсолютных значений  $0,3-0,6 \text{ м/с}^2$ , и средней по слою спиральности в атмосферном пограничном слое –  $0,02-0,12 \text{ м/с}^2$ . На основе полученных данных, по градиентам скорости и известным значениям турбулентных напряжений Рейнольдса возможно провести оценку коэффициентов полуэмпирической модели турбулентности, с параметризацией турбулентной спиральности [12, 18].

Показана связь средней по слою спиральности и кинетической энергии.

В условиях отсутствия сильной конвекции обнаружена хорошая корреляция хода интегральной спиральности с ходом квадрата скорости ветра на верхних уровнях зондирования (400–600 м), правомерно при данных условиях заменяющего в нашем исследовании ход квадрата скорости геострофического ветра. Это позволяет упростить процедуру построения глобального и регионального поля спиральности, в частности, при решении прогностических задач. Эмпирические значения интегральной спиральности верифицировались при помощи открытой исследовательской негидростатической мезомасштабной атмосферной модели WRF с использованием усвоения данных акустического зондирования.

### Литература

[1] Markovski P., Richardson Y. Mesoscale Meteorology in Midlatitude. John Wiley & Sons, Ltd, 2010. 407 p.

- [2] Вельтищев Н.Ф., Степаненко В.М. Мезометеорологические процессы. Учебное пособие. М.: МГУ, 2006. 101 с.
- [3] Гранберг И.Г., Крамар В.Ф., Кузнецов Р.Д., Чхетиани О.Г., Каллистратова М.А., Куличков С.Н., Артамонова М.С., Кузнецов Д.Д., Перепелкин В.Г., Погарский Ф.А. Исследование пространственной структуры атмосферного пограничного слоя сетью доплеровских содаров // Изв. РАН. ФАО. 2009. Т. 45. №5. С. 579–587.
- [4] Etling D., Brown R.A. Roll vortices in the planetary boundary layer. A review // Bound.-Layer Meteorol. 1993. V. 65. P. 215–248.
- [5] Chou S.-H., Ferguson M.P. Heat fluxes and roll circulations over the western Gulf Stream during an intense cold-air outbreak // Bound.-Layer Meteorol. 1991. V. 55, Issue 3. P. 255–281.
- [6] Wurman J., Winslow J. Intense Sub-Kilometer-Scale Boundary Layer Rolls Observed in Hurricane Fran // Science. 1998. V. 280. № 5363. P. 555-557.
- [7] Morrison H., Curry J.A., Khvorostyanov V.I. A New Double-Moment Microphysics Parameterization for Application in Cloud and Climate Models. PartI: Description // J. Atmos. Sci. 2005. V. 62, Issue № 66. P. 1665-1677.
- [8] Курганский М.В. Введение в крупномасштабную динамику атмосферы. (Адиабатические инварианты и их применение). СПб.: Гидрометеиздат, 1993. С. 150-154.
- [9] Etling D. Some aspect of helicity in atmospheric flows // Beitr. Phys. Atmosph. 1985. V. 58. №1. P. 88-100.
- [10] Курганский М.В. О связи между спиральностью и потенциальным вихрем в сжимаемой вращающейся жидкости // Изв. АН, ФАО. 1989. Т. 25. № 12. С. 1326-1329.
- [11] Hide R. Superhelicity, helicity and potential vorticity // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 1989. V. 48. № 1-3. P. 69-79.
- [12] Чхетиани О.Г. О спиральной структуре экмановского пограничного слоя // Изв. РАН. ФАО. 2001. Т. 37. № 5. С. 614-620.
- [13] Копров Б.М., Копров В.М., Пономарев В.М., Чхетиани О.Г. Измерение турбулентной спиральности и ее спектра в пограничном слое атмосферы // ДАН. 2005. Т. 403. № 5. С. 627-630.
- [14] Копров Б.М., Копров В.М., Курганский М.В., Чхетиани О.Г. Спиральность и потенциальный вихрь в приземной турбулентности // Изв. РАН. ФАО. 2015. Т. 51. №6. С. 1-11.
- [15] Deusebio E., Lindborg E. Helicity in the Ekman boundary layer // J. Fluid Mech. 2014. V. 755. P. 654-671.
- [16] Курганский М.В. Спиральность в динамических процессах в атмосфере // Изв. РАН. ФАО. 2016. Т. 52 (в печати).
- [17] Пономарев В.М., Чхетиани О.Г. Полуэмпирическая модель пограничного слоя атмосферы с параметризацией влияния турбулентной спиральности // Изв. РАН. ФАО. 2005. Т. 41. № 5. С. 418-432.
- [18] Pichler H., Schaffhauser A. The synoptic meaning of helicity // Meteorol. Atmos. Phys. 1998. V. 66. P. 23-34.
- [19] Ретина И.А., Иванов Б.В., Кузнецов Р.Д. Режим ветра над ледниковыми склонами (по данным измерений на архипелаге Шпицберген) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2009. Вып. 2. С. 180-188.
- [20] Браун Р.А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 152 с.
- [21] Бызова Н.Л., Иванов В.Н., Гаргер Е.К. Турбулентность в пограничном слое атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 263 с.
- [22] Taylor G.I. Eddy motion in the atmosphere // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1914. Ser. A215. P. 1–26.

[23] *Каллистратова М.А., Кузнецов Р.Д., Петенко И.В.* Реализация идей А.М. Обухова о наземном дистанционном зондировании нижней тропосферы акустическими и электромагнитными волнами / Г.С. Голицын, И.И. Мохов, С.Н. Куличков, М.В. Курганский, О.Г. Чхетиани (ред.) // Турбулентность, динамика атмосферы и климата. Труды междунар. конф., посв. памяти А.М. Обухова. Москва, 13–16 мая 2013 г. М.: ГЕОС, 2014. С. 593–620.

[24] *Crescenti G.H.* A look back on two decades of Doppler sodar comparison studies // *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 1997. V. 78. С. 651–673.

[25] *Coulter R.L., Kallistratova M.A.* The role of acoustic sounding in a high technology era // *Meteorol. Atmos. Phys.* 1999. V. 71. P. 3–13.

[26] *Emeis S.* Surface-Based Remote Sensing of the Atmospheric Boundary Layer (Chapter 3) // *Atmos. Oceanogr. Sci. Library.* 2011. V. 40. Springer. DOI: 10.1007/978-90-481-9340-0/

[27] *Anderson P.S., Ladkin R.S., Renfrew I.A.* An autonomous Doppler sodar wind profiling system // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 2005. V. 22. P. 1309–1325.

[28] *Kallistratova M.A., Kouznetsov R.D., Kramar V.F., Kuznetsov D.D.* Profiles of vertical wind speed variances within nocturnal low-level jets observed with a sodar // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 2013. V. 30. P. 1970–1977.

[29] *Кузнецов Р.Д.* Акустический локатор ЛАТАН-3 для исследований атмосферного пограничного слоя // *Оптика атмосферы и океана.* 2007. Т. 20. № 8. С. 749–753.

[30] *Kouznetsov R.D.* The multi-frequency sodar with high temporal resolution. *Meteorologische Zeitschrift.* 2009. V. 18. № 2. P. 169–173.

[31] *Чижелски Р.* Параметризация турбулентности в потоках со спиральностью // *Изв. АН. ФАО.* 1999. Вып. 35 (2). С. 174–188.

[32] *Skamarock W.C. et al.* A description of the Advanced Research WRF Version 3 // *NCAR Techn. Note – 475 + STR.,* June 2008. 125 p.

[33] *Вельтищев Н.Ф., Жупанов В.Д.* Численные прогнозы погоды по негидростатическим моделям общего пользования WRF-ARW и WRF-NMM. М.: ТРИАДА ЛТД, 2010. С. 94–135.

[34] *Набокова Е.В.* Опыт применения модели WRF с учетом двух методов параметризации городского подслоя для прогноза температуры воздуха и скорости ветра // *Тр. Гидрометцентра РФ.* № 344. Физика атмосферы и прогноз погоды. М., 2010. С. 180–195.

[35] *Рубинштейн К.Г., Набокова Е.В., Игнатов Р.Ю., Смирнова М.М., Арутюнян Р.В., Семенов В.Н., Сорокикова О.С., Фокин А.В.* Влияние методов параметризации процессов в пограничном слое в модели WRF на прогноз ветра и результаты моделирования распространения примесей // Там же. С. 196–213.

[36] *Barker D.M., Huang W., Guo Y.R., Xiao Q.N.* A Three-Dimensional (3DVAR) Data Assimilation System for use with MM5: Implementation and initial results // *Mon. Wea. Rev.* 2004. V. 132. P. 897–914.

[37] *Holton J.R.* An introduction to dynamic meteorology. Fourth Edition. Elsevier Inc, 2004. 540 p.

[38] *Maddox R.A.* Diurnal low-level wind oscillation and storm-relative helicity // *The Tornado: its structure, dynamics, prediction, and hazards.* 1993. P. 591–598.

[39] *Koprov B.M., Koprov V.M., Kurgansky M.V., Chkhetiani O.G.* Helicity of atmospheric turbulence // *Международная научная конференция «Турбулентность и волновые процессы», посв. 100-летию со дня рождения М.Д. Миллионщикова, 26–28 ноября 2013 г. Сборник тезисов.* М.: ООО «Интуит.ру», 2013. С. 51–53.

## 2.3. Рэлей-тейлоровская неустойчивость и ее структурные элементы в геофизических течениях

**В.П. Гончаров<sup>1</sup>, В.И. Павлов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Univ. Lille, UFR des Mathématiques Pures et Appliquées, Lille, France*

### Введение

Задача о струйных движениях тесно связана с неустойчивостью Рэлей–Тейлора и вызывает большой интерес в связи обширными приложениями в гео- и астрофизике, а так же в физике высоких плотностей энергий [1]. По существу, рэлей–тейлоровская неустойчивость (РТН) проявляется в любом неоднородном течении в неинерциальной системе отсчета, когда имеется ускорение, направленное от более легкой жидкости к более тяжелой [2].

Классический пример РТН это эволюция поверхности раздела жидкостей либо газов с различными плотностями в поле тяготения. Если в начальном состоянии граница раздела горизонтальна, а верхняя жидкость тяжелее нижней, то любое сколь угодно малое возмущение приводит к нарушению равновесия. В результате запускается сложный (нелинейный) динамический процесс, который стремится минимизировать потенциальную энергию систему. Этот процесс приводит к тому, что с течением времени произвольная начальная деформация поверхности раздела начинает быстро развиваться, поскольку участки более плотной среды, оказавшиеся ниже плоскости раздела, начинают "тонуть", а участки менее плотной среды, оказавшиеся выше плоскости раздела, начинают "всплывать".

Как и для любой другой нелинейной системы, для РТН систем принципиальным является вопрос о возможных финальных режимах, на которые они выходят в результате развития гидродинамической неустойчивости. В зависимости от модели и начальных данных существуют различные механизмы и сценарии развития РТН. В этой работе мы ограничимся лишь теми из них, которые важны для понимания образования струйных течений и перемешивания в геофизических течениях.

Многочисленные исследования показали, что традиционные линейные (волновые) методы и модели, недостаточно эффективны при изучении промежуточной и финальной стадий РТН и связанных с ними струйных механизмов перемешивания. Хорошо известно, что волновое описание неустойчивости пригодно лишь на начальной стадии развития этих процессов, и в частности, не дает информации о такой существенной черте, как образование доминирующих структур.

Типологическая классификация доминирующих структур не является пока вполне сложившейся. Например, в океанологии колоннообразные структуры, которые образуются при опускании более соленой (тяжелой) воды вглубь пресной, называются пальцами. В атмосферных приложениях, где опускание холодных и всплывание теплых воздушных потоков также имеет место, аналогичные структуры известны под названиями термиков, струй, пузырей, выбросов, джетов. Кроме перечисленных структур, приводящих к вертикальному перемешиванию,

---

<sup>1</sup> e-mail: v.goncharov@rambler.ru

<sup>2</sup> e-mail: vadim.pavlov@univ-lille1.fr

не меньшую роль в физике атмосфера и океана играют структуры, которые приводят к горизонтальному перемешиванию.

Данная работа суммирует результаты наших исследований по созданию и совершенствованию теоретических подходов, описывающих структурную стадию РТН. Исследования, в рамках которых они были получены, охватывают почти 5-летний период, и существенным образом опираются на использование гамильтоновских методов и построение новых аналитических моделей, основанных на прямом моделировании структурных элементов неустойчивости. Применительно к моделям гравитационных течений, конечная цель такой стратегии – вывод нелинейных уравнений, описывающих эволюцию вертикальных автомодельных струй. Как будет показано ниже, в отличие от волн или солитонов, решения, описывающие доминирующие структуры, определены на компактном носителе и не обладают осциллирующими или установившимися на бесконечности хвостами, хранящими память о невозмущенном (фоновом) режиме. Это замечательное свойство делает их идеальными претендентами на роль структурных элементов, описывающих процессы дезинтеграции течений, инициированные крупномасштабной гидродинамической неустойчивостью. Такова общая стратегия, которой придерживались авторы в своих работах, и которую невозможно осуществить в рамках традиционных волновых подходов к изучению РТН.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 мы обсуждаем минимальную (гидростатическую) модель РТН и формулируем ее описание в приближении мелкой воды. Гамильтоновская версия этой модели рассматривается в разделе 2. В разделе 3 устанавливается свойство масштабной инвариантности и находится соответствующий интеграл движения для гидростатических моделей РТН, находящихся под действием центростремительных/центробежных сил. Вириальная теорема, которая занимает центральное место при изучении коллапсов, формулируется в разделе 4. Здесь же обсуждаются возможные сценарии эволюции активного слоя в зависимости от интегралов движения. Коллапс во вращающейся гидростатической модели обсуждается в разделе 5. Разделы 6–8 посвящены построению и обоснованию негидростатической модели РТН, описанию ее структурных элементов, а также анализу возможных режимов эволюции. В разделах 9, 10 обсуждаются эффект "сверхускорения" и устойчивость структурных элементов, развивающихся в режиме автомодельного коллапса. Численное моделирование струи, восходящей из горизонтально неоднородного плоского слоя, и анализ сопутствующего эффекта обмеления приведены в разделе 11. Спектры турбулентности, инициированной ансамблем восходящих струй, обсуждаются в разделе 12 на примере солнечной супергрануляции.

## 1. Минимальная модель РТН

Минимальная модель РТН может быть сформулирована, если рассмотреть границу раздела  $z = h(x, y, t)$ , по обе стороны от которой имеются два слоя невязкой несжимаемой жидкости (см. рис. 1), обеспечивающие горизонтально неоднородный контраст плотности.

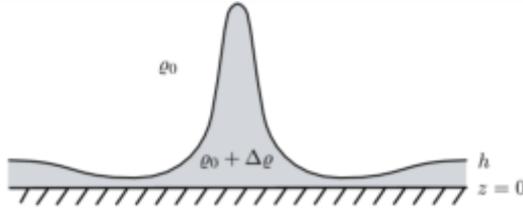


Рис. 1. Модель активного (нижнего) слоя с горизонтально неоднородной плотностью

Предположим, что слои движутся под действием силы тяжести в декартовой системе координат  $x, y, z$ . Пусть верхний слой с плотностью  $\rho_2 = \rho_0 = const$  однороден и простирается вверх до бесконечности, а нижний с плотностью  $\rho_1 = \rho_0 + \rho'$  опирается на твердую поверхность  $z = 0$ . Наша цель состоит в упрощенном описании этой модели в приближении мелкой воды, полагая, что скачок плотности  $\rho'$  между слоями достаточно мал  $\rho'/\rho_0 \ll 1$  и не зависит от вертикальной координаты  $z$ , т.е.  $\rho' = \rho'(x, y, t)$ .

При выводе уравнений движения для этой модели из полных уравнений гидродинамики будем предполагать, что горизонтальный масштаб движений  $L$  значительно больше вертикального масштаба  $D$ . Это дает основание пренебречь вертикальной компонентой скорости, и считать, что горизонтальные компоненты скорости практически независимы от вертикальной координаты  $z$ . В результате приходим к следующей постановке

$$\partial_t \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial z} + g \rho_i = 0. \quad (2)$$

в которой  $\mathbf{u}_i$  – горизонтальные компоненты скорости,  $\nabla$  – горизонтальный градиент, а  $p_i$  – давления в верхнем ( $i = 2$ ) и нижнем ( $i = 1$ ) слоях. Уравнения (2) описывают движение жидкости в приближении гидростатического баланса.

В отсутствие возмущений на бесконечности и при условии непрерывности давления  $(p_2 - p_1)_{z=h} = 0$  на границе раздела, уравнения (2) легко интегрируются

$$p_2 = -g \rho_0 z, \quad p_1 = g \rho' h - g(\rho_0 + \rho') z. \quad (3)$$

Чтобы исключить координату  $z$  и получить замкнутое описание, вместо  $\mathbf{u}_1$  рассмотрим новую переменную

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{u}_1 dz,$$

имеющую смысл усредненной по глубине горизонтальной скорости в нижнем (активном) слое.

Уравнение движения для  $\mathbf{u}$  получается после подстановки давления  $p_1$  из (3) в уравнение (1) и усреднения его по глубине

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{h \rho_1} \int_0^h \nabla p_1 dz \approx -\frac{1}{2h} \nabla (th^2). \quad (4)$$

Здесь вместо скачка плотности  $\rho'$  введена относительная плавучесть  $\tau = g\rho'/\rho_0$ .

Если к (4) добавить уравнения, которым в силу неразрывности и несжимаемости удовлетворяют переменные  $h$  и  $\tau$ , для описания активного слоя получим замкнутую систему уравнений

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{2h} \nabla(th^2), \quad (5)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau = 0. \quad (6)$$

Отметим, что формально при  $\tau = 1$  уравнения (5), (6) переходят в обычные уравнения мелкой воды. В другом предельном случае  $\tau = -1$  они соответствуют, так называемой, модели "опрокинутой мелкой воды", описывающей слой тяжелой жидкости, ограниченной сверху горизонтальной твердой крышкой. В невозмущенном состоянии равновесие в такой модели обеспечивается давлением лежащей снизу, легкой (почти невесомой) жидкости. Понятно, что такое равновесие неустойчиво и, в конечном счете, спустя некоторое время более тяжелая жидкость должна опуститься на дно. Несмотря на столь тривиальный финал, на промежуточных этапах, когда система еще далека от конечного состояния, имеет место весьма сложная картина развития неустойчивости. Изучение различных модельных конфигураций и стадий РТН имеет важное значение, так как обеспечивает путь к пониманию процессов перемешивания во многих технических и физических приложениях, включая ядерную физику, астрофизику, физику атмосферы и океана. Примеры использования модели перевернутой мелкой воды в различных приложениях приведены в [3].

Еще один важный пример, который формально приводит к уравнениям (5), (6), это устойчиво стратифицированные многослойные модели Райпа [4]. В простейшем (однослойном) случае такая модель описывает горизонтально неоднородный слой мелкой воды со свободной поверхностью. Несмотря на внешнее сходство с моделью (5), (6), существенным отличием этой модели является тот факт, что величина  $\tau$  является строго положительной величиной, поскольку определяется как полная плавучесть  $\tau = g(1 + \rho'/\rho_0)$ . Для сравнения отметим, что в уравнениях (5), (6) переменная  $\tau$ , играющая роль относительной плавучести, не связана этим ограничением. Последнее открывает возможность использования этих уравнений для изучения начальной стадии РТН, по крайней мере до тех пор, пока не нарушится приближение гидростатичности.

## 2. Гамильтоновская версия гидростатической модели РТН

Существует еще одна полезная интерпретация уравнений (5), (6) как уравнений движения двумерной небаротропной жидкости. Подобно другим консервативным моделям гидродинамического типа, описание такой жидкости можно сформулировать, исходя из первых принципов [5]. В этом можно убедиться непосредственно, рассматривая переменные  $h$  как "плотность",  $\tau$  как "энтропию", и используя при выводе уравнений (5), (6) на гамильтонов подход с гамильтонианом

$$H = \int \left( \frac{1}{2} h \mathbf{u}^2 + \varepsilon(h, \tau) \right) dx,$$

где в данном конкретном случае плотность внутренней энергии определяется как  $\varepsilon = h^2\tau/2$ .

Нетривиальные скобки Пуассона, определяющие динамику для подобного семейства моделей, известны [5] и формулируются как

$$\{m_i, m'_k\} = \partial'_i(m'_k\delta) - \partial_k(m_i\delta), \quad (7)$$

$$\{h, m'_k\} = -\partial_k(h\delta), \quad \{\tau, m'_k\} = -\delta\partial_k\tau. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{m}$  – плотность гидродинамического импульса,  $\delta = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  – дельта-функция Дирака, а штриховка зависимых переменных подразумевает зависимость от штрихованных пространственных координат.

Кроме скобок Пуассона, чтобы записать уравнения движения, нужно учесть, что гидродинамический импульс  $\mathbf{m}$  и скорость  $\mathbf{u}$  связаны дуальным соотношением

$$\mathbf{m} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{m}}, \quad (9)$$

которое в нашем случае эквивалентно равенству

$$\mathbf{m} = h\mathbf{u}.$$

Тогда для рассматриваемой нами модели найдем

$$\partial_i m_i = \{m_i, H\} = -m_k \partial_i u_k - \partial_k(m_i u_k) - h \partial_i \frac{\delta H}{\delta h} + \frac{\delta H}{\delta \tau} \partial_i \tau,$$

$$\partial_i h = \{h, H\} = -\partial_i(hu_i), \quad \partial_i \tau = \{\tau, H\} = -u_i \partial_i \tau.$$

Использование соотношений

$$\frac{\delta H}{\delta \tau} = \frac{1}{2}h^2, \quad \frac{\delta H}{\delta h} = h\tau - \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{1}{2}h^2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2,$$

позволяет получить уравнения движения (5), (6).

Кроме гамильтониана  $H$ , уравнения (5), (6) сохраняют интегралы

$$\mathbf{P} = \int h\mathbf{u}d\mathbf{x} \quad M = \int h(\mathbf{x} \times \mathbf{u})d\mathbf{x}, \quad C = \int h(F_1(\tau) + qF_2(\tau)).$$

Физический смысл первых двух интегралов  $\mathbf{P}$  и  $M$  – соответственно полный импульс и угловой момент. Эти интегралы сохраняются вследствие галилеевой инвариантности и изотропности модели. Последний интеграл  $C$  есть не что иное, как аннулятор (казмир) скобок Пуассона. Стоящие под интегралом  $F_1$  и  $F_2$  – произвольные функции плавучести  $\tau$ , а потенциальная завихренность  $q = (\nabla \times \mathbf{u})/h$  подчиняется уравнению

$$\partial_i q + (\mathbf{u} \cdot \nabla)q = \frac{1}{2h}(\nabla h \times \nabla \tau).$$

Отметим, что интегралы с  $F_1 = (1, \tau)$  и  $F_2 = 0$ :

$$Q = \int h d\mathbf{x}, \quad N = \int h \tau d\mathbf{x},$$

являются простейшими из казимиров и имеют смысл полного объема и полной плавучести, соответственно.

За каждым интегралом движения стоит симметрия, означающая существование преобразования, которое обеспечивает инвариантность уравнений движения.

В тех случаях, когда такое преобразование не известно, говорят, что симметрия скрыта.

Преобразования симметрии условно можно разделить на два типа. Преобразования первого типа затрагивают только пространственные координаты и время. Например, с пространственно-временными преобразованиями симметрии связаны три фундаментальных закона механики [6]: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента количества движения. Масштабная инвариантность или скейлинг, о котором пойдет речь в контексте РТН в следующем разделе, также принадлежит к этому типу симметрий.

Другим важным типом преобразований симметрии являются калибровочные преобразования. Они не затрагивают пространственные координаты, а характеризуют внутренние свойства симметрии динамической системы. С такими преобразованиями связаны казимирсы.

Согласно общему принципу механики [5], если сохраняющийся функционал  $G$  не казимир, то он – генератор преобразования симметрии. Такое преобразование можно записать, используя скобки Пуассона, в виде эволюционных уравнений по некоторому параметру, играющему роль времени. В работе [7] этот факт был использован для доказательства масштабной инвариантности минимальной модели РТН.

### 3. Скейлинг гидростатических моделей РТН

Чтобы установить свойство масштабной инвариантности для минимальной модели РТН, слегка обобщим ее, рассмотрев вместо (5), (6) уравнения

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = G_0 \mathbf{x} - \frac{1}{2h} \nabla (h^2 \tau), \quad (10)$$

$$\partial_t h + \nabla (h \mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau = 0. \quad (11)$$

Модифицированная модель отличается от минимальной лишь тем, что в правую часть уравнения (10) включена внешняя сила  $G_0 \mathbf{x}$ , которая, в зависимости от знака константы  $G_0$ , является либо центростремительной ( $G_0 < 0$ ), либо центробежной ( $G_0 > 0$ ). Заметим, что несмотря на такую модификацию, модель остается консервативной и скобки Пуассона (7), (8) сохраняются. Изменяется лишь гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \int (h \mathbf{u}^2 + h^2 \tau - G_0 h \mathbf{x}^2) d\mathbf{x},$$

приобретая дополнительное слагаемое (последний член под знаком интеграла).

Чтобы найти новый инвариант движения в модифицированной модели, рассмотрим два интеграла

$$I = \int h \mathbf{x}^2 d\mathbf{x}, \quad V = \int h (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x}. \quad (12)$$

Эти интегралы хорошо известны в механике как момент инерции и вириал. Используя уравнения движения (10), (11), легко убедиться, что интегралы  $I$  и  $V$ , будучи величинами зависящими от времени, подчиняются уравнениям

$$\frac{dI}{dt} = 2V, \quad \frac{dV}{dt} = 2(H + G_0 I),$$

и могут быть представлены в каноническом виде

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial G}{\partial V}, \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial I}.$$

Здесь функционал  $G$ , играющий роль гамильтониана, описывается выражением

$$G = V^2 - 2IH - G_0 I^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 - 2IH - G_0 I^2, \quad (13)$$

и является новым инвариантом движения, который обусловлен масштабной инвариантностью уравнений движений (10), (11).

Чтобы доказать это, рассмотрим преобразование

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{I}}, \quad t' = \int \frac{dt}{I}, \quad h = \frac{h'}{I}, \quad \tau = \tau'. \quad (14)$$

которое связывает старые (нештрихованные) переменные (как независимые  $\mathbf{x}$ ,  $t$ , так и зависимые  $h$ ,  $\tau$ ) и новые (штрихованные).

Используя тот факт, что при этом скорость преобразуется как

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{I}} (\mathbf{u}' + V\mathbf{x}'), \quad (15)$$

легко показать, что преобразование (14) оставляет уравнения (10), (11) инвариантными, сохраняя их прежний вид

$$\partial_t' \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = G\mathbf{x}' - \frac{1}{2h'} \nabla' (h'^2 \tau'), \quad (16)$$

$$\partial_t' h' + \nabla' (h' \mathbf{u}') = 0, \quad \partial_t' \tau' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \tau' = 0, \quad (17)$$

и лишь меняет константу  $G_0$  на  $G$ . Здесь для производных по новым координатам и времени введены обозначения  $\nabla' = \partial/\partial \mathbf{x}'$  и  $\partial_t' = \partial/\partial t'$ .

Следует отметить, что преобразование (14) превращает зависящие от времени интегралы  $I$  и  $V$  в инварианты

$$I' = \int h' \mathbf{x}'^2 d\mathbf{x}' = 1, \quad V' = \int h' (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}') d\mathbf{x}' = 0. \quad (18)$$

При этом для интегралов движения  $H'$  и  $G'$  в новой системе можно установить равенства

$$H' = \frac{1}{2} \int (h' \mathbf{u}'^2 + h'^2 \tau' - Gh' \mathbf{x}'^2) d\mathbf{x}' = -G, \quad G' = V'^2 - 2I'H' - GI'^2 = G.$$

#### 4. Автомодельность и коллапс

Все рассуждения ниже проводятся в рамках предположения, что активный слой конечен, т. е. переменная  $h$  обращается в нуль вне некоторой компактной области, заданной на горизонтальной плоскости  $z = 0$ . Поскольку  $G$  и  $H$  являются константами движения, для минимальной модели, у которой  $G_0 = 0$ , производная по времени от (13) приводит к соотношению

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 4H. \quad (19)$$

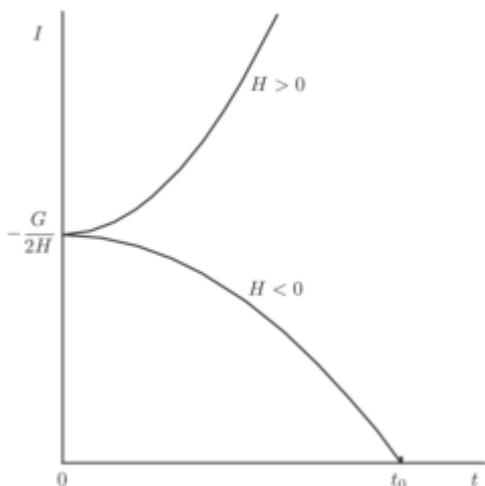


Рис. 2. Сценарии эволюции момента инерции активного слоя из состояния покоя

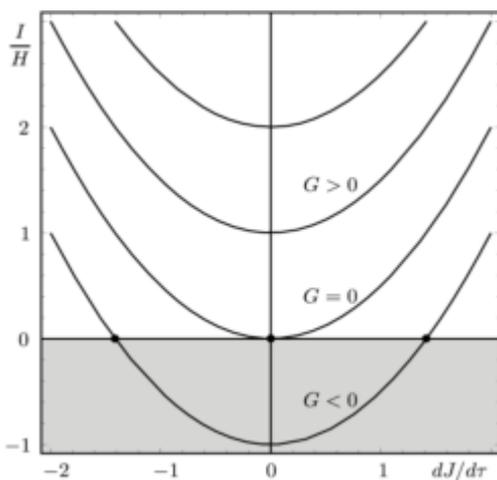


Рис. 3. Фазовые портреты режимов эволюции. Серым выделена область  $H < 0$ . Точки коллапса  $I = 0$  выделены знаком •

В нелинейной оптике [8] это равенство известно как вириальная теорема. В том простом случае, когда движения развиваются из состояний покоя  $(dI/dt)_{t=0} = 0$ , уравнение (19) дает

$$I = -\frac{G}{2H} + 2Ht^2.$$

Поскольку физический смысл имеют лишь неотрицательные значения  $I$ , возможны два сценария (см. рис. 2).

Либо  $G < 0$  и  $H > 0$ , и тогда  $I$  со временем возрастает, что говорит о растекании активного слоя. Либо  $G > 0$  и  $H < 0$ , и тогда  $I$  убывает и обращается в нуль, что говорит о коллапсе, который происходит за конечное время

$$t_0 = \frac{\sqrt{G}}{2|H|}.$$

За это время компактная область, занятая жидкостью, собирается в точку и превращается в восходящую бесконечно тонкую струю. Совершенно понятно, что такие режимы реализуются только при условии

$$H = \frac{1}{2} \int h_0^2 \tau_0 dx < 0,$$

что возможно только, если начальное распределение плавучести  $\tau_0$  не является знакоположительной функцией.

В общем случае, когда коллапс развивается не из состояния покоя  $(dI/dt)_{t=0} \neq 0$ , он возможен при любом знаке  $H$ . Это легко увидеть из соотношения (13), если, полагая в нем  $G_0 = 0$  и используя масштабное преобразование  $I \rightarrow JH$ ,  $t \rightarrow t/2$ , переписать его как

$$\frac{G}{H^2} = \left( \frac{dJ}{dt} \right)^2 - 2J.$$

На рис. 2 показаны фазовые портреты для двух режимов  $G < 0$  и  $G > 0$  в плоскости  $(dI/dt, J)$ . Первый режим  $G < 0$  возможен только при  $H > 0$  и коллапсов не допускает. Второй  $G > 0$  возможен как при  $H < 0$  (область выделена серым фоном), так и при  $H > 0$  на участке слева, где справедливо неравенство

$$(dI/dt)_{t=0} < -2\sqrt{2I_0H}.$$

Здесь  $I_0 = I|_{t=0}$  – начальный момент инерции активного слоя.

Масштабная инвариантность подразумевает существование автомодельных решений. Будучи промежуточной асимптотикой невырожденных задач [9], такие решения весьма полезны при изучении финальных стадий сильно нелинейных процессов, когда система забывает о деталях, связанных с начальными данными, и ее поведение полностью зависит от интегралов движения. Автомодельные решения не только отражают существование симметрии, но и играют роль структурных элементов, из которых можно составить асимптотику проблемы Коши при  $t \rightarrow \infty$ . Именно в этой роли они выступают при изучении коллапсов – явлений, в которых формирование особенности происходит за конечный промежуток времени [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

Прямое указание на существование автомодельных решений в минимальной модели дает тот факт, что при  $\mathbf{u}' = 0$  из (14)–(17) следует, что

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2I} \frac{dI}{dt} \mathbf{x}, \quad h = \frac{1}{I} h' \left( \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{I}} \right), \quad \tau = \tau' \left( \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{I}} \right),$$

где  $h'$  и  $\tau'$  как функции автомодельной переменной  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/\sqrt{I}$  удовлетворяют уравнению

$$2Gh'\mathbf{x}' = \nabla'(h'^2\tau').$$

Обладая радиальной симметрией, это уравнение имеет физически разумные решения только на конечном круге. Поэтому, выбирая должным образом масштаб переменной  $s = \mathbf{x}^2$ , без потери общности ищем решения для уравнения

$$Gh' = \frac{d}{ds} (h'^2\tau'),$$

на круге единичного радиуса.

Чтобы построить такие решения, рассмотрим функцию  $f(s)$ , которая задана на отрезке  $[0,1]$ , имеет отрицательную производную  $df/ds < 0$  и ведет себя в окрестности  $s = 1$  как  $f \approx (1-s)^{1+\gamma}$ , где параметр  $\gamma$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

Действительно, из любой такой функции  $f(s)$  могут быть составлены решения

$$h' = -\frac{1}{a\pi} \frac{df}{ds}, \quad \tau' = -\frac{2Gf}{a\pi h'^2}, \quad a = \int_0^1 f ds, \quad (20)$$

где нормировочный коэффициент  $a$  находится из условия (18). Легко проверить, что решения (20) обладают всеми необходимыми свойствами: дают для  $h'$  знакоположительную функцию, которая в точке  $s = 1$  вместе с  $\tau'$  обращается в нуль по корневым законам

$$h' \propto (1-s)^\gamma, \quad \tau' \propto (1-s)^{1-\gamma}.$$

Следует отметить, что под вириальную теорему попадают лишь изотропные коллапсы, когда область контакта активного слоя и дна, на который он опирается, сжимается в точку. Но возможен и не изотропный коллапс, когда область контакта стягивается в отрезок [17, 18], или линию, как для плоской модели активного слоя [19].

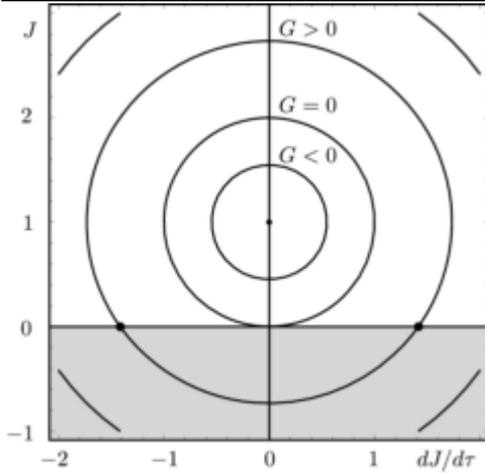


Рис. 4. Фазовый портрет режимов эволюции в модели с вращением. Серым выделена область  $H < 0$ . Точки коллапса  $J = 0$  выделены знаком •

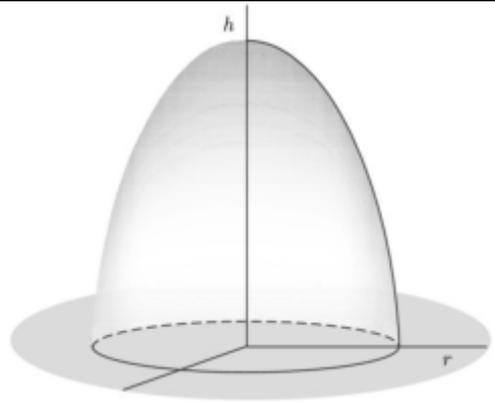


Рис. 5. Структурные элементы коллапса в негидростатических моделях

### 5. Коллапс во вращающейся гидростатической модели

В предположении, что слои вращаются с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , формулировка минимальной модели изменяется. Уравнения (5), (6) переформулируются как

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\frac{1}{2h} \nabla(th^2), \quad (21)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau = 0, \quad (22)$$

из-за того, что в уравнение для скорости добавляется ускорение Кориолиса  $2\Omega \times \mathbf{u}$ .

Хотя из-за галилеевой инвариантности эта модель не попадает рамки применимости вириальной теоремы (19), для нее также можно сформулировать свой вариант этой теоремы. С этой целью, кроме момента инерции  $I$  и вириала  $V$ , необходимо использовать еще и угловой момент

$$M = \int h(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Вместе интегралы  $I$ ,  $V$ ,  $M$  подчиняются замкнутой системе уравнений

$$\frac{dI}{dt} = 2V, \quad \frac{dV}{dt} = 2(H + \Omega M) \quad \frac{dM}{dt} = -2\Omega V.$$

Более подробное обсуждение подхода, основанного на этой системе уравнений, и классификацию возможных режимов можно найти в работах [19, 17, 18]. Однако существует другой, более рациональный путь, позволяющий получить тот же результат, оставаясь в рамках парадигмы о масштабной инвариантности гидростатических моделей РТН (см. раздел 3).

Сделаем преобразование из вращающейся системы отсчета в невращающуюся (инерциальную). Тогда, в невращающейся системе отсчета вместо (21), (22) получим уравнения (10), (11), в которых нужно положить  $G_0 = -\Omega^2$ .

В результате приходим к выводу, что кроме гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} \int (h\mathbf{u}^2 + h^2\tau + \Omega^2 h\mathbf{x}^2) d\mathbf{x},$$

за счет масштабной инвариантности сохраняется величина

$$G = \frac{1}{4} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 - 2IH + \Omega^2 I^2. \quad (23)$$

Если сделать масштабное преобразование  $I \rightarrow JH/\Omega^2$ ,  $t \rightarrow t/2$ , это соотношение можно переписать в виде

$$1 + \frac{\Omega^2}{H^2} G = \left( \frac{dJ}{d\tau} \right)^2 + (1 - J)^2.$$

Построив фазовый портрет в плоскости  $(dJ/dt, J)$ , можно сделать следующее заключение. Во-первых, при  $-H^2/\Omega^2 < G < 0$  возможны только замкнутые траектории, которые соответствуют периодическим (осциллирующим) режимам. Эти режимы никогда не достигают коллапса и характеризуются  $H > 0$ . Стационар ( $dJ/dt = 0$ ,  $J = 1$ ) реализуется при достижении нижней границы  $G = -H^2/\Omega^2$ . Во-вторых, независимо от знака  $H$ , режимы с коллапсом возможны только при  $G \geq 0$ .

Что касается структурных элементов коллапса, то вопрос решается аналогично, как и в предыдущем разделе. И во вращающейся, и в невращающейся гидростатических моделях ответ связан с решением уравнений типа (18), который содержит функциональный производ. Этот производ устраняется в следующем негидростатическом приближении. В таких моделях структурные элементы выглядят как жидкие полу-эллипсоиды (см. рис. 5) с основанием в плоскости границы  $z = 0$ .

## 6. Негидростатическая модель активного слоя

Несмотря на внутреннюю непротиворечивость и наличие простых аналитических решений, модели мелкой воды с горизонтально неоднородным скачком плотности не дают в гидростатическом приближении правильной картины развития РТН на финальной стадии. На этой стадии приближение гидростатического баланса не работает, а отказ от него сопряжен с пересмотром коллапса как сценария развития РТН.

Фактически, рэлей-тейлоровская неустойчивость границы раздела развивается по закону автомодельного коллапса только на начальной стадии, когда отклонение от гидростатического приближения невелико. В частности [19, 17, 18], если слой более легкой жидкости находится снизу, этот механизм приводит к формированию восходящих струй, высота которых растет по закону  $h: (t_0 - t)^{-D/3}$ , где  $t_0$  – время коллапса, а  $D$  – размерность задачи. В действительности, однако, образования особенности за конечное время  $t_0$  не происходит, поскольку по мере роста струй, роль вертикальных движений повышается и приближение гидростатичности нарушается.

Оценить закон роста высоты струй можно из соображений размерности [20]. Предположим, что основными размерными параметрами восходящей струи являются ее максимальная высота  $h$ , которая в начальный момент времени имела значение  $h_0$ , ускорение силы тяжести  $g$ , число Атвуда  $A$ , текущее время  $t$  и характер-

ное время  $t_0$  возможного формирования коллапса. Таким образом,  $h = h(t, g, t_0, h_0, A)$ , откуда из соображений размерности следует зависимость  $h = h_0 F(t^2 / h_0, t_0 / t, A)$ .

На больших временах при  $t \gg t_0$ , когда второй аргумент стремится к нулю, система должна "забывать" начальные условия. Поэтому зависимость от  $h_0$  должна исчезнуть. А это возможно только, если функция  $F$  линейна по первому аргументу. Таким образом, качественные соображения приводят нас к закону  $h \sim g t^2 f(A)$ . В отличие от коллапса, который развивается за конечный промежуток времени  $t_0$ , такую степенную неустойчивость в физике называют алгебраической [21].

Уравнения движения для модели мелкой воды с горизонтально неоднородным скачком плотности в негидростатическом приближении могут быть выведены непосредственно из полных уравнений гидродинамики традиционными методами, используя процедуру усреднения. Однако для подобных типов моделей, существует более простой, и что самое главное, общий метод, позволяющий получить такие уравнения из первых принципов [5].

В частности, если вращение отсутствует, соответствующие уравнения движения следуют из гамильтоновой формулировки с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \int (h \mathbf{u}^2 + \frac{1}{3} h^3 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + h^2 \tau) d\mathbf{x}, \quad (24)$$

и скобками Пуассона (7), (8).

Чтобы записать уравнения движения, кроме скобок Пуассона нужно учесть, что гидродинамический импульс  $\mathbf{m}$  и скорость  $\mathbf{u}$  связаны дуальными соотношениями (9), которые дают

$$\mathbf{m} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}} = h \mathbf{u} - \frac{1}{3} \nabla (h^3 \nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (25)$$

Тогда для рассматриваемой нами модели найдем

$$\partial_t m_i = \{m_i, H\} = -m_k \partial_i u_k - \partial_k (m_i u_k) - h \partial_i \frac{\delta H}{\delta h} + \frac{\delta H}{\delta \tau} \partial_i \tau, \quad (26)$$

$$\partial_t h = \{h, H\} = -\partial_i (h u_i), \quad \partial_t \tau = \{\tau, H\} = -u_i \partial_i \tau. \quad (27)$$

Использование (25) и соотношений

$$\frac{\delta H}{\delta \tau} = \frac{1}{2} h^2, \quad \frac{\delta H}{\delta h} = h \tau - \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{1}{2} h^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2,$$

позволяет переформулировать уравнения движения (26), (27) в терминах переменных  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $h$  и  $\tau$ ,

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{h} \nabla \left( h^2 \left[ \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{3} \frac{d^2 h}{dt^2} \right] \right), \quad (28)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t \tau + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau = 0. \quad (29)$$

Уравнения (28), (29) описывают усредненное по глубине течение в нижнем (активном) слое мелкой воды в негидростатическом приближении. Отметим, что формально при  $\tau = g = \text{const}$  уравнения (28), (29) переходят в известные уравнения Грина–Нагди [22, 23, 24], описывающие гравитационные волны на поверхности мелкой воды в приближении негидростатичности. Если же гидростатический баланс нарушен слабо и есть основания пренебречь поправкой Грина–Нагди – последним членом в уравнении (28), мы получаем уравнения (5), (6) для модели

активного слоя в приближении гидростатичности [19, 17, 18]. Тем не менее модель (28), (29) нельзя считать обобщением гидростатической модели в строгом смысле этого слова. Как будет показано далее, модель (28), (29) основана на принципе доминантного баланса. Согласно этому принципу после усреднения по глубине в гамильтониане (24) оставлены только те вклады, которые доминируют либо на начальной, либо на конечной стадиях РТН.

## 7. Автомоделные решения

В радиально-симметричном случае уравнения (28), (29) выглядят следующим образом:

$$\partial_t u + u \partial_r u - \frac{1}{r} v^2 = -\frac{1}{h} \partial_r \left( h^2 \left[ \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{3} \frac{d^2 h}{dt^2} \right] \right), \quad (30)$$

$$\partial_t v + u \partial_r v + \frac{1}{r} uv = 0, \quad \partial_t \tau + u \partial_r \tau = 0, \quad \partial_t h + \frac{1}{r} \partial_r (rhu) = 0, \quad (31)$$

где  $u$  и  $v$  – радиальная и азимутальная компоненты скорости.

В отличие от гидростатической модели, где наблюдается функциональный произвол в определении  $h$  и  $\tau$ , уравнения (30), (31) не обладают скейлинговой симметрией, но тем не менее, также имеют фиксированное автомоделное решение

$$h = \frac{a^3}{\beta^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{\beta^2}}, \quad \tau = b \sqrt{1 - \frac{r^2}{\beta^2}}, \quad u = \frac{\alpha}{\beta} r, \quad v = \frac{c}{\beta^2}. \quad (32)$$

Здесь  $\beta(t)$  и  $\alpha(t)$  – некоторые функции времени, а  $h_0$ ,  $\tau_0$  и  $c$  – константы, определяемые начальными условиями.

Решения (32) обнуляются вне круга радиусом  $|x| \leq \beta$  и описывают круглую полуэллипсоидальную струю. Вертикальная полуось  $h_{max} = a^3 / \beta^2$  характеризует высоту струи, а горизонтальная  $\beta$  – радиус основания, которым струя опирается на дно  $z = 0$ .

Подстановка решений (32) в уравнения (30), (31), после обезразмеривания с характерными масштабами пространства  $L$  и времени  $T$

$$L = 2^{1/6} a, \quad T = 2^{-1/6} a^2 |2c^2 + 3ba^3|^{-1/2},$$

приводит к уравнениям

$$\beta(1 + \beta^6) \frac{d\alpha}{dt} = 3\alpha^2 + \frac{\sigma}{4} \beta^4, \quad \frac{d\beta}{dt} = \alpha. \quad (33)$$

Здесь  $\sigma$  – знаковая функция

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{for } \kappa > 0; \\ 0 & \text{for } \kappa = 0; \\ -1 & \text{for } \kappa < 0; \end{cases} \quad \kappa = 2c^2 + 3ba^3.$$

Уравнения (33) сохраняют интеграл

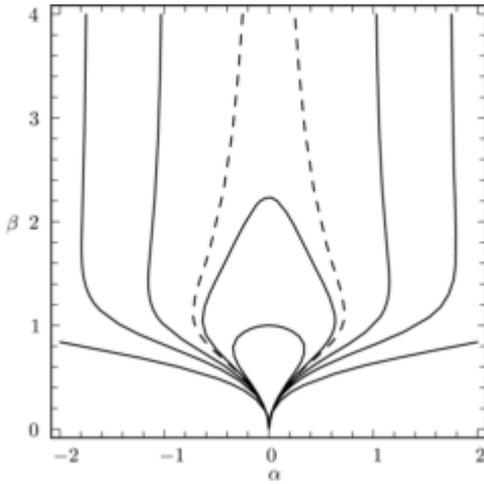


Рис. 6. Фазовый портрет негидростатической модели в режиме неустойчивости при  $\kappa < 0$

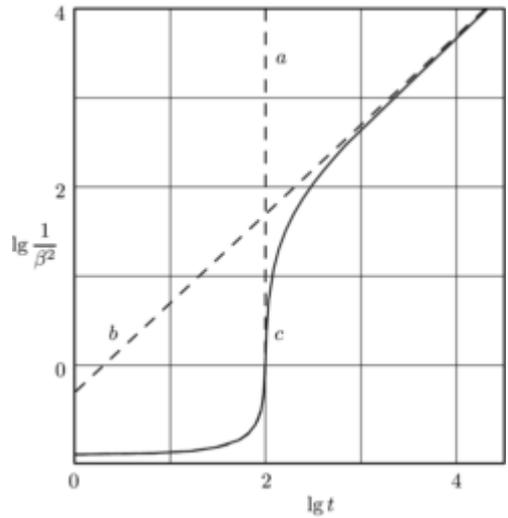


Рис. 7. Переход из режима коллапса в режим алгебраической неустойчивости. Асимптотика (a) соответствует решению (34), а асимптотика (b) – решение (34)

$$E = \frac{\alpha^2(1 + \beta^6)}{2\beta^6} + \frac{\sigma}{8\beta^2},$$

и являются гамильтоновыми

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\beta^6}{1 + \beta^6} \frac{\partial E}{\partial \beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\beta^6}{1 + \beta^6} \frac{\partial E}{\partial \alpha}.$$

В зависимости от знака  $\kappa$ , у системы (33) есть два типа решений: устойчивые при  $\sigma > 0$  и неустойчивые при  $\sigma \leq 0$ . Фазовые траектории системы для этого случая представлены на рис. 6. Пунктирная линия соответствует сепаратрисе  $E = 0$ , которая отделяет замкнутые фазовые траектории при  $E < 0$  от не замкнутых при  $E > 0$ .

Отметим, что, независимо от знака энергии  $E$ , все траектории все фазовые траектории достигают критической точки ( $\alpha = 0, \beta = 0$ ), в окрестности которой система ведет себя неустойчиво.

На начальной стадии развития неустойчивости приближение гидростатичности соблюдается до тех пор пока поддерживается неравенство  $\beta \ll 1$ . В этом случае из уравнений (33) приближенно следует уравнение

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} \approx -\frac{1}{4}\beta^{-3},$$

которое имеет решение

$$\beta = (t_0 - t)^{1/2}, \tag{34}$$

описывающее коллапс за конечное время  $t_0$ .

Как видно из рис. 7, это решение остается справедливым пока  $\beta$  не становится величиной порядка единицы. Спустя некоторое время, когда переменная  $\beta$  стано-

вится столь малой, что справедливо неравенство  $\beta \ll 1$ , наступает финальная стадия, на которой неустойчивость достаточно хорошо можно описать уравнением

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{3}{\beta} \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2 - \frac{1}{4}\beta^3.$$

Это уравнение имеет решение

$$B = 2t^{-1}. \quad (35)$$

С помощью этого решения в случае отсутствия вращения  $c = 0$ , которое играет стабилизирующую роль, в размерных величинах можно найти

$$h_{max} = a^3 \beta^{-2} \approx \frac{3}{4} b t^2. \quad (36)$$

Поскольку, в приближении  $\rho'/\rho_0 \ll 1$  справедливо соотношение  $\rho'/\rho_0 \approx 2A$ , а число Атвуда  $A$  связано с относительной плавучестью  $\tau$  линейно как

$$\tau \approx 2A, \quad (37)$$

соотношение (36) можно переписать в виде

$$h_{max} \approx \frac{3}{2} A_0 g t^2, \quad (38)$$

где  $A_0 = b/(2g)$  – пиковое значение числа Атвуда.

Степенной рост возвышения  $h_{max}$  со временем говорит, что режим взрывной неустойчивости, предсказанной для гидростатических моделей [19, 17, 18], на финальной стадии замедляется и превращается в режим алгебраической неустойчивости [25, 20]. В частности из закона (38) следует, что передний фронт струи, сформированной из более легкой жидкости, перемещается вверх с постоянным ускорением  $3gA_0$ . Отметим, что модель Ферми–Неймана [26] дает аналогичный результат, но с коэффициентом  $16/7$  перед ускорением силы тяжести  $g$ .

Отметим, что если  $\kappa < 0$  и  $E < 0$ , то на финальный режим алгебраической неустойчивости система выходит из любых начальных условий. Однако, при  $E > 0$  реализуется другой финальный режим

$$\beta \approx \sqrt{2Et}, \quad \alpha \approx \sqrt{2E}, \quad (39)$$

на который система выходит при  $t \rightarrow \infty$ . Нетрудно догадаться, что если закон (35) соответствует формированию бесконечно узкой струи, то закон (39) описывает обратный процесс оседания струи на дно.

В устойчивом случае при  $\kappa > 0$  движения реализуется только, если  $E > 0$ . Двигаясь по открытым фазовым траекториям (см. рис. 8), система (33) имеет те же тривиальные асимптотики что и (39).

## 8. Обоснование негидростатической модели РТН

Гамильтониан (24) для негидростатической модели может быть обоснован в рамках двухслойной модели. Для простоты предположим, движение жидкости в верхнем слое потенциально. Тогда полная энергия представляет собой сумму полных энергий верхнего  $H_1$  и нижнего  $H_2$  слоев:

$$H = H_1 + H_2, \quad (40)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 \left( (\nabla \varphi)^2 + (\partial_z \varphi)^2 - 2gz \right) dz dx, \quad (41)$$

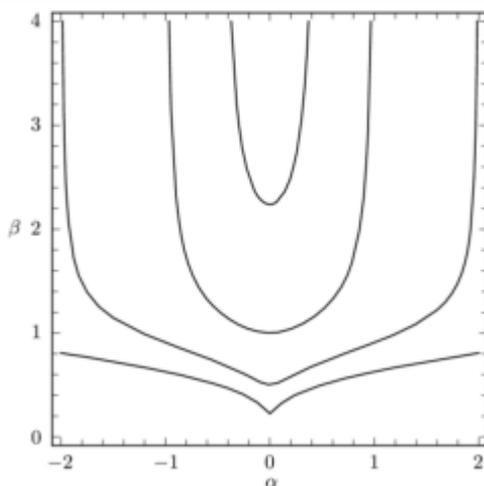


Рис. 8. Фазовый портрет негидростатической модели в устойчивом режиме  $\kappa > 0$

$$H_2 = \frac{1}{2} \int_0^h (\rho_0 + \rho') (\mathbf{u}^2 + w^2 + 2gz) dz dx. \quad (42)$$

Здесь  $w$  – вертикальная компонента скорости в нижнем слое, а  $\varphi$  – гидродинамический потенциал в верхнем.

С помощью условий несжимаемости, непрерывности нормальной компоненты скорости на границе раздела и отсутствия возмущений при  $z \rightarrow \infty$ , для потенциала  $\varphi$  можно сформулировать следующую краевую задачу:

$$(\Delta + \partial_z^2) \varphi = 0, \quad \varphi|_{z=\infty} = 0, \quad (43)$$

$$(\mathbf{u} - \nabla \varphi)_{z=h} \cdot \nabla h = (w - \partial_z \varphi)_{z=h}, \quad (44)$$

где  $\Delta$  – двухмерный лапласиан.

В гидростатическом приближении  $w = 0$ , и  $\mathbf{u}$  не зависит от  $z$ . Предположим теперь, что условие гидростатичности нарушено ( $w \neq 0$ ), но так, что  $\mathbf{u}$  можно по-прежнему считать независимой от  $z$ . Тогда из условия бездивергентности  $\partial_z w + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  и краевого условия  $w|_{z=0} = 0$  следует соотношение

$$w = -z \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (45)$$

К этому соотношению нужно относиться как к одной из возможных параметризации. В частности, можно было бы рассмотреть параметризацию, которая предполагает линейную зависимость профиля горизонтальной скорости  $\mathbf{u}$  от  $z$ :

$$\mathbf{u} = \frac{z}{h} \mathbf{v}, \quad w = -\frac{z^2}{2} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{v}}{h} \right),$$

или еще более общую

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} F\left(\frac{z}{h}\right), \quad w = \frac{z}{h} F\left(\frac{z}{h}\right) (\mathbf{v} \cdot \nabla) h - Q\left(\frac{z}{h}\right) \nabla \cdot (\mathbf{v} h),$$

где  $F$  и  $Q$  – некоторые функции, связанные соотношением  $F(z) = dQ(z)/dz$ , а  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  – горизонтальная скорость на границе раздела, т. е.  $\mathbf{v} = \mathbf{u}|_{z=h}$ . Но эти параметризации привели бы к более сложной модели.

Таким образом, выбор параметризации зависит от физических и модельных предположений и заслуживает отдельного изучения. Мы ограничились самой простой параметризацией, которая пригодна для качественного исследования влияния негидростатичности.

Прежде всего, используя (45), перепишем краевое условие (44) как

$$(\nabla\varphi\nabla h - \partial_z\varphi)_{z=h} = \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = -\partial_t h. \quad (46)$$

Затем, полагая без ограничения общности  $\rho_0 = 1$ , после интегрирования по  $z$ , из (40)–(42) в главном порядке по  $\rho'/\rho_0 \ll 1$  получим

$$H = \frac{1}{2} \int (h\mathbf{u}^2 + h^2\tau + \frac{1}{3}h^3(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \varphi|_{z=h} \nabla \cdot (h\mathbf{u})) d\mathbf{x}, \quad (47)$$

где  $\tau = g\rho'/\rho_0$  – относительная плавучесть.

За эффект негидростатичности в гамильтониане (47) отвечают два последних члена. Первый соответствует поправке Грина–Нагди, а второй обусловлен реакцией на возмущение верхнего слоя. В контексте двухслойной модели это означает, что использование усеченного гамильтониана (24) оправдано только, если можно пренебречь этим возмущением.

Чтобы обосновать процедуру "усечения" гамильтониана, выразим потенциал  $\varphi$  через интеграл двойного слоя

$$\varphi = -\partial_z \int \frac{\Phi(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'}{\sqrt{z^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}}, \quad (48)$$

где для плотности  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  с помощью краевого условия (46) формулируется интегральное уравнение

$$\nabla \cdot \int \frac{\nabla' \Phi(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'}{\sqrt{h^2(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}} = -\nabla \cdot (h\mathbf{u}) = \partial_t h. \quad (49)$$

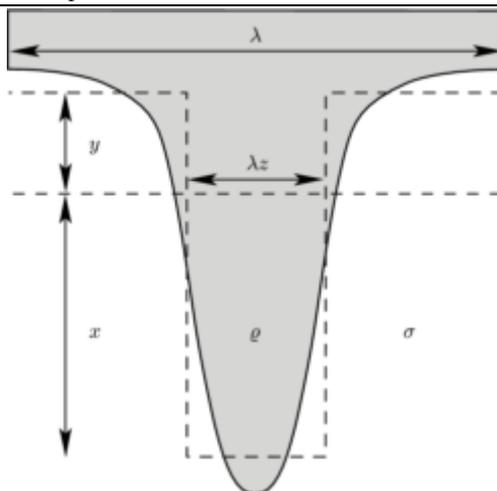
Оценим вклады членов, определяющих кинетическую энергию в гамильтониане (47), полагая, что каждая из переменных  $\varphi|_{z=h}$ ,  $\Phi$ ,  $h$ , и  $\mathbf{u}$  изменяется автомодельно, т. е. могут быть представлены как

$$\varphi|_{z=h} = \mu\hat{\varphi}, \quad \Phi = \kappa\hat{\Phi}, \quad \mathbf{u} = \alpha\hat{\mathbf{u}}, \quad h = \beta^{-2}\hat{h}, \quad \tau = \hat{\tau}, \quad (50)$$

где  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – некоторые зависящие от времени коэффициенты, а  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{\Phi}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{h}$ ,  $\hat{\tau}$  – функции, зависящие только от автомодельной переменной  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/\beta$ . Отметим, что последние два равенства в (50) являются прямым следствием законов сохранения полного объема  $Q$  и полной плавучести  $N$ :

$$Q = \int h d\mathbf{x} = const, \quad N = \int h\tau d\mathbf{x} = const.$$

Выбрав в качестве масштабов длины и скорости некоторые величины  $L$  и  $U$ , можно всегда обезразмерить задачу. Поэтому без ограничения общности параметр автомодельности  $\beta$ , который играет роль характерного горизонтального масштаба, равно как и остальные  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$ , можно считать безразмерными величинами. Очевидно, что в приближении мелкой воды справедливо неравенство  $\beta \gg 1$ , тогда как в приближении "глубокой" воды – противоположное неравенство  $\beta = 1$ .



**Рис. 9.** Граница раздела в модели Ферми–Неймана на периоде  $\lambda$ . Реальный профиль обозначен сплошной кривой, а пунктиром – прямоугольная параметризация. Горизонтальная пунктирная линия – положение невозмущенной границы раздела

Прежде всего рассмотрим режим мелкой воды ( $\beta \neq 1$ ). В этом случае из (48), (49) можно найти

$$\mu \sim \kappa\beta^{-3}, \quad \kappa \sim \alpha\beta^{-2}, \quad \alpha = \partial_t\beta,$$

что приводит к оценкам

$$h\mathbf{u}^2 \sim \alpha^2\beta^{-2}, \quad h^3(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \sim \varphi \Big|_{z=h} \nabla \cdot (h\mathbf{u}) \sim \alpha^2\beta^{-8}.$$

Аналогичным образом, в режиме "глубокой" воды ( $\beta \ll 1$ ) можно получить, что

$$\mu \sim \kappa\beta^6, \quad \kappa \sim \alpha\beta^{-5}, \quad \alpha = \partial_t\beta.$$

Из этих соотношений следуют асимптотические оценки

$$h\mathbf{u}^2 \sim \varphi \Big|_{z=h} \nabla \cdot (h\mathbf{u}) \sim \alpha^2\beta^{-2}, \quad h^3(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \sim \alpha^2\beta^{-8}.$$

Таким образом, последний член в гамильтониане (47) не доминирует ни в одном из двух режимов, а изменения, обусловленные плавучестью (вторым членом), компенсируются либо первым, либо третьим членом в зависимости от режима. Этот факт и является обоснованием процедуры "усечения".

## 9. Эффект "сверхускорения"

Проблема РТН оказалась в центре внимания Ферми и фон Неймана в ходе исследований, которые проводились в рамках Манхэттенского проекта. Как известно, этот проект был направлен на разработку атомной бомбы. В первых образцах этого вида оружия для запуска цепной реакции использовался принцип сферической имплозии – направленный внутрь взрыв. Так как под действием взрыва и внешняя оболочка, и обжимаемая мишень ведут себя как две жидкости, на их границе возможно развитие неустойчивости, которая нарушает эффективность сжатия мишени. Первый, кто обратил на это внимание и указал на ключевую роль неустойчивости для процесса ядерного взрыва, был Дж. Тэйлор.

Чтобы получить оценки для РТН, Ферми совместно с фон Нейманом [26] рассмотрели следующую плоскую периодическую модель. Как показано на рис. 9, в

этой модели сверху располагалась жидкость большей плотности  $\rho$ , снизу меньшей  $\sigma$ , а граница раздела схематизировалась прямоугольниками. Таким образом, РТН моделировалась опускающимися (сужающимися) прямоугольными струями тяжелой жидкости, между которыми всплывали прямоугольные (расширяющиеся) "пузыри" легкой жидкости. Для описания этих структурных элементов модель имеет всего три параметра  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . В силу несжимаемости, эти параметры связаны друг с другом соотношением

$$y(1 - z) = xz.$$

Уравнения движений для такой модели были получены с использованием лагранжевого подхода и привели к следующему асимптотическому выражению

$$x \approx \frac{8}{7} \frac{A}{1 - A} g t^2, \quad (51)$$

где  $A = (\rho - \sigma)/(\rho + \sigma)$  – число Атвуда ( $0 \leq A \leq 1$ ).

В простейшем случае, когда нисходящая струя падает в вакуум ( $A = 1$ ), согласно формуле (51), ее передний фронт движется со "сверхускорением"  $8/7$ . Именно на этот эффект впервые обратил внимание Ферми [27], объясняя его "грубостью" модели. Однако, несмотря на кажущуюся парадоксальность, в эффекте сверхускорения нет ничего противоестественного. Достаточно вспомнить (см., например, [28]), что пузырек воздуха в жидкости также поднимается вверх со сверхускорением 2.

Сам по себе эффект "сверхускорения" не должен вызывать особого беспокойства. Действительно, во всех точках течения, кроме внешних сил (в нашем случае это сила Архимеда) действует еще и градиент давления. Единственная точка, где действует только сила Архимеда, – это центр масс. Поэтому для него эффект "сверхускорения" это нонсенс. Ускорение центра масс не должно превышать ускорение за счет силы Архимеда.

Как известно, сила Архимеда действует на вытесненный объем жидкости и приложена к его центру масс. Найти высоту центра масс  $z_0(t)$  для струи можно из определения

$$\int (z - z_0) \rho' dz d\mathbf{x} = 0,$$

где  $\rho'(\mathbf{x}, t)$  – отклонение плотности струи от постоянной плотности  $\rho_0$  окружающей жидкости, и интегрирование ведется по объему, занятому струей.

Используя замену  $\rho' = \rho_0 t/g$ , после интегрирования найдем

$$z_0 = \frac{\Pi}{N}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int t h^2 d\mathbf{x}, \quad N = \int t h d\mathbf{x}. \quad (52)$$

Отметим, что числитель этого выражения  $\Pi$  совпадает с потенциальной энергией в гамильтониане (24), а знаменатель  $N$  – полная плавучесть. Таким образом, высота центра масс  $z_0$  зависит не только от формы струи  $h$ , но и от распределения в ней плавучести  $t$ .

Проверим теперь центр масс струи на отсутствие "сверхускорения". После подстановки решений (32) в (52) и интегрирования по  $\mathbf{x}$ , получим

$$z_0 = \frac{2}{5} \frac{a^3}{\beta^2} = \frac{2}{5} h_{max}.$$

Используя для амплитудного значения высоты струи  $h_{max}$  выражение (38) найдем, что

$$z_{11} = \frac{3}{5} A_{11} g t^2.$$

Неравенство  $\frac{3}{5} < 1$  ясно демонстрирует, что ускорение центра тяжести струи меньше чем ускорение за счет силы Архимеда.

### 10. Устойчивость решений

Рассмотрим плоскую (одномерную) версию негидростатической модели, как наиболее простую. В этом случае уравнения (28), (29) записываются в виде

$$\partial_t u + u \partial_x u = -\frac{1}{h} \partial_x \left( h^2 \left[ \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{3} \frac{d^2 h}{dt^2} \right] \right), \quad (53)$$

$$\partial_t \tau + u \partial_x \tau = 0, \quad \partial_t h + \partial_x (hu) = 0, \quad (54)$$

и их можно переписать в лагранжевых координатах. В таком виде их удобно использовать не только при аналитическом подходе, но и для численного тестирования модели.

Отметим, что уравнения (53)–(54), как и их радиальный аналог, имеют автомодельные решения

$$h = \frac{a}{\beta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 \beta^2}}, \quad \tau = \frac{2}{3} ba \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 \beta^2}}, \quad u = \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dt} x. \quad (55)$$

Здесь  $a$  и  $b$  – константы, определяемые начальными условиями, а  $\beta(t)$  – безразмерный параметр автомодельности, который подчиняется уравнению

$$\beta_{tt} = \frac{2\beta_t^2 + b\beta^3}{\beta(1 + \beta^4)}.$$

В режиме неустойчивости  $b < 0$  на начальной стадии, пока работает приближение гидростатичности, решение развивается в режиме коллапса, а параметр автомодельности приближенно находится из уравнения

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} \approx -|b| \beta^{-2},$$

которое имеет решение

$$\beta = \left| \frac{9}{2} b \right|^{1/3} (t_0 - t)^{2/3},$$

где  $t_0$  – время коллапса.

Переход к лагранжевым координатам осуществим с помощью параметризации  $x = \hat{x}(s, t)$ , где  $s$  – новая независимая переменная такая, что

$$\hat{x}_t(s, t) = u(x, t) \Big|_{x=\hat{x}}, \quad \hat{h}(s, t) = h(x, t) \Big|_{x=\hat{x}}, \quad \hat{\tau}(s, t) = \tau(x, t) \Big|_{x=\hat{x}}.$$

В новых переменных уравнения (53)–(54) записываются в виде

$$\hat{h}\hat{x}_t\hat{x}_s + \partial_s\left(\frac{1}{2}\hat{h}^2\hat{t} + \frac{1}{3}\hat{h}^2\hat{h}_t\right) = 0, \quad \partial_t(\hat{h}\hat{x}_s) = 0, \quad \hat{t}_t = 0. \quad (56)$$

Для проверки устойчивости решений рассмотрим начальную стадию их развития, ограничиваясь гидростатическим приближением. Тогда последним членом в первом из уравнений (56) можно пренебречь, а два следующих уравнений могут быть проинтегрированы. В результате получим

$$h_0\hat{x}_t + \frac{1}{2}\partial_s(\hat{h}^2\tau_0) = 0, \quad \hat{h}\hat{x}_s = h_0, \quad \hat{t} = \tau_0, \quad (57)$$

где функции  $h_0$  и  $\tau_0$  – некоторые распределения, которые зависят только от  $s$  и фиксируются начальными условиями.

Классический сценарий рэлей-тейлоровской неустойчивости соответствует начальному условию, в котором невозмущенный активный слой имеет постоянную глубину  $h_0$  = и постоянную плавучесть  $\tau_0 = g\rho'/\rho_0 = \text{const}$ . В этом случае уравнения (57) имеют стационарное решение

$$\hat{h}_{st} = h_0, \quad \hat{x}_{st} = s.$$

Легко показать, что при  $\tau_0 < 0$  оно неустойчиво. Действительно, рассматривая возмущенное решение  $\hat{h} = h_0 + h'(s, t)$ ,  $\hat{x} = s + x'(s, t)$ , и линеаризуя задачу (57) относительно малых возмущений  $h'$ ,  $x'$ , получим

$$x_{tt}' + \tau_0 h_s' = 0, \quad h' + h_0 x_s' = 0.$$

Совместное решение этих уравнений приводит к неустойчивости спектральных мод возмущения  $(h', x')$ :  $e^{\gamma t + ks}$  с инкрементом  $\gamma = |\tau_0 h_0|^{1/2} k$ , где  $k$  – волновое число.

Аналогично можно проанализировать устойчивость автомодельного решения (55), развивающегося при  $\tau_0 < 0$  в режиме коллапса [25]. В терминах лагранжевых переменных это решение записывается как

$$\hat{h}_{sim} = \frac{a}{\beta}\sqrt{1-s^2}, \quad \hat{x}_{sim} = a\beta s, \quad \beta = \left|\frac{9}{2}b\right|^{1/3} (t_0 - t)^{2/3}, \quad (58)$$

и соответствует распределениям

$$h_0 = a^2\sqrt{1-s^2}, \quad \tau_0 = \frac{2}{3}ba\sqrt{1-s^2}. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь возмущенную задачу с распределениями (59), полагая, что

$$\hat{h} = \frac{a}{\beta}\left(\sqrt{1-s^2} + h'\right), \quad \hat{x} = a(\beta s - x'), \quad (60)$$

где, как и раньше,  $h'$ ,  $x'$  – некоторые зависящие от  $s$  и  $t$  возмущения. Подставляя (60) в (57), после линеаризации получим

$$h' = \frac{x_s'}{\beta}\sqrt{1-s^2}, \quad \left(\partial_t^2 - \frac{2b}{3\beta^3}L_s\right)x' = 0, \quad L_s = (1-s^2)\partial_s^2 - 3s\partial_s.$$

Решение этой задачи методом разделения переменных и приводит к разложению

$$h'(s, t) = \sqrt{1-s^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\partial \Phi_n(s, t)}{\partial s},$$

$$x'(s, t) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(s, t),$$

$$\Phi_n = (t_0 - t)^{\frac{1}{3}\lambda_n} U_n(s).$$

Здесь  $U_n(s)$  – полиномы Чебышева второго рода,  $c_n$  – коэффициенты разложения, фиксируемые начальными условиями, а  $\lambda_n$  – собственные значения задачи. Полиномы Чебышева являются собственными функциями линейного оператора  $L_s$

$$L_s U_n = -n(n+2)U_n,$$

и, как известно, составляют полный набор функций, ортогональных с весом  $(1-s^2)^{-1/2}$  на интервале  $(-1, 1)$ . Учитывая это обстоятельство, собственные значения  $\lambda_n$  находятся из соотношения

$$(\lambda_n + 2)(\lambda_n - 1) = \frac{4}{3}n(n+2), \quad n \geq 0,$$

и возрастают с ростом  $n$  почти по линейному закону:  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3.09398$ , ... (см. рис. 10).

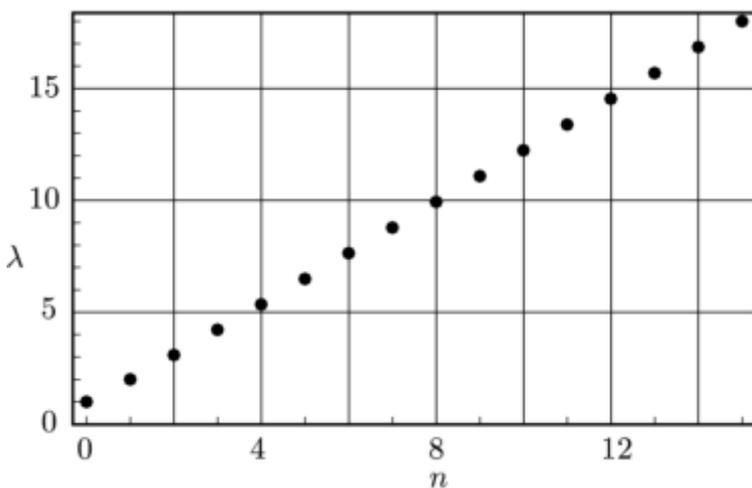


Рис. 10. Собственные значения  $\lambda_n$  задачи линейной устойчивости как функции  $n$

Самая опасная нулевая мода  $\Phi_0 = (t_0 - t)^{1/3}$  не зависит от  $s$ . Поэтому она дает вклад только в вариации возмущения  $x'$ :  $\beta\Phi_0 = t_0 - t$ , и этот вклад линейно затухает с ростом времени  $t > 0$ , окончательно исчезая при  $t = t_0$ . Вклад в вариации возмущения  $h'$  дают только следующие моды, начиная с  $\Phi_1 = 2(t_0 - t)^{2/3}s$ , но они быстро затухают по мере увеличения номера  $n$ . Таким образом, согласно [9], неотрицательность собственных значений и полнота собственных функций доказывают линейную устойчивость автомодельного решения (58) и соответственно (55).

### 11. Эффект обмеления

Поскольку негидростатические модели представляют собой параметризации, которые контролируют лишь интегральный общий баланс, они нуждаются в дополнительном тестировании. В этом отношении представляет интерес использование таких моделей для численного моделирования сравнительно мелкомасштабных явлений, например, эффекта обмеления [20]. Этот эффект проявляется как усиление провалов профиля  $h$  по обе стороны от струи по мере ее выхода из активного слоя под влиянием силы плавучести.

Согласно результатам предыдущего раздела соответствующая плоская модель формулируется в лагранжевых координатах

$$\hat{x}_t = u \Big|_{x=\hat{x}}, \quad \hat{h} = h \Big|_{x=\hat{x}}, \quad \hat{\tau} = \tau \Big|_{x=\hat{x}}.$$

и представляется уравнениями

$$\hat{h}\hat{x}_t\hat{x}_s + \partial_s \left( \hat{h}^2 \left[ \frac{1}{2} \hat{\tau} + \frac{1}{3} \hat{h}_s \right] \right) = 0, \quad \partial_t (\hat{h}\hat{x}_s) = 0, \quad \hat{\tau}_t = 0, \quad (61)$$

Как и радиальная, плоская модель имеет автомодельные решения

$$\hat{h} = \frac{a}{\beta} \sqrt{1-s^2}, \quad \hat{\tau} = \frac{2}{3} ba \sqrt{1-s^2}, \quad \hat{x} = a\beta s, \quad (62)$$

где  $a > 0$  и  $b$  – некоторые константы,  $-1 \leq s \leq 1$ , а автомодельный параметр  $\beta$  подчиняется уравнению

$$\beta_t = \frac{2\beta_t^2 + b\beta^3}{\beta(1+\beta^4)}. \quad (63)$$

В случае  $b < 0$  при  $t \rightarrow \infty$  уравнение (63) имеет степенную асимптотику

$$\beta \approx \frac{2}{|b|t^2}. \quad (64)$$

Хотя эта асимптотика является более медленной по сравнению с аналогичной асимптотикой (35) для радиальной модели, из (62) и (64) следуют соотношения

$$\hat{h}_{\tau_{0,t}} - \frac{a}{\beta} \approx \frac{a}{2} \frac{b}{|b|} t^2, \quad \tau_{0,t} - \frac{2}{3} ba - 2gA_{0,t}, \quad (65)$$

которые в точности совпадают с (37) и (38). Это означает, что, независимо от геометрии модели, передний фронт струи движется с постоянным ускорением  $3A_{0g}$ .

В общем случае изучение эволюции подразумевает решение задачи Коши, т. е. уравнения (61) необходимо решать при следующих начальных условиях

$$\hat{h}(s,0) = h_0(s), \quad \hat{x}(s,0) = s, \quad \hat{\tau}(s,0) = \tau_0(s).$$

Если в качестве новой переменной ввести смещение

$$\xi(s,t) = \hat{x}(s,t) - s,$$

и частично проинтегрировать, уравнения (57) можно свести к системе двух дифференциальных уравнений

$$h_0 \xi_t + \partial_s \left( \frac{1}{2} \hat{h}^2 \tau_0 + \frac{1}{3} \hat{h}^2 \hat{h}_s \right) = 0, \quad \hat{h} = \frac{h_0}{1 + \xi_s},$$

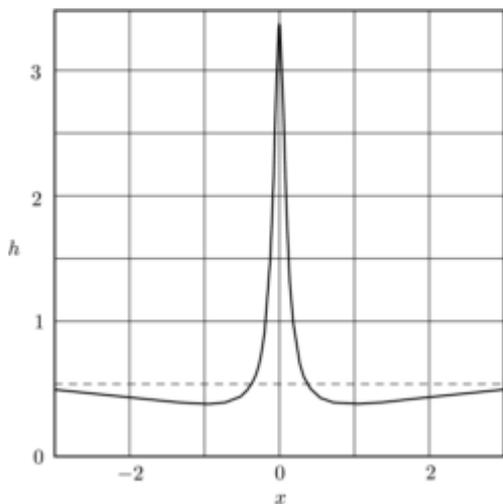


Рис. 11. Возвышение поверхности активного слоя  $h$  как функция  $x$  в момент времени  $t = 25$

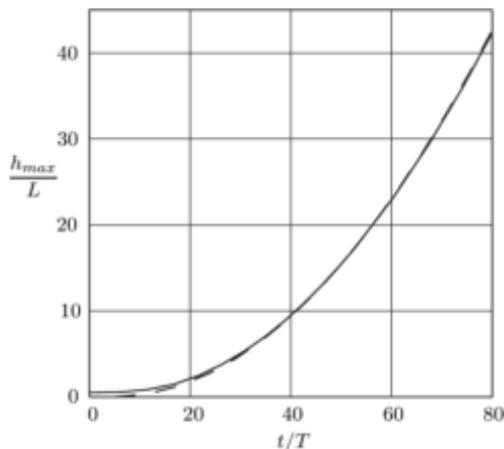


Рис. 12. Зависимость  $h_{max}$  от времени. Пунктирная кривая соответствует асимптотике (65), а сплошная вычислена численно

относительно двух переменных – возвышения границы раздела  $h(s, t)$  и смещения  $\zeta(s, t)$ .

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  активный плоский слой находится в покое  $\zeta_i(s,0) = 0$ , имеет постоянную высоту  $h_0(s) = L/2$ , и характеризуется следующим распределением относительной плавучести

$$\tau_0 = 10^{-2} \frac{L}{T^2} \left( 1 - 2 \cosh^{-2} \left( \frac{s}{L} \right) \right),$$

где  $L$  и  $T$  – масштабы длины и времени связанные соотношением  $L = gT^2$ .

Таким образом, мы имеем слой со знакопеременной относительной плавучестью. Поскольку, для такой модели общая картина эволюции не может быть строго автомодельной, интересно посмотреть на каких этапах и где возникают квази-автомодельные структуры, развитие которых ложится на асимптотику (65). Так как отрицательная плавучесть локализована в окрестности  $x = 0$ , центральная часть слоя должна приподниматься, формируя восходящую узкую струю. Согласно рис. 11, 12, этот процесс развивается достаточно быстро, и асимптотически при  $t/T > 20$  выходит на режим степенного роста  $h_{max}^* \sim t^2$ .

Еще одно любопытное явление, которое наблюдается при выходе струи из слоя, – эффект обмеления. Этот эффект проявляется как "провалы" в профиле возвышения  $h$  по обе стороны от восходящей струи. Зависимость уровня обмеления  $h_{min}/L$  от времени, представленная на рис. 13, показывает, что глубина впадин первоначально растет, а затем, после достижения максимального значения 0.2, медленно уменьшается.

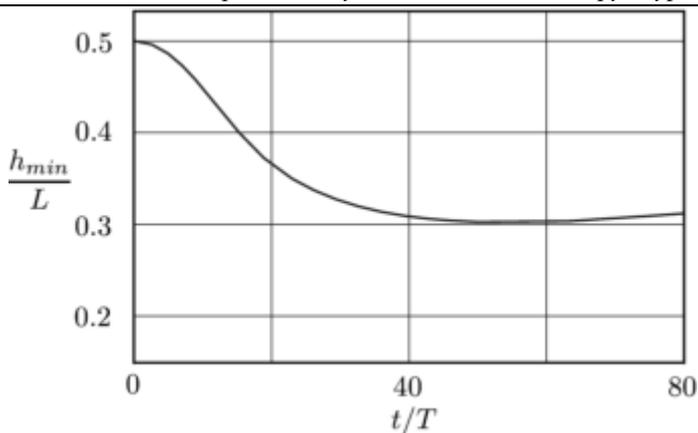


Рис. 13. Зависимость уровня обмеления  $h_{min}$  от времени

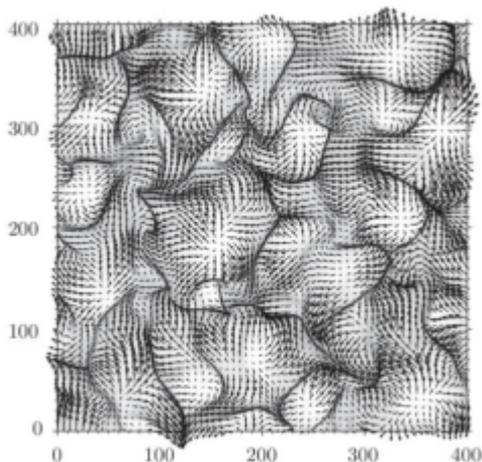


Рис. 14. Супергрануляция в поле горизонтальной скорости на Солнце [30]. Угловые размеры изображения: 200"×200"

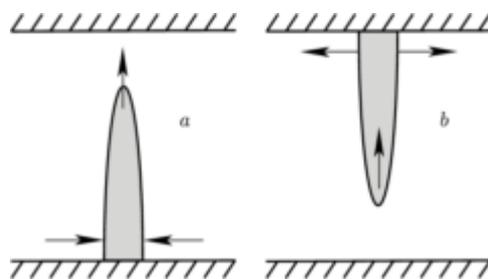


Рис. 15. Коллапсирующая восходящая струя (a) и ее расплывание (b) на верхней границе

## 12. Супергрануляция, скейлинг, и спектры турбулентности

Солнечная супергрануляция, несмотря полувековую давность своего обнаружения [29], остается одной из самых интригующих проблем современной физики. Будучи коллективным эффектом крупномасштабной самоорганизации, супергрануляция, в первую очередь, проявляется как специфический узор в поле скорости на поверхности спокойного Солнца. Типичный пример супергрануляции представлен на рис. 14.

Несмотря на многочисленные попытки объяснить, как и почему происходит супергрануляция, полного понимания этого явления пока нет [31]. Большинство моделей супергрануляции являются качественными и опираются либо на крайне упрощенные теоретические подходы, либо на феноменологические соображения.

До сих пор слабость теоретических и численных моделей в сочетании с неполнотой экспериментальных данных оставляет слишком много возможностей для различного рода спекуляций и предположений.

Рассматриваемый здесь сценарий предполагает, что ячейки супергрануляции инициируются горячими узкими струями, которые генерируются на нижней границе слоя, всплывают и достигают видимой поверхности Солнца, именуемой фотосферой. Для объяснения формирования таких струй, образования ячеек с характерным рисунком поля скорости мы привлечем самую простую, гидростатическую модель РТН. Структурные элементы и режимы эволюции для этой модели уже обсуждалась выше (см. раздел 7).

Общая схема, объясняющая формирование ячейки с характерным рисунком поля скорости приведена на рис. 15 *a, b*. Согласно этой схеме процесс развивается в слое вязкой однородной несжимаемой жидкости, помещенной в поле тяжести. Вначале, из-за нагревания снизу, на нижней границе слоя возникают островки более легкой (горячей) жидкости. Затем из них формируются восходящие струи. С течением времени их высота увеличивается, а ее толщина и площадь контакта с нижней границей уменьшаются.

Как только струя достигает верхней границы слоя, начинается формирование ячейки. С этого момента запускается обратный механизм. Он заставляет струю, оторвавшуюся от нижней границы, оседать на верхнюю границу и расплываться вдоль нее. Очевидно, что режим коллапса и режим оседания описываются одной и той же идеализированной моделью. Если в первом случае возвышение  $h$  отсчитывать от нижней границы, а во втором – от верхней, то разница между ними лишь в знаке плавучести и в том, что в первом случае бесконечно узкая струя – конечное состояние, а во втором – начальное. В режиме оседания такая струя проходит через все стадии автомодельного развития, но в обратном порядке.

При внимательном изучении рис. 14, обращает на себя внимание тот факт, что поле скорости в некоторых ячейках имеет явно вихревую структуру. По существу, это дополнительный аргумент в пользу того, что солнечная супергрануляция обеспечивается не бенаровской конвекцией, а именно статистическим ансамблем восходящих струй, среди которых присутствуют струи с вращением. Другой экспериментальный факт, заслуживающий внимания, это существование степенных "хвостов" в спектрах турбулентности для солнечной супергрануляции. Рассматривая турбулентность как коллективный эффект, такой тип спектрального поведения – прямое указание на автомодельность ее структурных элементов.

Ограничиваясь далее радиально-симметричными струями без вращения, для их описания будем использовать решения (32), записанные для простоты в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\propto \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dt} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \\ h(\mathbf{x}, t) &\propto \frac{1}{\beta^2} \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{\beta^2}}, \\ \tau(\mathbf{x}, t) &\propto \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{\beta^2}}. \end{aligned} \tag{66}$$

Так как эти решения компактно заданы на круге с центром в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  и радиусом  $\beta(t)$ , они обращаются в нуль вне этого круга и описывают полу-эллипсоидальную струю с относительной плавучестью  $\tau$ .

Пусть оседающая струя расплывается в режиме близком к гидростатическому, а слой жидкости не вращается, т. е.  $G^0 = 0$ . Тогда справедлива вириальная теорема (13), согласно которой

$$I(t) = 2(Ht'^2 + G^{1/2}t'), \quad t' = t - t_0. \quad (67)$$

где  $t_0$  – начальный момент. В этот момент оседающая струя предполагается бесконечно тонкой и  $I(t_0) = 0$ . С другой стороны, поскольку момент инерции  $I$  определяется интегралом (12), находим соотношение

$$I \propto \beta^2. \quad (68)$$

Разумно предположить, что основной вклад в турбулентность дает начальная стадия, когда  $t' = t^*$ . Здесь  $t^* = G^{1/2} H^{-1}$  – некоторое характерное время, после которого момент инерции переходит с линейной асимптотики  $I \propto t'$  на квадратичную  $I \propto t'^2$ . В этом случае, пренебрегая первым членом в (67), и сравнивая с (68), находим, что параметр автомодельности изменяется со временем по закону

$$\beta = r_* \left( \frac{t'}{t^*} \right)^{1/2}, \quad (69)$$

где  $r_*$  – некоторый характерный пространственный масштаб (масштаб грануляционной ячейки).

Рассмотрим теперь статистический ансамбль, составленный из большого числа невзаимодействующих струй (66) с непересекающимися носителями. Если все они статистически независимы, они производят случайное коллективное поле скорости, спектральную плотность которого можно оценить как

$$E_v(k, \omega) \propto k \langle |\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \omega}|^2 \rangle. \quad (70)$$

Здесь, угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  подразумевает осреднение по всем свободным параметрам, рассматриваемым как случайные, а величина

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \omega} = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega t)} d\mathbf{x} dt,$$

обозначает преобразование Фурье для поля скорости по пространству  $\mathbf{x}$  и времени  $t$ .

Применяя преобразование Фурье к (66) и используя (69), получим

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \omega} = 2i\pi \frac{\mathbf{k}}{k^2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0 + \omega t_0)} \int_0^\infty e^{i\omega t'} J_2(k\beta) \beta d\beta = 4i\pi \frac{\mathbf{k}}{k^4} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0 + \omega t_0)} (1 - e^{-ip} - ip e^{-ip}). \quad (71)$$

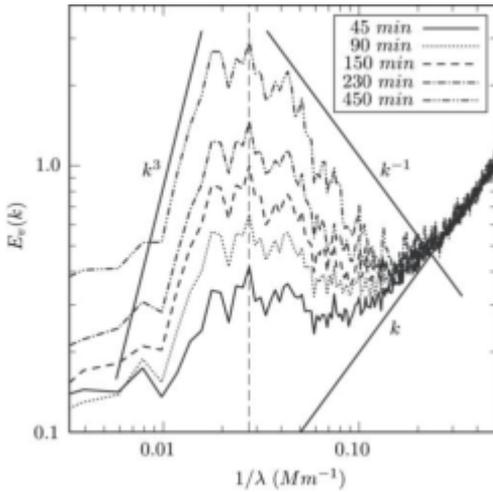
Здесь  $p = (kr_*)^2 / (4\omega t^*)$  – безразмерный параметр.

Учитывая, что режим (69) подразумевает высокочастотное приближение  $\omega t_* \gg 1$ , ограничимся анализом двух предельных случаев. В одном случае полагаем, что  $k$  настолько мало, что  $p \ll 1$ , а в другом, что  $k$  достаточно велико и  $p \gg 1$ .

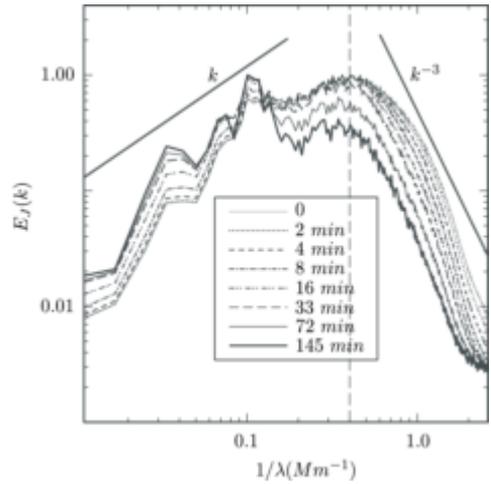
Подставляя (71) в (70), находим асимптотики

$$E_v(k, \omega) \propto \begin{cases} k^3 \omega^{-4}, & \text{если } p \ll 1; \\ k^{-1} \omega^{-2}, & \text{если } p \gg 1. \end{cases} \quad (72)$$

Спектральная плотность  $E_v(k)$ , найденная экспериментально в [32], представлена на рис. 16. Согласно этой работе, слева от пика в спектре супергрануляции



**Рис. 16.** Спектральная плотность  $E_u(k)$  обнаруженная в [32] для различных временных окон. Вертикальная пунктирная линия указывает отметку  $36.4 \text{ Mm}$  для положения спектрального максимума. Зависимость  $E_u \sim k$  – результат вклада некоррелированного шума



**Рис. 17.** Спектральная плотность  $E_J$  обнаруженная в [32] для различных временных окон. Спектры отнормированы на свои максимальные значения

выполняются закон  $k^3$  а справа  $k^{-2}$ . Теория автомодельных струй поддерживает только закон  $k^3$ . Вместо закона  $k^{-2}$ , теория предсказывает  $k^{-1}$ .

Другая величина, спектральные свойства которой тоже экспериментально известны, это флуктуации интенсивности теплового излучения  $J$ . Чтобы оценить  $J$  в терминах нашей модели, разумно предположить, что флуктуации интенсивности пропорциональны изменениям температурных флуктуаций, усредненных по глубине слоя, т. е.

$$J \propto \bar{T} - T_0, \quad (73)$$

Здесь  $\bar{T}$  – температура, усредненная по глубине слоя, а  $T_0$  – фоновая температура слоя.

Усредненную по глубине температуру можно вычислить, предполагая известными глубину слоя  $l$  и его температуру  $T_0$ . Рассмотрим нагретые струи как источник неоднородностей, которые характеризуются температурой  $T_0 + \Delta T$  и эффективной толщиной  $h$ . Тогда для вертикального температурного профиля найдем распределение

$$T(z) = \begin{cases} T_0, & h < z \leq l; \\ T_0 + \Delta T, & 0 < z \leq h. \end{cases}$$

Усредняя  $T(z)$  по глубине, получим

$$\bar{T} = \frac{1}{l} \int_0^l T(z) dz = \frac{h(T_0 + \Delta T) + T_0(l - h)}{l} = T_0 + \frac{h}{l} \Delta T. \quad (74)$$

Таким образом, используя (73), (74) и учитывая тот факт, что  $\tau \approx g\Delta T/T_0$ , найдем, что

$$J \propto ht. \quad (75)$$

Замечательно, что, если распывание подчиняется закону (69), то решения (66) удовлетворяют соотношению

$$\nabla(ht) \propto -\partial u.$$

В силу (75) это означает, что  $k^2 J_{k, \omega} \propto \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{k, \omega}$ , и следовательно, что

$$E_J(k, \omega) \propto \frac{\omega^2}{k^2} E_u(k, \omega). \quad (76)$$

Подстановка (72) в (75) позволяет из спектральных асимптотик для  $E_u(k, \omega)$  найти спектральные асимптотики для  $E_J(k, \omega)$

$$E_J(k, \omega) \propto \begin{cases} k\omega^{-2}, & \text{если } p \ll 1; \\ k^{-3}, & \text{если } p \gg 1. \end{cases}$$

Таким образом теория автомодельных струй предсказывает два степенных закона:  $k$  и  $k^{-3}$ , соответственно слева и справа от спектрального максимума  $E_J(k)$ . Наилучшее согласие с экспериментальными результатами, которые приведены в [33] и представлены на рис. 17, дает закон  $k^{-3}$ .

В заключение отметим, спектральный скейлинг подразумевает нечто большее, чем просто наличие степенных асимптотик. По существу, спектральный скейлинг означает, что после некоторой перенормировки полный частотно-волновой спектр становится автомодельным, т. е. описывается функцией только одного спектрального параметра  $p = k^{\alpha} / \omega$ . Если такая параметризация возможна, это не только решающий аргумент в пользу существования скейлинга, но и указание на конкретный закон распывания  $\beta \propto (t - t_0)^{1/\alpha}$ .

Чтобы проиллюстрировать справедливость такого вывода, предположим, что спектральные асимптотики (71) получены экспериментально, а сам полный спектр есть основания считать автомодельным. Тогда возможна следующая параметризация

$$E_u(k, \omega) \propto \omega^l \begin{cases} p^m, & \text{если } p \ll 1; \\ p^n, & \text{если } p \gg 1. \end{cases}$$

Так как при подстановке  $p = k^{\alpha} / \omega$  эта параметризация должна воспроизводить спектральные асимптотики (72), для показателей степеней получим систему уравнений

$$l - m = -4, \quad l - n = -2, \quad \alpha m = 3, \quad \alpha n = -1,$$

решая которую, найдем  $l = -5/2$ ,  $m = 3/2$ ,  $n = -1/2$ ,  $\alpha = 2$ . Таким образом, мы нашли не только автомодельное представление

$$E_u(k, \omega) \propto \omega^{-5/2} \begin{cases} p^{3/2}, & \text{если } p \ll 1; \\ p^{-1/2}, & \text{если } p \gg 1. \end{cases}$$

для спектра (72), но и подтвердили показатель  $\alpha = 2$  в законе распывания  $\beta \propto (t - t_0)^{1/2}$ . Отметим, что использование данного приема на практике для определения закона распывания из экспериментальных данных возможно, если имеется полная информация о всех степенных асимптотиках спектра, не только волновых, но и частотных. Информация о частотных асимптотиках в спектре супергрануляции, к сожалению, пока в научной литературе отсутствует.

## Литература

- [1] *Иногамов Н.А., Демьянов А.Ю., Сон Э.Е.* Гидродинамика перемешивания. М.: Издательство МФТИ, 1999. 464 с.
- [2] *Биркгоф Г.* Гидродинамика. Методы, факты, подобие. М.: Издательство ИЛ, 1963. 244 с.
- [3] *Жданов С.К., Трубников Б.А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 174 с.
- [4] *Ripa P.* Conservation-laws for primitive equations models with inhomogeneous layers // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1993. V. 70. P. 85-111.
- [5] *Гончаров В.П., Павлов В.И.* Гамильтонова вихревая и волновая динамика. М.: ГЕОС, 2008. 432 с.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
- [7] *Goncharov V.P., Pavlov V.I.* Whether the Sun's supergranulation possesses a scaling? // *Письма в ЖЭТФ.* 2014. Т. 99. Вып. 6. С. 365-370.
- [8] *Власов В.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И.* Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) // *Изв. вузов. Радиофиз.* 1971. Т. 14. С. 1353-1363.
- [9] *Barenblatt G.I.* Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. 386 p.
- [10] *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Квазиклассическая теория трехмерного волнового коллапса // *ЖЭТФ.* 1986. Т. 91. Вып. 4. С. 1310-1324.
- [11] *Kuznetsov E.A.* Wave collapse in plasmas and fluids // *Chaos.* 1996. V. 6. P. 381-390.
- [12] *Kuznetsov E.A., Zakharov V.E.* Nonlinear coherent phenomena in continuous media // *Lecture Notes in Physics.* 2000. V. 542. P. 3-45.
- [13] *Kuznetsov E.A.* Towards a sufficient criterion for collapse in 3D Euler equations // *Physica D.* 2003. V. 184. Issues 1-4. P. 266-275.
- [14] *Кузнецов Е.А.* Интегральные критерии волновых коллапсов // *Изв. вузов. Радиофиз.* 2003. Т. 46. № 5-6. С. 342-359.
- [15] *Kuznetsov E.A.* Wave Collapse in Nonlinear Optics // *Topics in Applied Physics.* 2009. V. 114. P. 175-190.
- [16] *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем // *Успехи физических наук.* 2012. Т. 182. № 6. С. 569-592.
- [17] *Goncharov V.P., Pavlov V.I.* Simple model of the Rayleigh-Taylor instability, collapse, and structural elements // *Phys. Rev. E.* 2013. V. 88. P. 023002.
- [18] *Goncharov V.P., Pavlov V.I.* Structural elements of collapses in shallow water flows with horizontally nonuniform density // *ЖЭТФ.* 2013. V. 144. Вып. 4(10). С. 867-877.
- [19] *Goncharov V.P., Pavlov V.I.* Blow-up instability in shallow water flows with horizontally-nonuniform density // *Письма в ЖЭТФ.* 2012. Т. 96. Вып. 7. С. 474-478.
- [20] *Goncharov V.P., Pavlov V.I.* Algebraic instability in shallow water flows with horizontally nonuniform density // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 91. P. 043004.
- [21] *Hirota M., Tatsuno T., Yoshida Z.* Degenerate continuous spectra producing localized secular instability – an example in a non-neutral plasma // *J. Plasma Phys.* 2003. V. 69 (5). P. 397-412.
- [22] *Green A.E., Naghdi P.M.* A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 78. Issue 2. P. 237-246.

- [23] *Camassa R., Holm D.D.* Dispersive barotropic equations for stratified mesoscale ocean dynamics // *Physica D*. 1992. V. 60(1-4). P. 1-15.
- [24] *Camassa R., Hyman J., Holm D.* A new integrable shallow water equation // *Advances In Applied Mechanics*. 1994. V. 31. P. 1-32.
- [25] *Гончаров В.П., Павлов В.И.* Влияние негидростатичности на финальную стадию неустойчивости в мелкой воде с горизонтально неоднородной плотностью // *Письма в ЖЭТФ*. 2015. Т. 101. Вып. 7. С. 490-495.
- [26] *Fermi E.* *Collected Papers of Enrico Fermi*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1965. Vol. II. Chap. 245. P. 821.
- [27] *Fermi E.* *Collected Papers of Enrico Fermi*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1965. Vol. II. Chap. 244. P. 816.
- [28] *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 778 с.
- [29] *Hart A.B.* Motions in the Sun at the photospheric level IV. The equatorial rotation and possible velocity fields in the photosphere // *MNRAS*. 1954. V. 114. P. 17-38.
- [30] *Tian H., Potts H.E., Marsch E., Attie R., He J.-S.* Horizontal supergranule-scale motions inferred from TRACE ultraviolet observations of the chromosphere // *Astron. Astrophys.* 2010. V. 519. A58.
- [31] *Rieutord M., Rincon F.* The Sun's Supergranulation // *Living Reviews Solar Physics*. 2010. V. 7(1). P. 1-81.
- [32] *Rieutord M., Meunier N., Roudier T., Rondi S., Beigbeder F., Parés L.* Solar supergranulation revealed by granule tracking // *Astronomy & Astrophysics*. 2008. V. 470. L17-L20.
- [33] *Rieutord M., Roudier T., Meunier N., Malherbe J.-M., Meunier N., Berger T., Frank Z.* On the power specrum of solar surface flows // *Astronomy & Astrophysics*. 2010. V. 512. A4.

## 2.4. Генерация внутренних гравитационных волн вихревыми возмущениями в сдвиговых течениях

*М.В. Калашник<sup>1,2</sup>, О.Г. Чхетиани<sup>1,3</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Научно-производственное объединение “Тайфун”, Обнинск*

<sup>3</sup>*Институт космических исследований РАН*

### Введение

Внутренние гравитационные волны (ВГВ) – важный элемент динамики атмосферы и океана. Распространяясь с групповой скоростью, ВГВ осуществляют эффективный перенос энергии и импульса из тропосферы в верхнюю атмосферу, интенсифицируют процессы турбулентного перемешивания в океане [1]. Поглощение волн на критических уровнях оказывает существенное влияние на циркуляцию верхней атмосферы [2]. Учет ВГВ важен и в практических задачах, связанных с интерпретацией данных дистанционного зондирования атмосферы и океана.

Основными механизмами генерации ВГВ считаются орографическое возбуждение [2, 3], гидродинамическая неустойчивость стратифицированных сдвиговых потоков [4, 5], процесс линейного геострофического приспособления [6–8]. В значительной степени эти механизмы носят локальный в пространстве и времени характер, хотя, как показывают данные наблюдений, ВГВ в атмосфере присутствуют постоянно и повсеместно. Данный факт стимулировал изучение механизма спонтанной (непрерывной) генерации ВГВ вихревыми движениями, аналогичного механизму Лайтхилла вихревой генерации звука [9]. С механизмом спонтанной генерации связывают волновые проявления от атмосферных фронтов и струйных течений [10–12], гравитационные и инфразвуковые волны от интенсивных атмосферных вихрей типа торнадо [13, 14].

Несколько условно, в исследованиях механизма спонтанной генерации волн можно выделить три направления. Первое из них развивается в контексте аэродинамической теории генерации звука, предложенной Лайтхиллом [15]. В работах этого направления обнаружена неустойчивость локализованных вихрей за счет излучения волн [16–18], рассчитаны характеристики волн, излучаемых спиральными возмущениями ряда модельных осесимметричных и эллиптических вихрей [19, 20, 14].

Второе направление исследований связано с концепцией о разделении движений атмосферы и океана при малых значениях числа Россби на быстрые волновые движения (ВГВ) и медленные вихревые (квазигеострофические) движения [21]. Асимптотический анализ уравнений динамики показывает, что такое разделение является неполным [22–24]. Этот факт приводит к эффекту слабого спонтанного излучения волн (вторичного излучения) в ходе медленной эволюции квазигеострофических движений. Иерархия амплитудных уравнений, включающих описание слабого взаимодействия вихрей и волн, представлена в работе [25].

Содержание данного раздела примыкает к третьему направлению исследований, в основе которого лежит анализ линейной динамики возмущений в сдвиговых течениях. По значению потенциальной завихренности (PV) возмущения в сдвиговых течениях разделяются на волновые и вихревые возмущения, соответ-

ственно с нулевой и ненулевой  $PV$ . Взаимодействие между возмущениями двух классов в присутствии сдвига приводит к эффекту спонтанной генерации волн вихревыми возмущениями. Для описания этого взаимодействия очень удобным оказывается так называемый немодальный подход, предложенный в работе [26]. Генерация акустических, поверхностных и внутренних гравитационных волн в рамках немодального подхода изучалась в работах [27–34].

Немодальный подход дает решение задачи о генерации волн начальными пространственно – периодическими распределениями  $PV$  (в форме отдельной пространственной Фурье-гармоники). В данном разделе рассматривается случай начальных сингулярных распределений  $PV$ . Подобные распределения, локализованные по одной координате и периодические по другим координатам, могут создаваться в атмосфере и океане под действием мгновенных источников тепла или в присутствии начальных сконцентрированных вихрей. В рамках традиционных квазигеострофических моделей [21] сингулярное распределение  $PV$  в сдвиговом потоке возбуждает вихревую волну (волну непрерывного спектра) – равномерно перемещающуюся вместе с потоком периодическую систему вихрей. Рассмотрение в рамках полных моделей показывает, что перемещение этой системы сопровождается излучением ВГВ. В разделе определены характеристики этого излучения в приближении слабых сдвигов. При этом раздельно рассмотрены течения с горизонтальными и вертикальным сдвигами.

Отметим, что задача о генерации ВГВ сингулярным возмущением  $PV$  в потоке с вертикальным сдвигом рассматривалась в работах [35, 65]. В анализе двумерной задачи при этом использовалось преобразование Фурье исходной линеаризованной системы уравнений динамики, и построение асимптотических решений проводилось на основе метода сращиваемых асимптотических разложений. Представленный ниже анализ задач для потоков с горизонтальным и вертикальным сдвигом содержит следующие два важных отличия от анализа [35].

Во-первых, описание динамики возмущений в сдвиговых потоках проводится в рамках волновых уравнений с источниками, пропорциональными начальному распределению  $PV$ . В качестве полевой переменной в этих уравнениях выступает тангенциальная компонента скорости (поток с горизонтальным сдвигом) и редуцированное давление (поток с вертикальным сдвигом). Использование неоднородных волновых уравнений делает физически прозрачной природу механизма спонтанной генерации волн. Кроме того, оно выявляет роль скрытых источников, которых изначально нет в уравнениях гидродинамики.

Второе отличие касается метода построения решений амплитудных уравнений, следующих из общих волновых уравнений для сингулярных источников. Соответствующие уравнения содержат точки поворота, которым отвечают критические уровни для гравитационных волн в присутствии фонового вращения. При переходе через эти точки меняется характер решения (экспоненциальное, осциллирующее). Для построения асимптотических решений нами использован подход Лангера, основанный на сведении уравнений с точками поворота к эталонным или присоединенным уравнениям с близкими особенностями [37, 38]. В отличие от решений [35], построенные решения равномерно пригодны всюду, включая критические уровни.

Содержание раздела разбито на три части. Первые две части посвящены задачам о генерации ВГВ сингулярными распределениями  $PV$  в неограниченных те-

чениях с горизонтальным и вертикальным сдвигом. Построены асимптотические решения задач при малых значениях числа Россби (горизонтальный сдвиг) и больших значениях числа Ричардсона (вертикальный сдвиг). Решения представлены в терминах функций Эйри и Ханкеля соответственно. Получены оценки потока импульса и потока Элиассена – Пальма в дальней волновой зоне (на больших расстояниях от вихревого источника). Показано, что в течении с вертикальным сдвигом при переходе через критические уровни поток Элиассена – Пальма падает в два раза, т.е. на этих уровнях происходит эффективное поглощение ВГВ.

В заключительной части раздела рассмотрена задача о генерации ВГВ в двухслойной атмосфере, состоящей из нижнего пограничного слоя с нейтральной стратификацией, над которым расположен полуограниченный стратифицированный слой. Предполагается, что в нижнем слое имеется горизонтальное течение с вертикальным сдвигом, а в верхнем слое скорость течения постоянна. Динамические возмущения в нижнем слое представлены суммой волновых и вихревых возмущений. Показано, что распространение вихревых возмущения в пограничном слое неизбежно сопровождается генерацией волн. Изучено волновое поле, возбуждаемое вихревым возмущением с начальным сингулярным распределением завихренности.

## 2. Генерация ВГВ в течении с горизонтальным сдвигом

### 2.1. Система уравнений и волновое уравнение с источником

Исследуем поведение возмущений зонального (вдоль горизонтальной оси  $x$ ) течения стратифицированной вращающейся жидкости с распределением скорости  $U(y) = \Lambda y$  и плавучести  $\sigma = \bar{\sigma} = N^2 z$ , где  $\Lambda > 0$  – величина постоянного горизонтального сдвига,  $N > 0$  – частота плавучести, которую также будем считать постоянной. В приближении гидростатики динамика возмущений описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} Du / Dt - (f - \Lambda)v &= -p_x, & Dv / Dt + fu &= -p_y, \\ p_z = \sigma, & D\sigma / Dt + N^2 w &= 0, & u_x + v_y + w_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u, v, w$  – компоненты скорости вдоль горизонтальных осей  $x, y$  и направленной вертикально вверх оси  $z$  соответственно,  $p, \sigma$  – возмущения нормированного на среднюю плотность давления и плавучести,  $f$  – параметр Кориолиса,  $D / Dt = \partial / \partial t + \Lambda y \partial / \partial x$ . В приближении Буссинеска плавучесть  $\sigma = g\theta / \theta_0$ , где  $\theta_0$  – фоновое значение потенциальной температуры,  $\theta$  – возмущение. Система (2.1) рассматривается в горизонтальном слое  $0 < z < H$  с условием непротекания  $w = 0$  на твердых границах  $z = 0, H$ . Геометрия задачи соответствует либо океану постоянной глубины  $H$ , либо ограниченной по высоте атмосфере с верхней границей на уровне тропопаузы. В модели океана  $\theta$  есть возмущение плотности, взятое с обратным знаком.

Важным следствием системы (2.1), которое устанавливается прямым вычислением, является уравнение переноса потенциальной завихренности

$$\frac{D}{Dt} q = 0, \quad q = v_x - u_y + \frac{f - \Lambda}{N^2} \sigma_z. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) представляет собой линеаризованную форму общего закона сохранения PV для течений стратифицированной вращающейся жидкости [21]. Интегрирование (2.2) приводит к соотношению

$$q = v_x - u_y + \frac{f - \Lambda}{N^2} \sigma_z = q_i(x - \Lambda y t, y, z), \quad (2.3)$$

где  $q_i(x, y, z)$  – начальное распределение  $q$ . Соотношение или закон сохранения (2.3) выполняется для любого  $t \geq 0$ .

С использованием закона сохранения (2.3) система (2.1) сводится к одному уравнению волнового типа относительно компоненты скорости  $u$ . Так, дифференцируя первое уравнение (2.1) по координате  $z$  и применяя, оператор  $D / Dt$  после преобразований получим уравнение

$$\frac{D^2}{Dt^2} u_{zz} + f(f - \Lambda)u_{zz} + N^2(u_{xx} + u_{yy}) = -q_y. \quad (2.4)$$

Непосредственно из (2.4) следует, что начальные распределения PV служат источником генерации волновых движений волн. Этот источник описывается правой частью уравнения (2.4).

Общее решение системы (2.1) допускает представление в форме разложения по вертикальным модам

$$(u, v, p) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, v_n, p_n) \cos \frac{n\pi}{H} z, \quad (w, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} (w_n, \sigma_n) \sin \frac{n\pi}{H} z. \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в (2.1) и исключение  $w_n, \sigma_n$ , приводит к системе уравнений мелкой воды относительно переменных  $u_n, v_n, p_n$ . В анализе удобно использовать безразмерную форму системы, принимая в качестве масштабов  $t, x, y, u, v, p$  соответственно  $\Lambda^{-1}, L_R, L_R, c, c, c^2$ , где  $L_R = c / f$  – радиус деформации Россби.  $c = HN / \pi n$  – фазовая скорость вертикальной моды внутренних волн. Безразмерная форма (2.5) (для краткости нижний индекс опускается)

$$\varepsilon \frac{Du}{Dt} - (1 - \varepsilon)v = -p_x, \quad \varepsilon \frac{Dv}{Dt} + u = -p_y, \quad \varepsilon \frac{Dp}{Dt} + u_x + v_y = 0, \quad (2.6)$$

$$D / Dt = \partial / \partial t + y \partial / \partial x,$$

содержит важный безразмерный параметр  $\varepsilon = \Lambda / f$  – число Россби. При характерных для атмосферы и океана значениях горизонтально сдвига скорости геострофических течений  $\varepsilon \ll 1$ .

Из системы (2.6) следует уравнение переноса PV для каждой вертикальной моды

$$\frac{D}{Dt} q = 0, \quad q = v_x - u_y - (1 - \varepsilon)p. \quad (2.7)$$

Интегрирование (2.7) дает  $q = q_i(x - yt, y)$ . С учетом последнего соотношения система (2.6) сводится к двумерному волновому уравнению

$$\varepsilon^2 \frac{D^2 u}{Dt^2} - (u_{xx} + u_{yy}) + (1 - \varepsilon)u = q_y. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7), (2.8) представляют собой редуцированную форму (2.2), (2.4).

После определения компоненты скорости  $u$  из (2.9), переменные  $v$ ,  $p$  определяются из поляризационных соотношений

$$\begin{aligned} v_{xx} - (1 - \varepsilon)^2 v &= q_x + u_{xy} - \varepsilon(1 - \varepsilon) \frac{Du}{Dt} \\ p_{xx} - (1 - \varepsilon)^2 p &= (1 - \varepsilon)(q + u_y) - \varepsilon \frac{D}{Dt} u_x. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Эти соотношения следуют из первого уравнения системы (2.6) и закона сохранения (2.7).

В случае начального распределения PV в форме одной пространственной Фурье-гармоники  $q_i(x, y) = r \exp i(kx + ly)$  уравнение (2.8) имеет решения в форме немодальной волны  $u = \hat{u}(t) \exp(i\vartheta)$ ,  $\vartheta = kx + (l - kt)y$ . Амплитуда  $\hat{u}(t)$  при этом удовлетворяет неоднородному уравнению колебаний с переменной частотой. Такого рода решения рассматривались в упомянутых работах [30–32]. Далее рассматривается случай начального сингулярного распределения PV

$$q_i(x, y) = r e^{ikx} \delta(y - h) \quad (2.10)$$

где  $\delta(y)$  – дельта функция Дирака,  $r$  – амплитудный параметр,  $k$  – безразмерное волновое число. С учетом известного свойства дельта функции  $\varphi(y)\delta(y - h) = \varphi(h)\delta(y - h)$ , для этого распределения

$$q = q_i(x - yt, y) = r e^{ik(x - ht)} \delta(y - h), \quad (2.11)$$

т.е. в правой части уравнения (2.8) стоит локализованный гармонический источник, распространяющийся вдоль оси  $x$  с фазовой скоростью  $c_p = h$ , равной скорости течения на уровне  $z = h$ . Отметим, что в размерных переменных (обозначаемых звездочкой) амплитуда и положение источника  $r^* = cr$  and  $h^* = L_R h$ . Размерные частота и фазовая скорость перемещения источника соответственно равны  $\omega^* = \Lambda k^* h^*$ ,  $c_p^* = \Lambda h^*$ .

## 2.2. Решение в квазигеострофическом приближении

Прежде чем переходить к построению решения (2.8), полезно обсудить решение в квазигеострофическом приближении  $\varepsilon \ll 1$ , когда  $u = -p_y$ ,  $v = p_x$  и потенциальная завихренность  $q = q_g = p_{xx} + p_{yy} - p$ . В этом приближении соотношение (2.11) сводится к уравнению

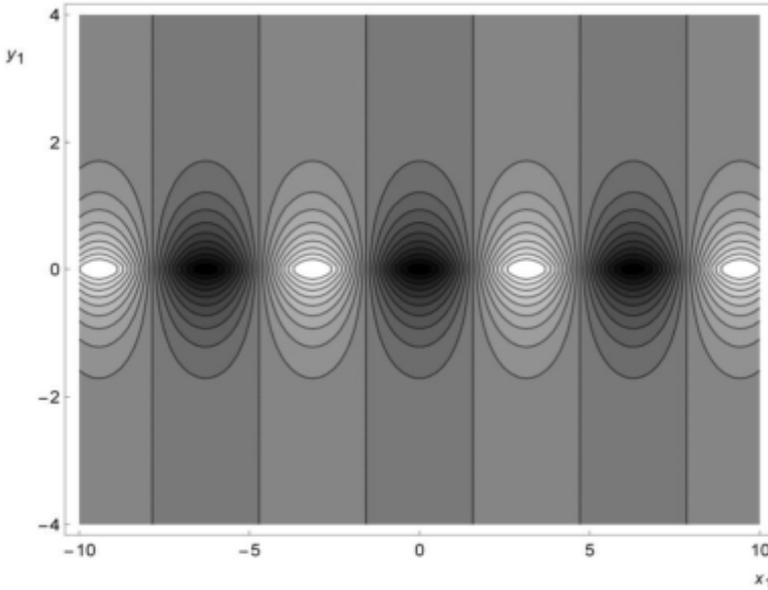
$$p_{xx} + p_{yy} - p = r e^{ik(x - ht)} \delta(y - h). \quad (2.12)$$

Решение (2.12) имеет вид

$$p = r e^{ik(x - ht)} G(y, h), \quad G(y, h) = -\frac{1}{2a} e^{-a|y - h|}, \quad a = \sqrt{k^2 + 1}, \quad (2.13)$$

где  $G(y, h)$  – функция Грина уравнения  $G_{yy} - a^2 G = \delta(y - h)$ , удовлетворяющая условиям  $G|_{h+0} = G|_{h-0}$ ,  $G_y|_{h+0} = G_y|_{h-0} + 1$ . С гидродинамической точки зрения решение (2.13) описывает вихревую волну – равномерно перемещающуюся периодическую систему вихрей со структурой линий тока в форме «кошачьего глаза» (рис. 1).

В физике плазмы такую волну часто называют волной Ван Кампена – Кейза или волной непрерывного спектра. Для этой волны компонента скорости  $v = p_x$  всюду непрерывна, а касательная компонента



**Рис.1.** Теневая картина изолиний возмущения поля давления в движущейся вместе с потоком системе координат для значений  $r = 2, k = 1$ . По горизонтальной оси  $x_1 = x - ht$ , по вертикальной оси  $y_1 = y$

$$u = -0.5r \operatorname{sgn}(y - h)e^{-a|y-h|} e^{ik(x-ht)} \quad (2.14)$$

на уровне источника терпит скачок  $u|_{h+0} - u|_{h-0} = -re^{ik(x-ht)}$ . В распределении (2.10) величина  $r$ , таким образом, характеризует значение скачка касательной компоненты скорости. Отметим, что с учетом  $u = -p_y$ , решения для переменных  $u, p$  в квазигеострофическом приближении можно получить непосредственно из общего уравнения (2.8), пренебрегая оператором  $\varepsilon^2 D^2 u / Dt^2$  и полагая  $1 - \varepsilon \sim 1$ .

В решениях (2.13), (2.14) отфильтрованы быстрые внутренние гравитационные волны, что заложено в самом определении квазигеострофического приближения. Ниже будет показано, что эти решения справедливы только вблизи источника, а на больших расстояниях от источника начинает проявляться волновая картина. По этой причине решение уравнения (2.8) можно интерпретировать как решение задачи о генерации гравитационных волн при распространении квазигеострофической вихревой волны (2.13).

### 2.3. Амплитудное уравнение и условие излучения

В соответствии с гармоническим характером источника (2.11) будем рассматривать решения в форме нормальных мод

$$(u, v, p) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}) e^{ik(x-ht)}. \quad (2.15)$$

Для амплитуды  $\tilde{u}$  из (2.8) следует уравнение

$$\tilde{u}_{yy} + a^2 \left( \left( \frac{\varepsilon k(y-h)}{a} \right)^2 - 1 \right) \tilde{u} = -r \delta_y(y-h), \quad a^2 = k^2 + 1 - \varepsilon. \quad (2.16)$$

Замена переменной

$$\xi = \varepsilon k(y - h) / a, \quad (2.17)$$

приводит амплитудное уравнение (2.16) к виду

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + R^2(\xi^2 - 1)\tilde{u} = -r\delta_\xi(\xi), \quad R = a^2(k\varepsilon)^{-1}. \quad (2.18)$$

При  $\varepsilon \ll 1$ , входящий в (2.18) безразмерный параметр  $R \gg 1$ . После определения  $\tilde{u}$  амплитуды  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{p}$  находятся по формулам

$$\tilde{v} = -\frac{ai}{b^2} \left( kR^{-1}\tilde{u}_\xi - (1 - \varepsilon)\xi\tilde{u} \right), \quad \tilde{p} = -\frac{a}{b^2} \left( (1 - \varepsilon)R^{-1}\tilde{u}_\xi + k\xi\tilde{u} \right), \quad (2.19)$$

где  $b^2 = k^2 + (1 - \varepsilon)^2$ . Для решений в форме нормальных мод, эти формулы следуют из соотношений (2.9).

При построении решения уравнения (2.19) к нему присоединяются условия, связанные с сингулярностью источника

$$\tilde{u}_\xi(+0) - \tilde{u}_\xi(-0) = 0, \quad \tilde{u}(-0) = -r. \quad (2.20)$$

Второе условие (2.20) получается домножением уравнения (2.18) на  $\xi$  и последующим интегрированием по малой окрестности точки  $\xi = 0$ . Согласно этому условию при переходе через точку  $\xi = 0$  решение терпит разрыв. Этот разрыв касательной компоненты скорости имеет место и в квазигеострофическом решении (2.14).

Для выделения однозначного решения к условиям (2.20) следует добавить также принципиально важное условие на бесконечности – условие излучения. Оно состоит в том, что безразмерный поток волновой энергии  $F = \langle vp \rangle$  (в системе координат, связанной с течением) должен быть направлен от источника, т.е. быть положительным при  $\xi \rightarrow +\infty$ , и отрицательным при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Здесь угловыми

скобками отмечена операция горизонтального осреднения  $\langle \varphi \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varphi dx$ .

Вопрос об определении знаков потока решается следующим образом.

Для решений (2.16) в форме нормальных мод оператор  $D / Dt$  в исходной системе (2.7) можно оператором  $D / Dt = (y - h)\partial/\partial x$ . Из соответствующей преобразованной системы следуют два важных соотношения

$$J \equiv \varepsilon(y - h)\langle uv \rangle + \langle vp \rangle = 0, \quad \frac{dJ}{dy} = \varepsilon(y - h)\frac{d}{dy}\langle uv \rangle. \quad (2.21)$$

Первое соотношение (2.21), связывающее поток энергии  $F = \langle vp \rangle$  с безразмерным горизонтальным потоком импульса  $\tau = -\langle uv \rangle$ , представляет собой аналог первой теоремы Элиассена – Пальма для потока с горизонтальным сдвигом [2]. Это соотношение получается домножением первого уравнения преобразованной системы на  $\varepsilon(y - h)u + p$  с последующим горизонтальным осреднением.

Второе соотношение (2.21) (энергетическое соотношение) получается домножением уравнений преобразованной системы (2.6) на  $u$ ,  $v$ ,  $p$  с последующим сложением и осреднением. С учетом  $J = 0$ , из этого соотношения следует аналог второй теоремы Элиассена – Пальма:  $\tau = -\langle uv \rangle = \text{const}$ . Формулы связи (2.19) между амплитудами  $\tilde{v}(\xi)$ ,  $\tilde{u}(\xi)$  позволяют выразить поток импульса (напряжение Рейнольдса) через вронсиан  $W$  комплексных решений уравнения (2.18)

$$\tau = \gamma W, \quad W = \frac{1}{2i} (\tilde{u} \tilde{u}_\xi^* - \tilde{u}^* \tilde{u}_\xi) = \text{Im}(\tilde{u} \tilde{u}_\xi^*) \quad \gamma = \frac{akR^{-1}}{2b^2}, \quad (2.22)$$

(звездочкой сверху здесь и далее обозначается комплексное сопряжение). Переходя к переменной  $\xi$ , первое соотношение (2.21) можно записать в виде формулы  $F = (a/k)\xi\tau$ , показывающей, что поток энергии есть линейная функция горизонтальной координаты. С учетом (2.22), отсюда непосредственно следует, что условию излучения удовлетворяют решения уравнения (2.18) для которых вронскиан  $W > 0$  (при положительном сдвиге). Последнее условие используется ниже.

#### 2.4. Асимптотическое решение при $R \gg 1$ (малые значения числа Россби)

С аналитической точки зрения (2.18) представляет собой уравнение с рациональными коэффициентами и двумя точками поворота (возврата)  $\xi = \pm 1$ . При переходе через эти точки меняется характер решения (осциллирующий, экспоненциальный). Методы построения асимптотических решений подобных уравнений в случае  $R \gg 1$  (большой параметр), изложены в монографии [37]. Соответствующие решения выражаются в терминах функций Эйри  $\text{Ai}(z)$ ,  $\text{Bi}(z)$ . Для уравнения (2.18) в качестве линейно независимых решений удобно использовать функции

$$\Phi_1(z) = \text{Bi}(z) - i\text{Ai}(z), \quad \Phi_2(z) = \Phi_1^*(z) = \text{Bi}(z) + i\text{Ai}(z).$$

Функция  $\Phi_1(z)$  имеет асимптотические представления при  $z \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \Phi_1(-z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp - i \left( \frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Phi_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \left( \exp \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) - \frac{i}{2} \exp \left( -\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

Представления (2.23) вытекают из известных асимптотических представлений для функций Эйри [39].

На первом этапе строится асимптотическое разложение решения уравнения (2.18) области  $\xi > 0$ . Разложение, равномерно пригодное для всех  $\xi$  в этой области, включая точку поворота  $\xi = 1$ , дается выражением [38]

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{s'(\xi)}} \left( C_1 \Phi_1 \left[ -R^{-2/3} s(\xi) \right] + C_2 \Phi_2 \left[ -R^{-2/3} s(\xi) \right] \right), \quad (2.24)$$

$$\xi \geq 1: \quad \frac{2}{3} [s(\xi)]^{3/2} = \int_1^\xi \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau,$$

$$\xi \leq 1: \quad \frac{2}{3} [-s(\xi)]^{3/2} = \int_\xi^1 \sqrt{1 - \tau^2} d\tau,$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. Чтобы удовлетворить условию излучения в этом выражении следует положить  $C_2 = 0$  (см. ниже). Используя асимптотические представления (2.23), в области  $\xi > 1$  из (2.24) получим асимптотическое решение

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{Ce^{-i\pi/4}}{4\sqrt{\xi^2 - 1}} \exp(-iR\alpha(\xi)), \quad C = \frac{C_1}{\pi^{1/2}R^{1/6}}, \quad \xi > 1, \quad (2.25)$$

$$\alpha(\xi) = \int_1^\xi \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau = \frac{1}{2} \left( \xi \sqrt{\xi^2 - 1} - \ln \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right).$$

Оно совпадает со стандартным ВКБ решением уравнений, содержащих большой параметр. Из (2.25) следует асимптотика на бесконечности

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{Ce^{-i\pi/4}}{\sqrt{\xi}} \exp(-iR\alpha(\xi)), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Для решения (2.26) вронскиан  $W = \text{Im}(\tilde{u}\tilde{u}_\xi^*) = R |C|^2 > 0$ , т.е. выполнено условие излучения на бесконечности. Для решения, отвечающего  $C_2 \neq 0$ , вронскиан  $W < 0$ . По этой причине выше было положено  $C_2 = 0$ .

С учетом (2.23), (2.24) асимптотика решения в области  $0 < \xi < 1$  имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{C}{4\sqrt{1 - \xi^2}} \left( \exp(R\beta(\xi)) - \frac{i}{2} \exp(-R\beta(\xi)) \right), \quad 0 < \xi < 1, \quad (2.27)$$

$$\beta(\xi) = \int_\xi^1 \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left( \arcsin \xi + \xi \sqrt{1 - \xi^2} \right).$$

Разложение  $\beta(\xi)$  по степеням  $\xi$  дает асимптотику вблизи нуля

$$\tilde{u}(\xi) = Ce^{R\pi/4} \left( e^{-R\xi} - \frac{i}{2} e^{-R\pi/2} e^{R\xi} \right), \quad \xi \rightarrow 0+0. \quad (2.28)$$

Формулы (2.25) – (2.28), содержащие одну произвольную комплексную константу  $C$ , осуществляют сращивание асимптотических разложений решения при  $\xi < 1$  и  $\xi > 1$ . Другой, более громоздкий способ сращивания, состоит в непосредственном анализе асимптотик решения в областях  $\xi < 1$ ,  $\xi \sim 1$ ,  $\xi > 1$  [38].

Входящая в полученные асимптотики константа  $C$  находится из условий (2.20). Обозначим построенное решение в области  $\xi > 0$  через  $\tilde{u}_+(\xi)$ . С учетом условия излучения и инвариантности уравнения (2.18) относительно замены  $\xi \rightarrow -\xi$ , соответствующее решение  $\tilde{u}_-(\xi)$  в области  $\xi < 0$  определяется выражением

$$\tilde{u}_-(\xi) = -\tilde{u}_+^*(-\xi). \quad (2.29)$$

Определяя из (2.28), (2.29) значения  $\tilde{u}(\pm 0)$ ,  $\tilde{u}_\xi(\pm 0)$  и подставляя их в условия (2.20), получим систему линейных уравнений для нахождения действительной и мнимой части константы  $C$ . Решая эту систему, найдем

$$C = -\frac{r}{2} e^{-R\pi/4} \frac{4 - 2ie^{-R\pi/2}}{4 - e^{-\pi R}}. \quad (2.30)$$

При  $R \rightarrow \infty$  с большой точностью  $C = -0.5re^{-R\pi/4}$ , и, с учетом (2.26), асимптотика решения в дальней волновой зоне  $\xi \rightarrow +\infty$

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{re^{-R\pi/4}}{2\sqrt{\xi}} \exp(-i\theta), \quad \theta = R\alpha(\xi) + \frac{3\pi}{4}. \quad (2.31)$$

Используя асимптотики  $\tilde{y}_\xi \sim -iR\xi\tilde{y}$ ,  $a/b^2 \sim (1+k^2)^{-1/2}$ ,  $R \gg 1$ , из соотношений (2.19) для амплитуд  $\tilde{v}(\xi), \tilde{p}(\xi)$  в этой зоне асимптотически получим

$$\tilde{v} = \tilde{p} = \frac{re^{-R\pi/4}}{2\sqrt{1+k^2}}(i-k)\sqrt{\xi}\exp(-i\theta). \quad (2.32)$$

Полные выражения для безразмерных компонент скорости  $u$ ,  $v$  и возмущения давления  $p$  получаются умножением (2.31), (2.32) на  $\exp ik(x-ct)$ ,  $c = h$ , с последующим выделением вещественной части

$$u = \frac{re^{-R\pi/4}}{2\sqrt{\xi}}\cos(\mathcal{G}) \quad \mathcal{G} = k(x-ct) - \theta, \quad \xi \gg 1, \quad (2.33)$$

$$v = p = 0.5re^{-R\pi/4}\sqrt{\xi}\sin(\mathcal{G} - \nu), \quad \tan(\nu) = 1/k.$$

Формулы (2.32), (2.33), дающие оценки амплитуд и фаз возбуждаемого волнового поля при  $R \gg 1$ , представляют основной результат данного раздела. Согласно этим формулам, с ростом  $R$  амплитуды поля в дальней волновой зоне экспоненциально убывают. Осцилляции поля по координате  $\xi$  носят негармонический характер – локальная длина волны по этой координате  $\lambda \sim \xi^{-1}$  стремится к нулю с ростом  $\xi$ . Далее, с ростом  $\xi$  амплитуда  $\tilde{y}(\xi)$  затухает как  $1/\sqrt{\xi}$ , а амплитуды  $\tilde{v}(\xi), \tilde{p}(\xi)$  нарастают по корневому закону. Этот рост обеспечивает постоянство горизонтального потока импульса  $\tau = -\langle uv \rangle$ . С учетом приведенных асимптотик этот поток равен

$$\tau = -\langle uv \rangle = \frac{r^2k}{8\sqrt{1+k^2}}e^{-R\pi/2} \quad (2.34)$$

Таким образом, при  $R \gg 1$ , т.е. в ситуации, когда формально применимо квазигеострофическое приближение, волновой поток импульса экспоненциально мал. Этот результат дает некоторое обоснование квазигеострофическому приближению.

Отметим, что выражение для размерного потока импульса  $\tau^* = -\rho\langle u^*v^* \rangle$  получается из (2.34) умножением на среднюю плотность  $\rho_0$  и заменой  $r$  на  $r^* = cr$ . Безразмерное и размерное волновые числа связаны соотношением  $k = L_R k^*$ . Приведем численные оценки потока  $\tau^*$  для атмосферы, полагая  $k = 1$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ,  $r^* = cr = 10$  м/с,  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>. При этом  $\tau^* = 0.25$  мПа. Аналогично, для океана, при  $k = 1$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ,  $r^* = cr = 0.5$  м/с,  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> горизонтальный поток импульса  $\tau^* = 0.62$  мПа. Последнее значение уменьшается на семь порядков при  $\varepsilon = 0.1$ .

На фиг. 2 показан график действительной части  $\tilde{y}(\xi)$ , построенный по общей асимптотической формуле (2.26), для значений  $R = 8$ ,  $C_2 = 0$  и значения  $C = \pi^{-1/2} R^{-1/6} C_1$ , определяемом (2.30) при  $r = 2$ . Для наглядности рисунка значение  $R$  взято не очень большим.

При  $\xi \ll 1$  (вблизи источника)  $\tilde{y}(\xi) \sim -0.5r \exp(-R\xi)$ , что согласуется с решением (2.14) в квазигеострофическом приближении. Таким образом, квазигеострофическое приближение справедливо на расстояниях от источника  $|y-h| \ll R/a$ , или, в размерных переменных,  $|y^* - h^*| \ll (R/a)L_R$ . Осцилляции  $\tilde{y}(\xi)$  на участке

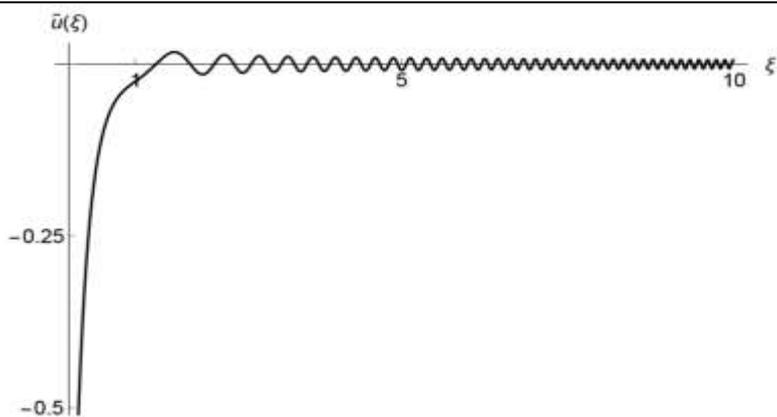


Рис. 2. График вещественной части зависимости  $\tilde{u}(\zeta)$

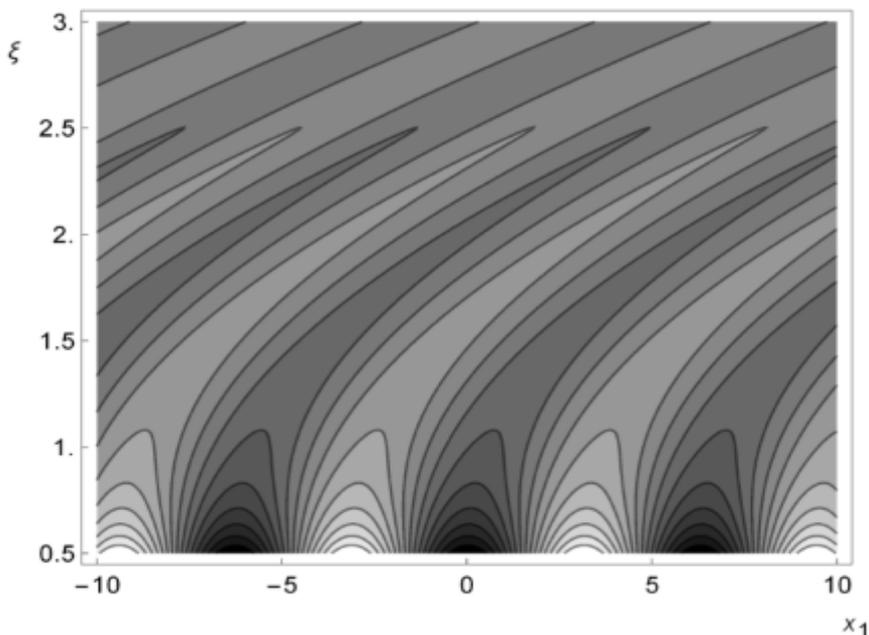


Рис. 3. Теневая картина изолиний тангенциальной компоненты скорости  $u$  в движущейся системе координат

$\zeta > 1 \cdot (|y_* - h_*| > (R/a)L_R)$  отражают генерацию гравитационных волн. Нетрудно показать, что точкам поворота отвечают уровни, на которых фазовая скорость волны относительно течения совпадает с фазовой скоростью ГВ.

На рис. 3 показаны теневая картина изолиний компоненты скорости  $u$  в движущейся с вихревым источником системе координат  $(x_1, \zeta)$ , где  $x_1 = x - ht$ . Для наглядности рисунок показана область  $0.7 < \zeta < 2.5$ . В полосе  $0.7 < \zeta < 1$  картина изолиний качественно подобна картине для вихревой волны в квазигеострофическом решении (2.13). В области  $1 < \zeta < 2.5$ , отвечающей гравитационным волнам, изолинии наклонены по потоку.

Этот наклон объясняется специальной структурой линий равной фазы для построенного решения. Так, согласно (2.33), на больших расстояниях от источника ( $\zeta \rightarrow +\infty$ ) уравнения линий равной фазы  $\vartheta = \text{const}$  имеют вид  $kx_1 = 0.5R\zeta^2 + \vartheta + 3\pi/4$ , или

$$x_1 = a^2 (kR)^{-1} (y - h)^2 + k^{-1}(\vartheta + 3\pi/4)$$

Последние уравнения определяют однопараметрическое семейство парабол с верхней ветвью, наклоненной вправо (по потоку). Параболическая форма изолиний видна на рис. 3. Ветви парабол при  $\zeta \rightarrow -\infty$ , очевидно, будут наклонены влево (также по потоку).

### 3. Генерация ВГВ в течении с вертикальным сдвигом

Двумерная задача о генерации гравитационных волн в потоке с вертикальным сдвигом рассматривалась в упомянутой работе [35]. В данном подразделе представлен упрощенный вариант решения этой задачи, основанный на рассмотрении волнового уравнения с источником, пропорциональным начальному распределению PV. Соответствующее уравнение формулируется для редуцированного давления (линейной комбинации функции тока и давления). В случае сингулярного источника из общего волнового уравнения следует уравнение гипергеометрического типа для волновой амплитуды, содержащее две точки поворота. В потоке с вертикальным сдвигом точки поворота являются особыми точками. Им отвечают критические уровни, на которых происходит эффективное поглощение гравитационных волн в присутствии фонового вращения [40]. В этом состоит основное отличие от рассмотренной выше задачи для течения с горизонтальным сдвигом, где все точки поворота регулярны.

#### 3.1. Волновое уравнение с источником

Исследуем поведение двумерных возмущений зонального (вдоль горизонтальной оси  $x$ ) течения стратифицированной вращающейся жидкости с распределением скорости  $U(z) = \Lambda z$  и плавучести  $\sigma = \bar{\sigma} = N^2 z - f\Lambda y$ , где  $\Lambda > 0$  – величина постоянного сдвига,  $N$  – частота плавучести,  $f$  – параметр Кориолиса. Данные распределения связаны уравнением термического ветра  $fU_z = -\bar{\sigma}_y$ , показывающим, что во вращающейся жидкости вертикальный сдвиг скорости поддерживается меридиональным (вдоль оси  $y$ ) градиентом плавучести.

В приближении гидростатики динамика двумерных возмущений (не зависящих от координаты перпендикулярно потоку) описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} Du/Dt - fv + \Lambda w + p_x = 0, \quad Dv/Dt + fu = 0, \quad \sigma = p_z, \\ D\sigma/Dt - f\Lambda v + N^2 w = 0, \quad u_x + w_z = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $u, v, w$  компоненты скорости вдоль горизонтальных осей  $x, y$  и направленной вертикально вверх оси  $z$  соответственно,  $p, \sigma$  – возмущения нормированного на среднюю плотность давления и плавучести,  $D/Dt = \partial/\partial t + \Lambda z \partial/\partial x$ . Рассматриваем (3.1) на всей плоскости  $(x, z)$  (случай неограниченного атмосферного течения).

Система (3.1) сводится к одному уравнению относительно переменной (редуцированное давление)

$$\varphi = p + \Lambda\psi, \quad (3.2)$$

где  $\psi$  – функция тока,  $u = -\psi_z$ ,  $w = \psi_x$ . Это осуществляется с использованием вытекающего из (3.1) уравнения переноса PV

$$Dq / Dt = 0, \quad q = N^2 v_x - f\Lambda u_z + f\sigma_z. \quad (3.3)$$

Интегрирование (3.3) приводит к соотношению

$$q = N^2 v_x - f\Lambda u_z + f\sigma_z = q_i(x - \Lambda zt, z), \quad (3.4)$$

где  $q_i(x, z)$  – начальное распределение  $q$ . Соотношение или закон сохранения (3.4) выполняется для любого  $t \geq 0$ .

Используя выражение для производной  $\varphi_z = p_z + \Lambda\psi_z = \sigma - \Lambda u$ , закон сохранения (3.4) можно записать в виде

$$N^2 v_x - f\varphi_{zz} = q_i(\eta, z), \quad \eta = x - \Lambda zt.$$

Отсюда  $v_x = N^{-2}(q_i(\eta, z) - f\varphi_{zz})$ . С учетом последнего выражения и выражения для производной  $\varphi_x = p_x + \Lambda w$ , после дифференцирования по  $x$  первые два уравнения системы (3.1) примут вид

$$\frac{D}{Dt} u_x + \frac{f}{N^2} \varphi_{zz} + \varphi_{xx} = \frac{f}{N^2} q_i(\eta, z), \quad \frac{D}{Dt} \varphi_{zz} - N^2 u_x = 0. \quad (3.5)$$

Исключение из (3.5)  $u_x$  окончательно приводит к волновому уравнению для функции  $\varphi$ :

$$\frac{D^2}{Dt^2} \varphi_{zz} + f^2 \varphi_{zz} + N^2 \varphi_{xx} = f q_i(x - \Lambda zt, z). \quad (3.6)$$

Непосредственно из (3.6) следует, что начальные распределения PV служат источником генерации внутренних волн. Этот источник описывается правой частью уравнения (3.6).

После нахождения  $\varphi(x, z, t)$  остальные переменные находятся по формулам:

$$\begin{aligned} v_x &= N^{-2}(q_i(\eta, z) - f\varphi_{zz}), \quad w = -\frac{1}{N^2} \left( \frac{D}{Dt} \varphi_z - \Lambda \varphi_x \right), \\ \sigma_x &= \varphi_{xz} + \frac{\Lambda}{N^2} \frac{D}{Dt} \varphi_{zz}, \quad p_x = \varphi_x + \frac{\Lambda}{N^2} \left( \frac{D}{Dt} \varphi_z - \Lambda \varphi_x \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$u_x = -w_z$ . Эти формулы следуют из системы (3.1) и определения (3.2). В отсутствие сдвига и  $q_i = 0$  уравнение (3.6) сводится к основному уравнению теории гравитационных волн в длинноволновом (гидростатическом) приближении [1].

Уравнение (3.6) позволяет найти волновой отклик для произвольного начального распределения ПЗ. Далее будем рассматривать случай сингулярного распределения

$$q_i(x, z) = r e^{ikx} \delta(z - h), \quad (3.8)$$

где  $\delta(z)$  – дельта функция Дирака,  $r$  – амплитудный параметр. К подобному распределению, в частности, приводит вертикальный скачок в начальном распределении плавучести (потенциальной температуры), вызванный действием сконцентрированного источника тепла. Для этого распределения

$$q_i(x - \Lambda zt, z) = r e^{ik(x - ct)} \delta(z - h), \quad c = \Lambda h, \quad (3.9)$$

т.е. в правой части (3.6) стоит локализованный гармонический источник, распространяющийся вдоль оси  $x$  с фазовой скоростью  $c = \Lambda h$ , равной скорости течения на уровне  $z = h$ .

Для сингулярного распределения (3.8) легко построить решение в квазигеострофическом приближении, аналогичное решению (2.13). В этом приближении  $v = \Psi_x$ ,  $\sigma = f\Psi_z$  и потенциальная завихренность  $q = q_g = N^2\Psi_{xx} + f^2\Psi_{zz}$ , где  $\Psi = p/f$  – геострофическая функция тока (переменные размерны). При этом (3.4) сводится к уравнению для нахождения  $\Psi$

$$f^2\Psi_{zz} + N^2\Psi_{xx} = re^{ik(x-ct)}\delta(z-h), \quad (3.10)$$

которое, с учетом  $\varphi \sim p$ , можно получить и непосредственно из (3.6), пренебрегая оператором  $D^2/Dt^2$ . Решение (3.10)

$$\Psi = f^{-2}re^{ik(x-ct)}G(z,h), \quad G(z,h) = -\frac{1}{2a}e^{-a|z-h|}, \quad a = Nk/f, \quad (3.11)$$

справедливо непосредственно вблизи источника. Оно описывает квазигеострофическую вихревую волну со структурой, аналогичной структуре вихревой волны (2.13). Отличительная особенность волны состоит в наличии скачка вертикальной производной  $\Psi_z$  (скачка плавучести) при  $z = h$ , где, подчеркнем, скачок присутствует в самом возмущении, а не в фоновом потоке.

Распространение вихревой волны (3.11) сопровождается излучением ВГВ. Характеристики этого излучения находятся из решения полного уравнения (3.6).

### 3.2. Амплитудное уравнение и условие излучения.

Для гармонического распределения источника (3.9), решение уравнения (3.6) ищется в виде  $\varphi = \phi(z)e^{ik(x-ct)}$ ,  $c = \Lambda h$ . Амплитуда  $\phi(z)$  удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\left[ (U(z) - c)^2 - (f/k)^2 \right] \phi_{zz} + N^2\phi = -fr\delta(z-h), \quad (3.12)$$

с особенностями в точках  $z = z_c$ , таких, что  $U(z_c) - c = \pm(f/k)$ . Данные особые точки, точки поворота или возврата  $z_c = h \pm (f/k\Lambda)$ , представляют собой критические или инерционные уровни для внутренних гравитационных волн в присутствии вращения [40]. При переходе через эти уровни может происходить эффективное поглощение ВГВ.

В анализе удобно рассматривать безразмерную форму (3.12). Используя  $\phi_0 = r/k\Lambda$  в качестве масштаба амплитуды и переходя к независимой переменной

$\xi = \frac{k\Lambda}{f}(z-h)$ , из (3.12) получим основное уравнение

$$(\xi^2 - 1)\phi_{\xi\xi} + \lambda^2\phi = -\delta(\xi), \quad \lambda^2 = \text{Ri} = (N/\Lambda)^2, \quad (3.13)$$

где  $\text{Ri}$  – число Ричардсона. Для уравнения (3.13) точки поворота  $\xi = \pm 1$ .

Решения для остальных переменных также представляются в форме нормальных мод, например  $u = \tilde{u}(z)e^{ik(x-ct)}$  (далее волной отмечаются амплитуды). Используя в качестве масштабов  $v_0 = u_0 = \Lambda r/fN^2$ ,  $w_0 = r/N^2$ ,  $\sigma_0 = r/f$ ,  $p_0 = \phi_0 = r/k\Lambda$ , из соотношений (3.7) получим формулы связи между безразмерными амплитудами

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= -i(\xi\phi_\xi - \phi), \quad \tilde{u} = \xi\phi_{\xi\xi}, \quad \tilde{v} = i\phi_{\xi\xi}, \\ \tilde{\sigma} &= \phi_\xi + \lambda^{-2}\xi\phi_{\xi\xi}, \quad \tilde{p} = \phi + \lambda^{-2}(\xi\phi_\xi - \phi). \end{aligned} \quad (3.14)$$

При построении решения уравнения (3.13) к нему присоединяются условия, связанные с сингулярностью источника

$$\phi(+0) = \phi(-0), \quad \phi'(+0) - \phi'(-0) = 1. \quad (3.15)$$

Эти условия получаются стандартным образом, путем интегрирования (3.13) по малой окрестности точки  $\zeta = 0$ .

Как и в предыдущем разделе, для выделения однозначного решения к условиям (3.15) следует добавить также принципиально важное условие на бесконечности – условие излучения. Оно состоит в том, что вертикальный поток волновой энергии  $F = \rho_0 \langle pw \rangle$  (в системе координат, связанной с течением) должен быть направлен от источника, т.е. быть положительным при  $\zeta \rightarrow +\infty$ , и отрицательным при  $\zeta \rightarrow -\infty$ . Вопрос об определении знаков потока решается аналогично предыдущему.

Для решений в форме нормальных мод оператор  $D / Dt$  в исходной системе (3.1) можно заменить оператором  $D / Dt = (U(z) - c)\partial/\partial x$ . Из соответствующей системы при этом следует соотношение

$$\rho_0(U(z) - c) \left( \langle uw \rangle - \frac{f}{N^2} \langle v\sigma \rangle \right) + \rho_0 \langle pw \rangle = 0, \quad (3.16)$$

которое называют первой теоремой Элиассена – Пальма [2]. Данное соотношение связывает поток волновой энергии  $F$  с так называемым потоком Элиассена – Пальма

$$\Pi = \rho_0 \left( -\langle uw \rangle + \frac{f}{N^2} \langle v\sigma \rangle \right). \quad (3.17)$$

Этот поток есть линейная комбинация вертикального потока импульса и меридионального потока плавучести.

Используя введенные масштабы и формулы связи (3.14) для потока (3.17) нетрудно получить выражение

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \Lambda}{f} \left( \frac{r}{N^2} \right)^2 \lambda^2 W, \quad W = \text{Im}(\phi^* \phi_\zeta), \quad (3.18)$$

где  $W$  – вронсиан комплексных решений уравнения (3.13). Поскольку всюду между особыми точками  $W$  принимает постоянные значения, из (3.18) вытекает вторая теорема Элиассена – Пальма:  $\Pi = \text{const}$ . Эту теорему можно получить и непосредственно, рассматривая уравнение баланса энергии для системы (3.1) [2].

Переходя к переменной  $\zeta$ , соотношение (3.16) можно записать в виде формулы  $F = \rho_0 \langle pw \rangle = (f/k)\xi\Pi$ , показывающей, что поток энергии есть линейная функция вертикальной координаты. С учетом (3.18) отсюда следует, что (при положительном сдвиге  $\Lambda > 0$ ) условию излучения удовлетворяют решения уравнения (3.13) для которых вронсиан  $W > 0$ . Как и ранее, это условие используется при построении решения.

### 3.3. Асимптотическое решение при больших значениях числа Ричардсона

В отличие от (2.18), уравнение (3.13) относится к классу уравнений с особенностями в точках поворота  $\zeta = \pm 1$ . При переходе через эти точки меняется тип решения (осциллирующий, экспоненциальный). Общее решение (3.13) можно представить в терминах гипергеометрической функции, однако его анализ достаточно сложен. Ниже построено достаточно простое асимптотическое решение уравнения (3.13) при  $\lambda^2 = \text{Ri} \gg 1$ . Для земной атмосферы с характерными значениями  $N = 10^{-2} \text{c}^{-1}$ ,  $\Lambda = 10^{-2} \div 10^{-3} \text{c}^{-1}$  число Ричардсона  $\text{Ri} = 1 \div 100$ .

Методы построения асимптотических решений уравнений типа (3.13) с большим параметром и особенностями в точках поворота изложены в монографиях [38, 41]. Эти методы используют преобразование Лангера, сводящее исходное уравнение к присоединенному или эталонному уравнению с близкими особенностями. На первом этапе (3.13) сводится к эталонному уравнению  $sy_{ss} + \lambda^2 y = 0$ , с использованием замены переменных  $s = s(\xi)$ ,  $y(\xi) = \sqrt{s'(\xi)} \phi(\xi)$ , где функция  $s(\xi)$  удовлетворяет уравнению  $(ds/d\xi)^2 = s/(\xi^2 - 1)$ . Общее решение эталонного уравнения имеет вид  $y = \sqrt{s} (C_1 H_1^{(1)}(2\lambda\sqrt{s}) + C_2 H_1^{(2)}(2\lambda\sqrt{s}))$ , где  $H_1^{(1, 2)}(z)$  функции Ханкеля,  $C_{1, 2}$  – произвольные константы. Интегрируя уравнение для  $s(\xi)$  с условием  $s(1) = 0$  и возвращаясь к исходным переменным, в области  $\xi > 1$  получим асимптотическое решение (3.13)

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= C_1 \sqrt[4]{\xi^2 - 1} \sqrt{\alpha(\xi)} H_1^{(1)}(\lambda\alpha(\xi)), \quad \xi > 1, \\ \alpha(\xi) &= \int_1^\xi \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}} = \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В этом решении выбрано  $C_2 = 0$ , т.е. опущено слагаемое с функцией  $H_1^{(2)}(z)$ . Только при таком выборе выполняется условие излучения на бесконечности (см. ниже).

Асимптотическое решение в области  $0 < \xi < 1$  может быть получено из (3.19) с использованием правила обхода особой точки

$$\xi - 1 = (1 - \xi)e^{-i\pi}, \quad \xi < 1, \quad (3.20)$$

означающего, что, при переходе от положительных значений  $\xi - 1$  к отрицательным значениям, точка  $\xi = 1$  обходится снизу. С учетом (3.20) из (3.19) найдем

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= C_1 e^{-i\pi/2} \sqrt[4]{1 - \xi^2} \sqrt{\beta(\xi)} H_1^{(1)}(\lambda e^{-i\pi/2} \beta(\xi)), \\ &0 < \xi < 1, \\ \beta(\xi) &= \int_\xi^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \xi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отметим, что правило (3.20), впервые сформулированное в работе [42] получается учетом малого поглощения (линейного трения и теплоотдачи), что для решений системы (3.1) в форме нормальных мод, эквивалентно замене  $c$  на  $c + ic_i$ , где  $c_i \rightarrow 0 + 0$ .

Формулы (3.19), (3.21) дают асимптотическое решение уравнения (3.13) равномерно пригодное всюду в области  $\xi > 0$ , включая особую точку  $\xi = 1$ . Поскольку  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow 1$ , то, с учетом асимптотики [39]

$$H_1^{(1)}(z) \sim -\frac{2i}{\pi} \frac{1}{z}, \quad |z| \rightarrow 0, \quad \text{из (3.19), (3.21) следует } \phi(1+0) = \phi(1-0) = -\frac{2i}{\pi} \frac{C_1}{\lambda},$$

т.е. в самой особой точке решение непрерывно. Производная решения в этой точке терпит скачок. Этот скачок связан со скачком вронскиана

$$W(1+0) - W(1-0) = -\frac{\pi}{2} \lambda^2 |\phi(1)|^2. \quad (3.22)$$

Важная формула (3.24) для скачка получается из уравнения (3.13), записанного в окрестности точки  $\zeta = 1$  с использованием правила обхода (3.20).

Асимптотические представления [39]  $H_1^{(1,2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i(z-3\pi/4)}$ ,  $z \rightarrow \infty$ , позволяют выразить решение в терминах элементарных функций

$$\phi(\xi) = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \sqrt[4]{\xi^2 - 1} e^{i(\lambda \alpha(\xi) - 3\pi/4)}, \quad \xi > 1, \quad (3.23)$$

$$\phi(\xi) = -C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \sqrt[4]{1 - \xi^2} e^{\lambda \beta(\xi)}, \quad 0 < \xi < 1. \quad (3.24)$$

С учетом разложения  $\beta(\xi) \sim (\pi/2) - \xi$ , из (3.24) следует асимптотика

$$\phi(\xi) = D e^{-\lambda \xi}, \quad D = -\sqrt{2/\pi \lambda} e^{\lambda \pi/2} C_1, \quad \xi \rightarrow 0 + 0. \quad (3.25)$$

Из (3.23) следует асимптотика на бесконечности

$$\phi(\xi) = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \sqrt{\xi} e^{i(\lambda \alpha(\xi) - 3\pi/4)}, \quad \xi \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

Нетрудно проверить, что для решения (3.26) вронскиан  $W = \text{Im}(\phi^* \phi_\xi) = 2\pi^{-1} |C_1|^2 > 0$ , т.е. выполнено условие излучения. В то же время, для отброшенного решения, пропорционального  $H_1^{(2)}(z)$ , вронскиан  $W < 0$ . По этой причине выше было положено  $C_2 = 0$ .

Если обозначить решение в области  $\zeta > 0$  через  $\phi_+(\zeta)$ , то решение  $\phi_-(\zeta)$  в области  $\zeta < 0$  определится выражением

$$\phi_-(\zeta) = \phi_+^*(-\zeta), \quad (3.27)$$

следующим из инвариантности уравнения (3.13) относительно замены  $\zeta \rightarrow -\zeta$  и условия излучения. Входящая в определенное таким образом полное решение константа  $C_1$  находится из условий (3.15). С учетом (3.25) и (3.29), удовлетворение этим условиям приводит к уравнениям  $D = D^*$ ,  $\lambda(D + D^*) = -1$ . Отсюда

$$D = -1/2\lambda \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} e^{-\pi \lambda/2}. \quad \text{Этим завершается формальное построение решения задачи.}$$

При найденном значении  $C_1$  решение (3.26) в дальней волновой зоне (на больших расстояниях от источника)

$$\phi(\xi) = \frac{e^{-\lambda \pi/2}}{2\lambda} \sqrt{\xi} e^{i\theta(\xi)}, \quad \theta(\xi) = \lambda \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) - \frac{3\pi}{4}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

и соответствующий вронскиан  $W = \text{Im}(\phi^* \phi_\xi) = 0.25\lambda^{-1} e^{-\pi \lambda}$ . Значение  $W$  при  $|\xi| < 1$  находится с использованием формулы скачка (3.22). С учетом приведенных асимптотик для функций Ханкеля, формула (3.22) дает соотношение  $W(1 - 0) = 2W(1 + 0)$ ,  $\lambda \gg 1$ . Учитывая это соотношение, для потока Элиассена – Пальма получим выражение

$$\Pi = \frac{\rho_0 r^2}{f N^3} \begin{cases} (1/4)e^{-\pi \lambda}, & |\xi| < 1, \\ (1/8)e^{-\pi \lambda}, & |\xi| > 1, \end{cases} \quad (3.29)$$

совпадающее с асимптотическим выражением из работы [35]. Из (3.29) следует, что при переходе (от источника) через критические уровни поток уменьшается в два раза, т.е. на этих уровнях происходит эффективное поглощение волн.

Приведем выражения для безразмерных компонент скорости, давления и плавучести при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Они получаются из формул связи (3.14), после домножения амплитуд на  $e^{ik(x-ct)}$  и выделения вещественной части

$$\begin{aligned} w &= 0.5e^{-\pi i/2} \zeta^{1/2} \cos \vartheta, & \vartheta &= \theta(\zeta) + k(x-ct), \\ u &= -0.5\lambda e^{-\pi i/2} \zeta^{-1/2} \cos \vartheta, & v &= 0.5\lambda e^{-\pi i/2} \zeta^{-3/2} \sin \vartheta, \\ p &= 0.5\lambda^{-1} e^{-\pi i/2} \zeta^{1/2} \cos \vartheta, & \sigma &= -0.5e^{-\pi i/2} \zeta^{-1/2} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь  $\vartheta$  – полная фаза волнового возмущения. Формулы (3.30) описывают возбуждаемое волновое поле на больших расстояниях от источника (в дальней волновой зоне). Вместе с оценкой (3.29) для потока Элиассена – Пальма, эти формулы представляют основной результат данного подраздела.

Присутствие в (3.30) множителя  $e^{-\pi i/2}$  показывает, что при больших числах Ричардсона характеристики волнового поля экспоненциально малы. Этот результат служит некоторым обоснованием квазигеострофического приближения, фильтрующего волновые движения. Вместе с тем, сам факт генерации волнового поля и его поглощения на критических уровнях представляет значительный интерес. Наличие поглощения, в частности, может приводить к заметным изменениям сдвигового потока. Здесь важно подчеркнуть принципиальную роль вертикального сдвига скорости в механизме генерации поля. Только в присутствии сдвига происходит генерация волн вихревым возмущением.

Отметим некоторые структурные особенности поля (3.32). Осцилляции поля по вертикальной координате  $\zeta$  носят негармонический характер – локальная длина волны по этой координате стремится к нулю с ростом  $\zeta$ . В движущейся с источником системе координат линии равной фазы наклонены против потока и образуют однопараметрическое семейство кривых  $\xi = Ce^{-k\lambda^{-1}x_1}$ , где  $x_1 = x - ct$ ,  $C$  – параметр. Согласно (3.30), с ростом  $\zeta$  компонента скорости  $u$  затухает как  $1/\sqrt{\xi}$ , а вертикальная компонента  $w$  растет по корневому закону. Этот рост обеспечивает постоянство вертикального потока импульса  $-\rho_0 \langle uw \rangle$ . С учетом алгебраического затухания  $v$ ,  $\sigma$ , отсюда также следует, что при больших числах Ричардсона и  $\zeta \rightarrow \infty$  поток Элиассена – Пальма асимптотически равен вертикальному потоку импульса

$$\Pi \sim -\rho_0 \langle uw \rangle \sim \frac{1}{8} \frac{\rho_0 r^2}{f N^3} e^{-\pi \lambda}, \quad (3.33)$$

т.е. меридиональным потоком плавучести в общем выражении для  $\Pi$  можно пренебречь (на больших расстояниях от источника).

### 3.4. Численные оценки потоков

Приведем численную оценку потока (3.33), считая, что сингулярное распределение ПЗ вызвано скачком  $\Delta\theta$  в начальном распределении возмущения потенциальной температуры. При этом в формуле (3.8)  $r = f\Delta\sigma = fg\Delta\theta / \theta_0$  и входящий в (3.33) масштабный множитель можно записать как

$$\frac{\rho_0 r^2}{f N^3} = \frac{\rho_0 f g^2 (\Delta\theta)^2}{N^3 \theta_0^2}.$$

При  $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$ ,  $\theta_0 = 300\text{К}$ ,  $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$  (параметры тропосферы средних широт) и  $\Delta\theta = 10\text{К}$  значение этого множителя составляет  $10\text{Па} = 10^4 \text{ мПа}$ . Полагая для оценки  $\text{Ri} = 16$  из (3.33) найдем значение потока Элиассена – Пальма (потока импульса)  $\Pi = 10^{-2} \text{ мПа}$ . Соответствующий поток энергии (3.19) относительно земли составит (по модулю)  $F_s = c\Pi = 10^{-4} \text{ Вт м}^{-2}$  при  $c = \Lambda h = 10 \text{ м/с}$ . Малые значения потоков обусловлены относительно слабым сдвигом скорости. Значения потоков растут с уменьшением числа Ричардсона (ростом сдвига). Так, согласно численным расчетам [35], для значений числа Ричардсона  $1 < \text{Ri} < 10$  поток Элиассена – Пальма лежит в диапазоне от 0.1 до 100 мПа. Близкие по порядку величины значения регистрируются баллонными измерениями в нижней стратосфере [43].

Приведенные оценки полезно сравнить с оценками потока импульса из других литературных источников. Согласно обзору [44], при орографическом возбуждении ВГВ (наиболее эффективном механизме генерации внутренних волн) значения вертикального потока импульса в верхней тропосфере и нижней стратосфере составляют  $0.01 \div 0.5 \text{ Па}$ . Эти значения практически на два порядка превосходят вышеприведенные. Для внутренних волн, возбуждаемых конвективными процессами, в указанном обзоре приводятся максимальные значения потока импульса  $0.01 \div 0.5 \text{ Па}$  и их осредненные по времени значения  $(1 \div 5) \times 10^{-3} \text{ Па}$ . Наиболее близко к описанному механизму примыкает механизм генерации ВГВ струйными течениями и фронтами, т.е. областями с интенсивными горизонтальными и вертикальными сдвигами скорости. В численных исследованиях этого механизма [45] получено осредненное значение вертикального потока импульса в стратосфере  $1.4 \times 10^{-4} \text{ Па} = 0.14 \text{ мПа}$ . Здесь следует отметить, что приводимые в литературе экспериментальные данные о значениях потоков импульса и энергии характеризуются большим разбросом. Этот факт подчеркивается в статье из энциклопедии [46], где для осредненного по времени вертикального потока количества движения приводится значение  $(2 \div 6) \times 10^{-3} \text{ Па}$ .

### 3.5. Краткое резюме

Исследован линейный механизм генерации ВГВ возмущениями PV в течениях с постоянными горизонтальным и вертикальным сдвигами. Рассмотрен случай начального сингулярного распределения PV, локализованного по одной координате и периодического по другим координатам. В стратифицированной вращающейся среде такое распределение индуцирует вихревую волну (волну непрерывного спектра), распространение которой сопровождается излучением гравитационных волн. Для нахождения характеристик излучения линеаризованная система уравнений динамики сведена к волновым уравнениям с источниками, пропорциональными начальным распределениям PV. Построены асимптотические решения уравнений соответственно при малых значениях числа Россби (горизонтальный сдвиг) и больших значениях числа Ричардсона (вертикальный сдвиг). Получены оценки горизонтального потока импульса и потока Элиассена – Пальма в дальней волновой зоне. Установлено, что в указанном диапазоне чисел Россби и

Ричардсона эти потоки экспоненциально малы, т.е. имеет место слабое излучение волн. Показано, что в течении с вертикальным сдвигом на критических уровнях происходит эффективное поглощение волн – поток Элиассена – Пальма падает вдвое.

#### 4. Генерация ВГВ вихревыми возмущениями в двухслойной модели атмосферы

Выше рассматривалось течение с вертикальным сдвигом в модели неограниченной стратифицированной атмосферы. В данном подразделе рассмотрена более реалистичная двухслойная модель атмосферы, состоящая из нижнего пограничного слоя с нейтральной стратификацией, над которым расположен полуограниченный стратифицированный слой. Предполагается, что в нижнем слое имеется горизонтальное течение с вертикальным сдвигом, а в верхнем слое скорость течения постоянна. Динамические возмущения в нижнем слое представлены суммой волновых и вихревых возмущений, т.е. возмущений с нулевой и ненулевой завихренностью. Показано, что распространение вихревых возмущения в пограничном слое неизбежно сопровождается генерацией волн. На основе линеаризованной системы уравнений гидродинамики сформулировано интегро-дифференциальное уравнение для волновой амплитуды, позволяющее найти характеристики волн. Изучено волновое поле, возбуждаемое вихревым возмущением с начальным сингулярным распределением завихренности. Получены численные оценки вертикального компонента вектора плотности потока энергии, характеризующего перенос энергии волнами в верхние слои атмосферы.

##### 4.1. Постановка задачи

В теоретическом исследовании представляем атмосферу системой, состоящей из нижнего перемешанного приземного слоя  $0 < z < H$  с постоянной плотностью  $\rho_0$ , и верхнего слоя  $z > H$  с экспоненциальной плотностной стратификацией. Считаем, что в нижнем слое имеется горизонтальное течение  $\bar{U}(z) = \Lambda z$  с вертикальным сдвигом  $\Lambda$ , а в верхнем слое скорость течения постоянна. В аналитической форме фоновые распределения плотности и скорости (рис. 4) записываются в виде

$$\bar{\rho}(z) = \begin{cases} \rho_0, & 0 < z < H, \\ \rho_0 \exp(-N^2(z - H)/g), & z > H \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\bar{U}(z) = \begin{cases} \Lambda z, & 0 < z < H, \\ U = \Lambda H, & z > H \end{cases}$$

где  $N^2 = -g\bar{\rho}^{-1}d\bar{\rho}/dz$  – частота Брента,  $g$  – ускорение свободного падения.

Исследуем поведение малых возмущений состояния (4.1), пренебрегая для простоты фоновым вращением. Динамика двумерных возмущений в нижнем слое описывается системой уравнений

$$\rho_0(u_t + \Lambda z u_x + \Lambda w) = -P_x, \quad \rho_0(w_t + \Lambda z w_x) = -P_z, \quad u_x + w_z = 0. \quad (4.2)$$

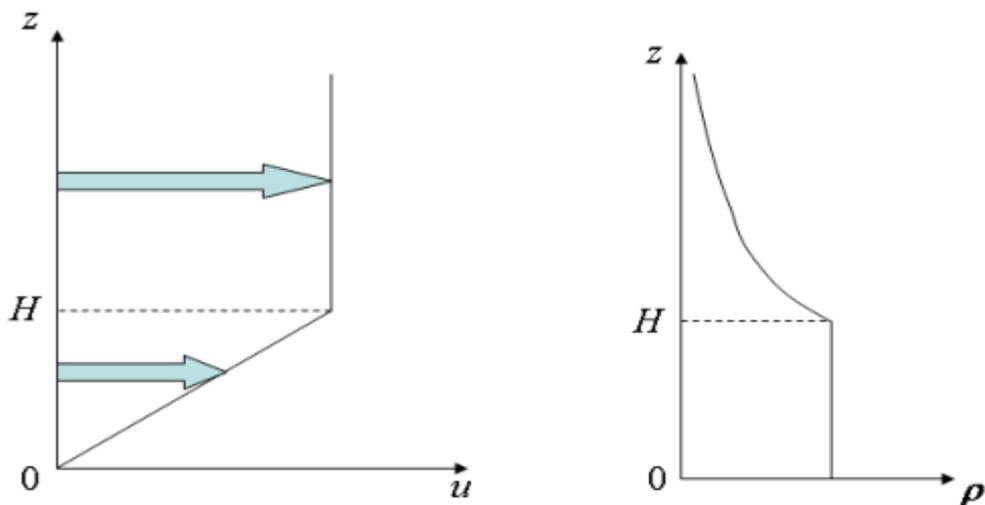


Рис. 4. Вертикальные распределения скорости и плотности в невозмущенном состоянии

Здесь  $u$ ,  $w$  – горизонтальный и вертикальный компоненты скорости,  $P$  – возмущение давления. В области  $z > H$  имеем линеаризованную форму уравнений динамики стратифицированной жидкости

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(z)(u_t + U u_x) &= -P_x, & \bar{\rho}(z)(w_t + U w_x) &= -P_z - g\rho', \\ \rho'_t + U \rho'_x - (\bar{\rho}N^2 / g)w &= 0, & u_x + w_z &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\rho'$  – возмущение плотности.

При совместном решении систем (4.2), (4.3) требуется постановка граничных условий на поверхности раздела  $z = H$ . Соответствующие условия, отражающие непрерывность нормального компонента скорости и возмущения давления, имеют вид

$$w|_{z=H-0} = w|_{z=H+0}, \quad (4.4)$$

$$(u_t + U u_x + \Lambda w)|_{z=H-0} = (u_t + U u_x)|_{z=H+0}, \quad (4.5)$$

Динамическое граничное условие (4.5) следует непосредственно из первых уравнений систем (4.2), (4.3).

К условиям (4.4), (4.5) присоединяется также естественное краевое условие  $w|_{z=0} = 0$  на твердой нижней границе. При  $z \rightarrow \infty$  будем требовать выполнения либо условия затухания возмущений, либо условия излучения – возбуждаемые волновые поля уносят энергию на бесконечность (от границы). Последнее условие выполняется, если вертикальный компонент вектора плотности потока энергии  $F_z = \langle Pw \rangle$  положителен. Здесь угловые скобки означают горизонтальное усреднение.

Каждую из систем (4.2), (4.3) можно свести к одному уравнению относительно функции тока  $u = -\psi_z$ ,  $w = \psi_x$ . В области  $0 < z < H$  имеем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda z \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi = 0, \quad (4.6)$$

$\Delta$  – двумерный оператор Лапласа. Уравнение (4.6) описывает адвективный перенос завихренности  $\omega = u_z - w_x = -\Delta\psi$  сдвиговым потоком.

Исключение из системы (4.2) возмущений давления и плотности приводит к уравнению

$$\frac{D^2}{Dt^2}(\Delta\psi - 2\gamma\psi_z) + N^2\psi_{xx} = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.7)$$

где  $\gamma = N^2 / 2g$ . В отсутствие фонового течения уравнение (4.7) представляет собой основное уравнение теории внутренних гравитационных волн [47]. При этом допущение  $\gamma = 0$  известно как приближение Буссинеска. Данное приближение справедливо, если вертикальный масштаб возмущений  $l_z$  много меньше так называемой приведенной высоты атмосферы  $H_s = g / N^2$ .

Уравнения (4.6), (4.7) рассматриваются совместно с условием непротекания  $\psi|_{z=0} = 0$ , условием излучения (затухания) и граничными условиями (4.4), (4.5), которые в терминах функции тока имеют вид

$$\psi|_{z=H-0} = \psi|_{z=H+0}, \quad (4.8)$$

$$\left( \frac{D}{Dt}\psi_z - \Lambda\psi_x \right) \Big|_{z=H-0} = \frac{D}{Dt}\psi_z \Big|_{z=H+0}. \quad (4.9)$$

Остановимся на постановке начальных условий, носящих несколько нестандартный вид. Для уравнения (4.6) в начальный момент времени будем задавать не функцию тока, а распределение завихренности

$$t = 0: \quad \Delta\psi = F(x, z), \quad (4.10)$$

где  $F(x, z)$  – заданная функция,  $F(x, H) = 0$ .

Поскольку уравнение (4.7) по времени второго порядка, к нему присоединим два начальных условия

$$t = 0: \quad \Delta\psi - 2\gamma\psi_z = 0, \quad D / Dt(\Delta\psi - 2\gamma\psi_z) = 0. \quad (4.11)$$

Данные условия означают, что при  $t = 0$  в верхнем слое отсутствуют возмущения плотности и обобщенной завихренности

$$\Delta\psi - 2\gamma\psi_z = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right). \quad (4.12)$$

При использовании приближении Буссинеска выражение (4.12) сводится к обычному выражению для завихренности  $\Delta\psi$ .

Математическая постановка задачи, таким образом, включает решение уравнений (4.6), (4.7) с перечисленными начальными и граничными условиями. Физическая постановка состоит в описании процесса возбуждения волн в стратифицированном слое возмущениями в перемешанном слое с нейтральной стратификацией.

## 4.2. Решение для нижнего слоя. Волновые и вихревые возмущения

Из уравнения (4.6) и начального условия (4.10) для завихренности в нижнем слое получим

$$\Delta\psi = F(x - \Lambda z t, z). \quad (4.13)$$

С учетом (4.13), функцию тока в нижнем слое можно представить суммой вихревого и волнового компонентов:  $\psi = \psi_v(x, z, t) + \psi_w(x, z, t)$ .

Здесь вихревой компонент  $\psi_v$  есть решение уравнения Пуассона (4.13) с условиями  $\psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = 0$ . Волновой компонент  $\psi_w$  определим как решение уравнения Лапласа  $\Delta\psi = 0$  с условием  $\psi|_{z=0} = 0$ . В отличие от вихревого компонента, волновой компонент находится неоднозначно; его учет необходим для построения самосогласованного решения задачи.

Далее будем рассматривать случай гармонического по горизонтальной координате распределения

$$F(x, z) = \Phi(z)\exp(ikx), \quad (4.14)$$

где заданная функция  $\Phi(z)$  дает распределение завихренности по вертикали. В этом случае для вихревого компонента имеем представление

$$\psi_v(x, z, t) = \varphi_v(z, t)\exp(ikx), \quad (4.15)$$

где  $\varphi_v(z, t)$  есть решение краевой задачи

$$d^2\varphi_v/dz^2 - k^2\varphi_v = \Phi(z)\exp(-ik\Lambda z t), \quad \varphi_v(0) = \varphi_v(H) = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_v(z, t) = \int_0^H G(z, \xi)\Phi(\xi)\exp(-ik\Lambda t\xi)d\xi, \quad (4.16)$$

$$G(z, \xi) = \frac{1}{k \sinh(kH)} \begin{cases} \sinh(kz)\sinh(k(\xi - H)), & 0 < z < \xi, \\ \sinh(k\xi)\sinh(k(z - H)), & \xi < z < H, \end{cases}$$

где  $G(z, \xi)$  – функция Грина.

Волновой компонент, удовлетворяющий уравнению  $\Delta\psi = 0$ , представим в виде

$$\psi_w = \varphi_w(z, t)\exp(ikx) = A(t)\frac{\sinh(kz)}{\sinh(kH)}\exp(ikx), \quad (4.17)$$

где  $A(t)$  – функция времени, которую далее будем называть волновой амплитудой. Эта амплитуда, удовлетворяющая начальному условию  $A(0) = 0$ , находится с учетом уравнения (4.7) для функции тока в верхнем слое и граничных условий.

Таким образом, для функции тока в нижнем слое имеем представление

$$\psi = \left( \int_0^H G(z, \xi)\Phi(\xi)\exp(-ik\Lambda t\xi)d\xi + A(t)\frac{\sinh(kz)}{\sinh(kH)} \right) \exp(ikx). \quad (4.18)$$

Из (4.18) следуют выражения для функции тока и ее нормальной производной на поверхности раздела

$$\psi|_{z=H-0} = A(t)e^{ikx},$$

$$\psi_z|_{z=H-0} = (A(t)k \coth(kH) + f(t))e^{ikx}, \quad (4.19)$$

$$f(t) = \frac{\partial\varphi_v}{\partial z} \Big|_{z=H} = \frac{1}{\sinh(kH)} \int_0^H \sinh(kz)\Phi(z)\exp(-ik\Lambda z t) dz.$$

Эти выражения далее используются при записи граничных условий (4.8), (4.9).

### 4.3. Решение для верхнего слоя. Интегро-дифференциальное уравнение для волновой амплитуды

Построение решения в области  $z > H$  удобно проводить в системе координат, движущейся со скоростью потока  $U$ . В этой системе выражения для функции тока в нижнем слое и ее граничных значений получается домножением правых частей (4.18), (4.19) на  $e^{ikUt}$ . Функцию тока в верхнем слое  $z > H$  будем искать в виде

$$\psi = e^{\gamma(z-H)}\varphi(z, t)e^{ikx}. \quad (4.20)$$

Учитывая, что в движущейся системе  $D / Dt = \partial / \partial t$ , для функции  $\varphi(z, t)$  из (4.7) получим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_{zz} - a^2\varphi) - k^2 N^2 \varphi = 0, \quad a^2 = k^2 + \gamma^2, \quad (4.21)$$

с начальными условиями (4.11)

$$t = 0: \varphi_{zz} - a^2\varphi = 0, \quad \partial / \partial t(\varphi_{zz} - a^2\varphi) = 0. \quad (4.22)$$

Из представления (4.20) следует  $\psi_z|_{z=H} = (\varphi_z + \gamma\varphi)e^{ikx}$ . С учетом этого выражения и выражений (4.19), граничные условия (4.8), (4.9) сводятся к одному условию

$$z = H: \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (\gamma - k \coth(kH))\varphi \right) + i\Lambda k \varphi = \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad (4.23)$$

где  $f_1(t) = f(t)e^{ikUt}$ . При формулировке этого важного условия, в частности, учтено, что, согласно (4.8), (4.19),  $\varphi|_{z=H} = A_1(t) \equiv A(t)e^{ikUt}$ , где  $A_1(t)$  – волновая амплитуда в движущейся системе. Условие (4.23), учитывающее влияние нижнего слоя посредством функции  $f_1(t)$ , позволяет находить решение в верхнем слое независимо.

Построение решения волнового уравнения с начальным условием (4.22) и граничным условием (4.23), включающим производную по времени первого порядка, представляет собой неклассическую задачу математической физики, которая, видимо, ранее не рассматривалась в литературе. Предлагаемое нами решение этой задачи состоит из двух этапов. На первом этапе строится решение задачи Коши с граничным условием

$$z = H: \quad \varphi = A_1(t), \quad (4.24)$$

и, вытекающими из (4.22), начальными условиями

$$t = 0: \quad \varphi = A_1(0)e^{-a(z-H)}, \quad \varphi_t = A_{1t}(0)e^{-a(z-H)}. \quad (4.25)$$

Оно выражается через волновую амплитуду  $A_1(t)$  (граничное значение) посредством интеграла типа запаздывающего потенциала. Из соответствующей формулы для решения далее находится выражение для граничной производной  $\partial \varphi / \partial z$ . Подстановка этого выражения в условие (4.23) приводит к интегро-дифференциальному уравнению для волновой амплитуды  $A_1(t)$ . Детали вычислений выглядят следующим образом.

Представим решение задачи (4.21), (4.24), (4.25) в виде  $\varphi = A_1(t)e^{-a\eta} + \varphi'(\eta, t)$ ,  $\eta = z - H$ . Тогда для функции  $\varphi'(\eta, t)$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi'_{\eta\eta} - a^2\varphi') - N^2 k^2 \varphi' = A_1(t) N^2 k^2 e^{-a\eta}, \quad (4.26)$$

с граничным условием  $\varphi'(0, t) = 0$  и начальными условиями  $t = 0$ :  $\varphi' = \varphi'_t = 0$ . Для решения (4.26) используем синус преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\mu, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi'(\eta, t) \sin(\mu\eta) d\eta, \quad \varphi'(\eta, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{\varphi}(\mu, t) \sin(\mu\eta) d\mu.$$

Функция  $\hat{\varphi}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \hat{\varphi}}{dt^2} + \frac{N^2 k^2}{a^2 + \mu^2} \hat{\varphi} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N^2 k^2 \mu}{(a^2 + \mu^2)^2} A_1(t),$$

откуда

$$\hat{\varphi}(\mu, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Nk\mu}{(a^2 + \mu^2)^{3/2}} \int_0^t A_1(\tau) \sin\left(\frac{Nk(t-\tau)}{\sqrt{a^2 + \mu^2}}\right) d\tau.$$

Осуществляя обратное преобразование Фурье, для решения, таким образом, найдем представление

$$\varphi = A_1(t) e^{-a\eta} - \int_0^t A_1(\tau) D(\eta, t-\tau) d\tau, \quad (4.27)$$

$$D(\eta, t) = \frac{2Nk}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mu \sin(\mu\eta)}{(a^2 + \mu^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{Nkt}{\sqrt{a^2 + \mu^2}}\right) d\mu.$$

Используя (4.27), можно найти выражение для входящей в условие (4.23) граничной производной

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right|_{z=H} = -a \frac{dA_1}{dt} - N^2 k \int_0^t A_1(\tau) K(t-\tau) d\tau, \quad (4.28)$$

$$K(t) = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mu^2}{(a^2 + \mu^2)^2} \cos\left(\frac{Nkt}{\sqrt{a^2 + \mu^2}}\right) d\mu. \quad (4.29)$$

Замена переменной  $\nu = k / \sqrt{\mu^2 + a^2}$  приводит (4.29) к виду

$$K(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\nu^2} \cos(Nt\nu) d\nu = \frac{J_1(Nt)}{Nt}, \quad (4.30)$$

где  $J_1(z)$  – функция Бесселя первого рода и при вычислении интеграла использованы формулы (Грандштейн, Рыжик, 1971). Подставляя выражение (4.28) в граничное условие (4.23) окончательно приходим к интегро-дифференциальному уравнению с ядром  $K(t)$  (4.30) для нахождения волновой амплитуды

$$c \frac{dA_1}{dt} + N^2 \int_0^t A_1(\tau) K(t-\tau) d\tau - i\Lambda A_1 = -\frac{1}{k} \frac{df_1}{dt}, \quad A_1(0) = 0, \quad (4.31)$$

$$f_1(t) = \frac{e^{ikUt}}{\sinh(kH)} \int_0^H \sinh(kz) \Phi(z) \exp(-ikSz t) dz, \quad (4.32)$$

где  $c = \coth(kH) + b$ ,  $b = (a - \gamma) / k$ . В приближении Буссинеска  $b = 1$ . Функция  $f_1(t)$  в правой части (4.31) описывает источник, приводящий к генерации волновых движений в области  $z > H$  вихревым возмущением в нижнем слое. Этот источник существует только в присутствии сдвигового течения. Поскольку ядро уравнения (4.31) зависит только от разности аргументов, его решение может быть найдено с использованием преобразования Лапласа.

Таким образом, алгоритм расчета волнового поля в верхнем слое состоит в следующем. По заданному распределению завихренности в нижнем слое и формулам (4.19), (4.32) находятся вынуждающие функции  $f(t)$ ,  $f_1(t)$ . Далее, из решения интегро-дифференциального уравнения (31) находится волновая амплитуда  $A_1(t)$ . Наконец, по формулам (4.20), (4.27) посредством квадратур восстанавливается само волновое поле – функция тока в области  $z > H$ .

В общем случае, реализация описанной схемы приводит к громоздким вычислениям. Ситуация упрощается, если  $f(t)$  периодическая функция времени. При этом можно интересоваться лишь предельным при  $t \rightarrow \infty$  установившимся волновым полем. Один из важных примеров такого поля рассмотрен в следующем разделе.

#### 4.4. Излучение ВГВ бегущей вихревой волной

Предположим, что в пограничном слое начальное распределение завихренности сконцентрировано на высоте  $z = h$ , т.е.

$$\Phi(z) = r\delta(z - h), \quad (4.33)$$

где  $\delta(z)$  – дельта функция,  $r$  – амплитудный параметр. С учетом (4.15), (4.16) этому распределению отвечает вихревой компонент функции тока

$$\psi_v = rG(z, h)e^{i(kx - \omega t)}, \quad \omega = k\Lambda h. \quad (4.34)$$

Выражение (4.34) описывает вихревую волну с частотой  $\omega$  и фазовой скоростью  $c = \Lambda h$ , равной скорости фонового течения на уровне  $z = h$ . Структура волны (4.34) аналогична структуре вихревой квазигеострофической волны (2.13) (рис. 1). Отличительная особенность волны состоит в наличии скачка горизонтального компонента скорости

$$u|_{z=h+0} - u|_{z=h-0} = r \exp(i(kx - \omega t)),$$

где, подчеркнем, скачок присутствует в самом вихревом возмущении, а не в фоновом сдвиговом потоке. В природных условиях подобные локализованные скачки скорости могут возникать при внезапных порывах ветра, прохождении линий шквалов, локальных фронтов и т.д.

Распространение вихревой волны (4.34) приводит к возбуждению поля внутренних гравитационных волн в верхнем слое атмосферы. Установившееся при  $t \rightarrow \infty$  волновое поле можно найти без привлечения интегрального уравнения (4.31). Для этого добавим к вихревому компоненту (4.34) волновой компонент функции тока

$$\psi_w = A \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kH)} e^{i(kx - \omega t)},$$

где теперь волновая амплитуда  $A = \text{const}$ . С учетом этого компонента функция тока в нижнем слое

$$\psi = \left( rG(z, h) + A \frac{\sinh(kz)}{\sinh(kH)} \right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.35)$$

причем на границе раздела

$$\begin{aligned} \psi|_{z=H-0} &= A e^{i(kx - \omega t)}, \\ \psi_z|_{z=H-0} &= (Ak \coth(kH) + r\beta) e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где обозначено  $\beta = \sinh(kh) / \sinh(kH)$ .

Функцию тока волнового поля в верхнем слое, удовлетворяющую уравнению (4.7), ищем в виде

$$\psi = e^{\gamma(z-H)} q(z) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (4.37)$$

Определим локальную частоту  $\omega_1$  выражением

$$\omega_1 = kU - \omega = k\Lambda(H - h) = kU_*, \quad U_* = \Lambda(H - h). \quad (4.38)$$

Частота  $\omega_1$  представляет собой частоту вихревой волны в движущейся системе координат – частоту с учетом доплеровской поправки. Подставляя (4.37) в (4.7) для функции  $q(z)$  получим уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} q_{zz} + \lambda q &= 0, \quad z > H, \\ \lambda &= (Nk / \omega_1)^2 - k^2 - \gamma^2 \equiv (N / U_*)^2 - k^2 - \gamma^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

К этому уравнению присоединяется граничное условие

$$\begin{aligned} Z = H: \quad q_z + \alpha q &= r\beta, \\ \alpha &= (\Lambda k / \omega_1) - k \coth(kH) + \gamma = (H - h)^{-1} - k \coth(kH) + \gamma, \end{aligned} \quad (4.40)$$

следующее из условий (4.8), (4.9) и выражений (4.36). Как и ранее, вместо краевой задачи с условием (4.40) можно рассмотреть задачу с условием  $Z = H: q = A$ , а затем использовать (40) для определения предельной волновой амплитуды  $A$ .

В анализе краевой задачи (4.39)-(4.40) следует различать два случая. Первый, наиболее важный случай, отвечает значениям волнового числа

$$k < k_b = \sqrt{(N / U_*)^2 - \gamma^2}, \quad (4.41)$$

когда коэффициент  $\lambda$  в (4.38) положителен. В этом случае общее решение (4.39)

$$\begin{aligned} q &= q_1 + q_2 = A_1 e^{im(z-H)} + A_2 e^{-im(z-H)}, \\ m &= \sqrt{(N / U_*)^2 - k^2 - \gamma^2}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где  $A_1, A_2$  – произвольные постоянные. Вопрос о выборе этих постоянных решается с использованием условия излучения. Для каждого из решений  $q_1, q_2$ , отвечающих соответственно положительным и отрицательным значениям вертикального волнового числа, нетрудно вычислить вертикальный поток энергии

$$F_z = \langle Pw \rangle = \pm 0.5 \rho_0 U_* m k |A_{1,2}|^2. \quad (4.43)$$

Непосредственно из (4.43) следует, что поток положителен только для решения  $q_1$ , т.е.  $A_2 = 0$ . Полагая теперь  $A_1 \equiv A$ , после подстановки (4.42) в краевое условие (4.40), для волновой амплитуды найдем

$$A = \frac{r\beta}{\alpha + im} = \frac{r\beta(\alpha - im)}{\alpha^2 + m^2}. \quad (4.44)$$

Этой амплитуде отвечает функция тока внутренней гравитационной волны

$$\Psi = A e^{\gamma(z-H)} e^{i\theta}, \quad \theta = kx + m(z - H) - \omega t, \quad (4.45)$$

уносящей энергию на бесконечность (в верхние слои атмосферы). Подчеркнем, что эта волна возбуждается вихревым возмущением в слое у поверхности. Рассмотренный случай естественно называть режимом излучения волн – бегущая вихревая волна с  $k < k_b$  излучает внутренние гравитационные волны. Отметим, что отбор решений в этом режиме можно проводить и другим способом – выбирая из волновых решений вида (4.45) решения с положительным вертикальным компонентом вектора групповой скорости ВГВ.

Второй возможный случай отвечает значениям волнового числа  $k < k_b$ , когда в уравнении (4.39)  $\lambda < 0$ . В этом случае единственное ограниченное решение уравнения (4.39)

$$q = Ae^{-m(z-H)}, \quad m = \sqrt{k^2 + \gamma^2 - (N/U_*)^2}. \quad (4.46)$$

Из краевого условия (40) для волновой амплитуды получим

$$A = r\beta / (\alpha - m). \quad (4.47)$$

При  $\gamma = 0$  решению (4.46) отвечает функция тока  $\psi = Ae^{-m(z-H)}e^{i(kx - \omega t)}$ , описывающая захваченную волну – волну, локализованную вблизи поверхности раздела. Данный случай естественно называть режимом захваченных волн. В этом режиме вертикальный поток энергии  $F_z = 0$ , т.е. излучение волн отсутствует. Нетрудно показать, что, при выполнении характерного для атмосферы условия  $N / \Lambda > 1$ , знаменатель (4.47)  $\alpha - m < 0$ , т.е. амплитуда захваченных волн всегда конечна.

Выражение для граничных параметров и волновой амплитуды несколько упрощаются при использовании приближения Буссинеска  $\gamma = 0$ . В этом приближении  $k_b = N / U_*$ , и режиму излучения  $k < k_b$  отвечают значения локальной частоты  $\omega_1 < N$ . Соответственно, в режиме захвата  $\omega_1 > N$ . С учетом выражения для  $\alpha$ , волновую амплитуду можно записать в виде

$$A = \frac{r\beta}{k} \left( (\Lambda / \omega_1) - \coth(kH) + i\sqrt{(N / \omega_1)^2 - 1} \right)^{-1}, \quad \omega_1 < N, \quad (4.48)$$

$$A = \frac{r\beta}{k} \left( (\Lambda / \omega_1) - \coth(kH) - \sqrt{1 - (N / \omega_1)^2} \right)^{-1}, \quad \omega_1 > N.$$

#### 4.5. Численные оценки вертикальных потоков энергии

Приведем некоторые численные оценки, используя для простоты приближение Буссинеска. Для оценок возьмем значения: частота Брента  $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , толщина нижнего перемешанного слоя  $H = 2 \text{ км}$ , высота источника завихренности  $h = 1 \text{ км}$ , величина сдвига скорости в перемешанном слое  $\Lambda = 5 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , интенсивность источника завихренности (величина горизонтального скачка скорости)  $r = 1 \div 2 \text{ м/с}$ . Для этих значений скорость  $U_* = \Lambda(H - h) = 5 \text{ м/с}$ . Бегущая вихревая волна излучает внутренние гравитационные волны, если  $k < k_b$  где, в приближении Буссинеска,  $k_b = N / U_* = 2 \times 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ , соответственно граничная (горизонтальная) длина волны  $2\pi / k_b \approx 3 \text{ км}$ . Граничной волне отвечает частота  $\omega_b = k_b \Lambda H = Nh / (H - h)$ , составляющая для приведенных значений  $\omega_b = N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$  (период  $T_b \approx 10.5 \text{ мин.}$ ). Таким образом, при движении вихревой волны возбуждаются гравитационные волны с горизонтальной длиной большей 3 км и периодом большим 10 минут.

Для оценки потока энергии, преобразуем выражение (4.43), используя значение волновой амплитуды (4.44) и выражение (4.42) для вертикального компонента волнового вектора. Вводя безразмерное волновое число  $\kappa = kH$  и параметр  $R = NH / U_*$ , для вертикального потока энергии (4.43) получим выражение

$$F_z = 0.5\rho_0 U_* r^2 f(\kappa, R), \quad (4.49)$$

включающее безразмерную функцию

$$f(\kappa, R) = \left( \frac{\sinh(\delta\kappa)}{\sinh \kappa} \right)^2 \frac{\kappa \sqrt{R^2 - \kappa^2}}{(\sigma - \kappa \coth \kappa)^2 + R^2 - \kappa^2}, \quad (4.50)$$

где  $\delta = h / H$ ,  $\sigma = (1 - \delta)^{-1}$ . Непосредственно из (4.49), (4.50) следует, что при  $k = 0$ ,  $k_b$  ( $\kappa = 0$ ,  $R$ ) поток обращается в ноль. Существует, таким образом, экстремальное значение волнового числа  $\kappa = \kappa_m$ , при котором поток достигает максимума. При  $R \ll 1$  соответствующее максимальное значение можно найти аналитически. В этом случае  $f(\kappa, R) \approx 0.25\kappa \sqrt{R^2 - \kappa^2}$ , откуда  $\kappa_m = R / \sqrt{2}$ , ( $k_m = R / H \sqrt{2}$ ) и максимальный поток

$$F_{z \max} \approx \frac{1}{16} \rho_0 U_* r^2 R^2 = \frac{1}{16} \rho_0 r^2 \frac{N^2 H^2}{U_*}. \quad (4.51)$$

Для приведенных выше значений безразмерный параметр  $R = 4$ , так, что формула (4.51) формально неприменима. Если же взять случай слабой стратификации  $N = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  и сильного сдвига  $\Lambda = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , то  $R = 0.2$  и по формуле (4.51) получим  $F_{z \max} \approx 0.032 \text{ Вт/м}^2$  при  $r = 1 \text{ м/с}$ ,  $F_{z \max} \approx 0.13 \text{ Вт/м}^2$  при  $r = 2 \text{ м/с}$ . Здесь для плотности воздуха взято значение  $\rho_0 = 1.29 \text{ кг/м}^3$ .

В общем случае оценка максимального потока может быть получена из графика зависимости (4.50), построенного численно (рис. 5). Как следует из рисунка, для значения  $R = 4$  максимум потока достигается при  $\kappa = \kappa_m = 1.8$ . При этом  $k_m = 1.8 / H = 0.9 \times 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ , горизонтальная длина волны  $2\pi / k_m \approx 7 \text{ км}$ . Для этих значений вертикальное волновое число  $m = H^{-1} \sqrt{R^2 - \kappa_m^2} = 1.78 \times 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ , длина волны по вертикали  $2\pi / m \approx 3.52 \text{ км}$ . Период волны, реализующей максимальный поток,  $T = 2\pi / k_m Sh \approx 23 \text{ минуты}$ . Для самого максимального потока энергии соответственно получим

$$F_{z \max} \approx 0.8 \text{ Вт/м}^2 \quad (r = 2 \text{ м/с}), \quad F_{z \max} \approx 0.2 \text{ Вт/м}^2 \quad (r = 1 \text{ м/с}).$$

Здесь использовано максимальное значение функции  $f(\kappa, R)$ , оцененное по графику.

Полученные значения можно сравнить с оценками потоков энергии при орографическом возбуждении – одним из наиболее эффективных механизмов генерации ВГВ в атмосфере. Если однородный поток со скоростью  $U$  обтекает периодический рельеф с волновым числом  $k$  и высотой  $h$ , то он возбуждает волновое поле с вертикальным потоком энергии (Gill, 1982)

$$F_z = 0.5\rho_0 U^2 h^2 k \sqrt{N^2 - U^2 k^2}. \quad (4.52)$$

Непосредственно из (4.52) следует, что излучение энергии происходит для значений  $0 < k < k_b = N / U$ , причем на концах этого интервала волновых чисел поток обращается в ноль. Простое исследование (4.52) на экстремум дает значение максимального потока и соответствующего волнового числа

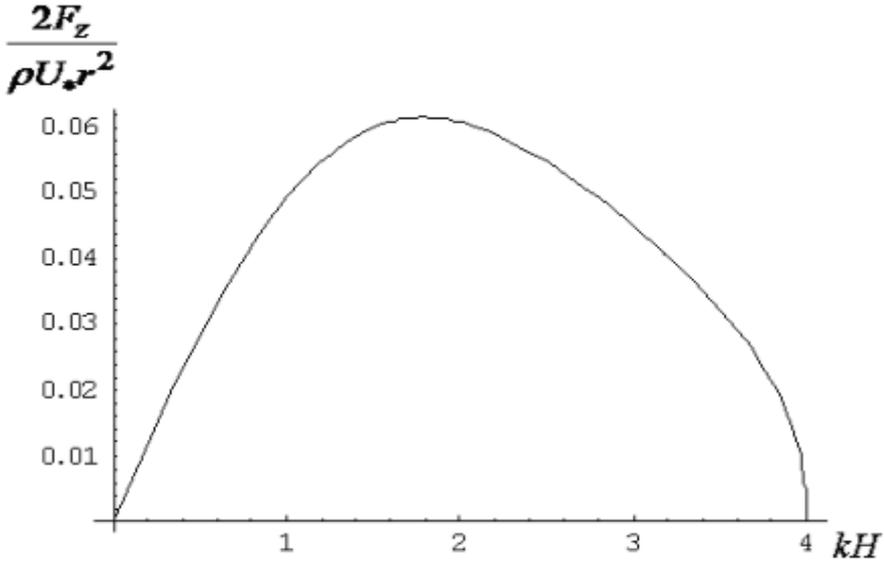


Рис. 5. Зависимость безразмерного вертикального потока энергии от волнового числа

$$F_{z \max} = \frac{1}{4} \rho_0 U h^2 N^2, \quad k_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{N}{U}.$$

Полагая  $U = 10$  м/с,  $N = 10^{-2}$  с $^{-1}$ , отсюда получим значения

$$F_{z \max} \approx 3.2 \text{ Вт/м}^2 \quad (h = 100 \text{ м}), \quad F_{z \max} \approx 0.8 \text{ Вт/м}^2 \quad (h = 50 \text{ м}).$$

Таким образом, для волн, излучаемых вихревым возмущением в верхние слои атмосферы, значения потоков энергии вполне сопоставимы со значениями потоков при орографическом возбуждении (для препятствий небольшой высоты). Подчеркнем, что последние значения получены в модели с неограниченным периодическим рельефом – значения орографических потоков энергии от изолированных гор могут быть на два порядка меньше [3].

#### 4.6. Определение волнового поля по общей теоретической схеме

Волновое поле, возбуждаемое бегущей вихревой волной, можно найти также из решения интегро-дифференциального уравнения (4.31). С учетом выражений (4.32), (4.33) для этой волны в правой части (4.31) стоит источник  $f_1(t) = r\beta e^{i(kU - \omega)t} = r\beta e^{i\omega_1 t}$ . Используем для простоты приближение Буссинеска и коротковолновое приближение  $kH \gg 1$ . При этом  $\text{coth}(kH) \approx 1$  и в уравнении (4.31) коэффициент  $c = \text{coth}(kH) + 1 \approx 2$ . Переходя к безразмерному времени  $t' = Nt$  и локальной частоте  $\omega_1' = \omega_1 / N = kU_* / N$ , уравнение (4.31) можно записать в виде (штрихи опускаем)

$$2 \frac{dA_1}{dt} + \int_0^t A_1(\tau) K(t - \tau) d\tau - ibA_1 = -i \frac{r\beta}{k} \omega_1 e^{i\omega_1 t}, \quad K(t) = \frac{J_1(t)}{t}. \quad (4.53)$$

Здесь обозначено  $b = \Lambda / N$ .

Для решения (4.53) используем преобразование Лапласа. Определим изображение по Лапласу решения  $A_1(t) \doteq Y(p)$ . Используя теорему о свертке и табличные изображения

$$e^{i\omega_1 t} \doteq \frac{1}{p - i\omega_1}, \quad \frac{J_1(t)}{t} \doteq \sqrt{p^2 + 1} - p,$$

с учетом начального условия  $A_1(0) = 0$ , для  $Y(p)$  из (4.53) получим

$$Y(p) = -\frac{r\beta\omega_1}{2bk} \left( \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p + ib}{(p - i\omega_1)(p - i\omega_2)} \right), \quad \omega_2 = \frac{b^2 + 1}{2b} > 1. \quad (4.54)$$

После преобразований из (4.54) для функции оригинала найдем

$$A_1(t) = -\frac{r\beta\omega_1}{2k(\omega_1 - \omega_2)} \left( e^{i\omega_1 t} I_1(t) - e^{i\omega_2 t} I_2(t) \right), \quad (4.55)$$

$$I_k(t) = 1 - \frac{i}{b} \int_0^t e^{-i\omega_k \tau} \frac{J_1(\tau)}{\tau} d\tau.$$

В задаче об установившемся волновом поле интересует предел  $A_1(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Этот предел находится с использованием известного интеграла [48]

$$\int_0^\infty e^{-i\omega\tau} \frac{J_1(\tau)}{\tau} d\tau = \begin{cases} -i \left( \omega + \sqrt{\omega^2 - 1} \right)^{-1}, & \omega > 1, \\ \sqrt{1 - \omega^2} - i\omega, & \omega < 1. \end{cases} \quad (4.56)$$

С учетом (4.56) получим  $I_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Определяя теперь  $I_1(\infty)$  и возвращаясь к размерному времени и частоте, для предельного решения найдем  $A_1(t) = Ae^{i\omega_1 t}$ , где значения постоянной амплитуды  $A$  даются ранее полученными выражениями (4.48). Для волновой амплитуды общий подход, таким образом, приводит к тому же результату.

Для определения самого волнового поля (в приближении Буссинеска) имеем выражение

$$\varphi = A_1(t)e^{-k\eta} - \int_0^t A_1(\tau)D(\eta, t - \tau)d\tau, \quad A_1(t) = Ae^{i\omega_1 t}, \quad (4.57)$$

где функция  $D(\eta, t)$  определена формулой (4.27). В интеграле (4.57) изменим порядок интегрирования

$$\int_0^t A_1(\tau)D(\eta, t - \tau)d\tau = \frac{2NkA}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu \sin(\mu\eta)}{(k^2 + \mu^2)^{3/2}} d\mu \int_0^t e^{i\omega_1(t-\tau)} \sin\left(\frac{Nk\tau}{\sqrt{k^2 + \mu^2}}\right) d\tau.$$

Обозначая  $\nu = Nk / \sqrt{\mu^2 + k^2}$ , для внутреннего интеграла получим

$$\int_0^t e^{i\omega_1(t-\tau)} \sin \nu\tau d\tau = \frac{\nu}{\nu^2 - \omega_1^2} e^{i\omega_1 t} - \frac{1}{2} \left( \frac{e^{i\nu t}}{\nu - \omega_1} + \frac{e^{-i\nu t}}{\nu + \omega_1} \right), \quad (4.58)$$

Из (4.57), (4.58) для решения получим представление  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ,

$$\varphi_1 = Ae^{i\omega_1 t} \left( e^{-k\eta} + \frac{2(Nk)^2}{\pi\omega_1^2} \int_0^\infty \frac{\mu \sin(\mu\eta) d\mu}{(\mu^2 + m^2)(\mu^2 + k^2)} \right), \quad (4.59)$$

$$m^2 = k^2 \left( 1 - \frac{N^2}{\omega_1^2} \right),$$

$$\varphi_2 = -\frac{2NkA}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu \sin(\mu\eta)}{(k^2 + \mu^2)^{3/2}} \left( \frac{e^{i\mu\eta}}{\nu - \omega_1} + \frac{e^{-i\mu\eta}}{\nu + \omega_1} \right) d\mu. \quad (4.60)$$

Поведение близких к (4.59), (4.60) интегралов проанализировано в монографии [47]. При  $t \rightarrow \infty$  слагаемое  $\varphi_2 \rightarrow 0$ , что устанавливается методом стационарной фазы. Данное слагаемое описывает волновое поле, которое с течением времени рассеивается в пространстве. В анализе слагаемого  $\varphi_1$ , которое описывает установившееся волновое поле, следует различать два случая. При  $\omega_1 > N$  входящий в (4.59) интеграл находится с использованием теории вычетов. При этом для этого слагаемого получим выражение  $\varphi_1 = Ae^{i\omega_1 t} e^{-m\eta}$ , соответственно для функции тока имеем ранее полученное выражение, отвечающее захваченной гравитационной волне. При  $\omega_1 < N$  (режим излучения) интеграл (4.59) содержит особенность, которая устраняется введением малого комплексного поглощения. Вычисление этого интеграла приводит к выражению для функции тока (4.45).

#### 4.7. Краткое резюме

В рамках двухслойной модели атмосферы исследован механизм генерации ВГВ вихревыми возмущениями в потоке с вертикальным сдвигом. Предполагается, что сдвиговой поток локализован в пограничном слое атмосферы с нейтральной стратификацией, над которым расположен полуограниченный стратифицированный слой, движущийся с постоянной скоростью. Показано, что распространение вихревых возмущения в пограничном слое неизбежно сопровождается генерацией ВГВ. На основе линеаризованной системы уравнений гидродинамики сформулировано интегро-дифференциальное уравнение для волновой амплитуды, позволяющее найти характеристики волн. Изучено волновое поле, возбуждаемое вихревым возмущением с начальным сингулярным распределением завихренности. В зависимости от длины волны выделено два волновых режима – режим излучения и режим захваченных волн. Показано, что в первом режиме излучаются ВГВ с длиной волны большей 3 км и периодом, большим 10 минут. Получены численные оценки вертикальных потоков волновой энергии в режиме излучения.

#### Литература

- [1] Gill A.E. Atmosphere-ocean dynamics. N.Y.; London: Academic Press, 1982. 662 p.
- [2] Lindzen R.A. Dynamics in atmospheric physics. Cambridge: Univ. Press, 1990. 324 p.
- [3] Baines P.G. Topographic Effects in Stratified Flows. Cambridge: Univ. Press, 1998. 500 p.
- [4] Plougonven R., Muraki D.J., Snyder C. A baroclinic instability that couples balanced motions and gravity waves // J. Atmos. Sci. 2005. V. 62. P. 1545–1559.

- [5] *Mak M.* Atmospheric Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 2011. 500 p.
- [6] *Rossby C.G.* On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems // *J. Mar. Res.* 1937. V. 1. P. 15–27.
- [7] *Blumen W.* Geostrophic adjustment // *Rev. Geophys.* 1972. V. 10. P. 485–528.
- [8] *Fritts D.C., Luo Z.* Gravity wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part I: Two-dimensional forcing // *J. Atmos. Sci.* 1992. V. 49. P. 681–697.
- [9] *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* 1952. V. 211 P. 564–587.
- [10] *Plougonven R., Snyder C.* Inertia-gravity waves spontaneously generated by jets and fronts. Part I: Different baroclinic life cycles // *J. Atmos. Sci.* 2007. V. 64. P. 2502–2520.
- [11] *Plougonven R., Zhang F.* Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts // *Rev. Geophys.* 2014. V. 52. P. 33–76.
- [12] *Williams P.D., Haine T.W., Read P.L.* Inertia-gravity waves emitted from balanced flow: observations, properties, and consequences // *J. Atmos. Sci.* 2008. V. 65. P. 3543–3556.
- [13] *Bedard A.* Low-frequency atmospheric acoustic energy associated with vortices produced by thunderstorms // *Mon. Wea. Rev.* 2005. V. 133. P. 241–263.
- [14] *Schechter D.A.* The spontaneous imbalance of an atmospheric vortex at high Rossby number // *J. Atmos. Sci.* 2008. V. 65. P. 2498–2521.
- [15] *Howe M.S.* Theory of Vortex Sound // Cambridge Texts in Applied Mathematics. Vol. 33. Cambridge: Univ. Press, 2003. 232 p.
- [16] *Кóпéв V., Леонтев E.* Acoustic instability of an axial vortex // *Sov. Phys. Acoust.* 1983. V. 29. P. 111–115.
- [17] *Zeitlin V.* On the backreaction of acoustic radiation for distributed two-dimensional vortex structures // *Phys. Fluids* 1991. V. 3. P. 1677–1680.
- [18] *Ford R.* The instability of an axisymmetric vortex with monotonic potential vorticity in rotating shallow water // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 280. P. 303–334
- [19] *Plougonven R., Zeitlin V.* Internal gravity wave emission from a pancake vortex: An example of wave–vortex interaction in strongly stratified flows // *Phys. Fluids* 2002. V. 14. P. 1259–1268.
- [20] *Schechter D.A., Montgomery M.T.* Conditions that inhibit the spontaneous radiation of spiral inertia–gravity waves from an intense mesoscale cyclone // *J. Atmos. Sci.* 2006. V. 63. P. 435–456.
- [21] *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1987. 710 pp.
- [22] *Ford R., McIntyre M.E., Norton W.A.* Balance and the slow quasimanifold: some explicit results // *J. Atmos. Sci.* 2000. V. 57. P. 1236–1254.
- [23] *Reznik G.M., Zeitlin V., Jelloul M.B.* Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part 1. rotating shallow-water model // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 445. P. 93–120.
- [24] *Vanneste J.* Exponential smallness of inertia-gravity wave generation at small Rossby number // *J. Atmos. Sci.* 2008. V. 65. P. 1622–1637.
- [25] *Zeitlin V.* Decoupling of balanced and unbalanced motions and inertia-gravity wave emission: small versus large Rossby number // *J. Atm. Sci.* 2008. V. 65. P. 3528–3542.
- [26] *Kelvin L.* Stability of fluid motion: rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates // *Phil. Mag.* 1887. V. 24. P. 88–196.
- [27] *Chagelishvili G.D., Khujadze G.R., Lominadze J.G., Rogava A.D.* Acoustic waves in unbounded shear flows // *Phys. Fluids* 1997. V. 9. P. 1955–1962.
- [28] *Chagelishvili G.D., Tevzadze A.G., Bodo G., Moiseev S.S.* Linear mechanism of wave emergence from vortices in smooth shear flows // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79 (17). P. 3178.
- [29] *Чагелишвили Г.Г., Чхетиани О.Г.* Трансформация волн Россби в сдвиговых течениях // *Письма в ЖЭТФ* 1995. Т. 62 (4). С. 41–48.

- [30] *Vanneste J., Yavneh I.* Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasigeostrophic balance // *J. Atmos. Sci.* 2004. V. 61. P. 211–223.
- [31] *Калашник М.В., Ломинадзе Д.Г., Чагелишвили Г.Д.* Линейная динамика возмущений в течениях с постоянным горизонтальным сдвигом // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2005. №6. С. 25–37.
- [32] *Kalashnik M.V., Mamatsashvili G.R., Chagelishvili G.D., Lominadze J.G.* Linear dynamics of non-symmetric perturbations in geostrophic horizontal shear flows // *Q. J. Roy. Met. Soc.* 2006. V. 132. P. 505–518.
- [33] *Bakas N.A., Farrell B.F.* Gravity waves in a horizontal shear flow. Part I: Growth mechanisms in the absence of potential vorticity perturbations // *J. Phys. Oceanogr.* 2009. V. 39. P. 481–496.
- [34] *Bakas N.A., Farrell B.F.* Gravity waves in a horizontal shear flow. Part II: Interaction between gravity waves and potential vorticity perturbations // *J. Phys. Oceanogr.* 2009. V. 39. P. 497–511.
- [35] *Lott F., Plougonven R., Vanneste J.* Gravity waves generated by sheared potential vorticity anomalies // *J. Atmos. Sci.* 2010. V. 67. P. 157–170.
- [36] *Lott F., Plougonven R., Vanneste J.* Gravity waves generated by sheared three-dimensional potential vorticity anomalies // *J. Atmos. Sci.* 2012. V. 69. P. 2134–2151.
- [37] *Langer R.E.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1949. V. 67. P. 461–490.
- [38] *Nayfeh A.H.* *Perturbation Methods.* John Wiley & Sons, 1973. 437 p.
- [39] *Abramowitz M., Stegun I.A.* *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* 9th ed. Dover, 1964. 1046 p.
- [40] *Jones W.L.* Propagation of internal gravity waves in fluids with shear flow and rotation // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 30. P. 439–448.
- [41] *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984. 344 с.
- [42] *Booker J.R., Bretherton F.P.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. P. 513–539.
- [43] *Hertzog A., Alexander M.J., Plougonven R.* On the intermittency of gravity wave momentum flux in the stratosphere // *J. Atmos. Sci.* 2012. V. 69. P. 3433–3448.
- [44] *Fritts D.C., Alexander M.J.* Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere // *Rev. Geophys.* 2003. V. 41. P. 1–64.
- [45] *Reeder M.J., Griffiths M.* Numerical modelling of inertia-gravity wave emission by fronts and jets // *Gravity wave processes: their parameterization in global climate models.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1997. P. 137–152.
- [46] *Alexander M.J.* Gravity wave fluxes // *Encyclopedia of Atmospheric Sciences.* Elsevier Science Ltd., 2003. P. 137–152.
- [47] *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344 с.
- [48] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

## 2.5. Содарные исследования волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых струйных течениях

***М.А. Каллистратова<sup>1</sup>, В.С. Люлюкин<sup>1</sup>, Р.Д. Кузнецов<sup>1,2</sup>,  
И.В. Петенко<sup>1,3</sup>, Д.В. Зайцева<sup>1</sup>, Д.Д. Кузнецов<sup>1</sup>***

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, г. Москва*

<sup>2</sup>*Финский метеорологический институт, г. Хельсинки*

<sup>3</sup>*Институт наук об атмосфере и климате, г. Рим*

Обменные процессы в атмосферном пограничном слое (АПС) играют определяющую роль в формировании погоды и климата, воздействуют на ближний перенос и диффузию примесей, влияют на распространение электромагнитных и звуковых волн. Для параметризации неустойчивого и нейтрально стратифицированного АПС в течение десятилетий используется теория подобия Мони́на–Обухова, которая позволяет по стандартным данным о метеорологических параметрах определять необходимые характеристики турбулентного обмена в АПС. Но в устойчиво-стратифицированном АПС физические процессы массо-тепло-обмена остаются до сих пор недостаточно понятными, плохо определяемыми и не поддаются универсальной параметризации.

Особые трудности связаны с проблемой моделирования и предсказания низкоуровневых струйных течений (НСТ) и внутренних гравитационных волн (ВГВ), которые повсеместно обнаруживаются в статически устойчивом АПС. Отсутствие адекватной параметризации НСТ и ВГВ существенно сдерживает развитие крупномасштабных региональных моделей АПС. Теоретические исследования внутренних гравитационных волн, подразделяемых на волны плавучести (ВП) и гравитационно-сдвиговые волны (ГСВ), необычайно сложны вследствие нелинейности волновых процессов в атмосфере. До настоящего времени не существует доступных аналитических оценок связи параметров ВП и ГСВ с параметрами турбулентности, и даже нет общепринятого мнения о степени влияния волновой активности на интенсивность турбулентности и на обменные процессы в АПС. Поэтому весьма важны экспериментальные исследования таких процессов.

В статье описаны применявшиеся в авторами в 2005–2016 гг. методы экспериментальных исследований НСТ, обнаружения ВГВ, определения их типа и условий их возникновения, количественного определения параметров волн, а также их воздействия на мелко- и мезо-масштабную турбулентность. Главное внимание уделено гравитационно-сдвиговым волнам типа волн Кельвина-Гельмгольца, которые преобладают над другими типами волн в условиях ночных инверсий над однородной или слабо-неоднородной равнинной поверхностью средних и высоких широт. Основным средством исследования НСТ и ВГВ служили наземные акустические доплеровские локаторы (содары). Натурные измерения проводились в Московском регионе, на Цимлянской научной станции, расположенной в однородной степной местности, над снежной поверхностью в береговой и внутриконтинентальной зонах Антарктики, в аридных областях Калмыкии, над водной поверхностью в прибрежной зоне Черного моря. Была исследована повторяемость ГСВ, условия их формирования в приземных и приподнятых инверсионных слоях, а также их характерные амплитуды, периоды, длины волн, скорости перемещения и время жизни. Исследована связь волновой активности с

*2.5. Содарные исследования волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых течениях*  
интенсивностью флуктуаций параметров АПС и величиной потоков тепла и импульса, измеряемых стандартными методами.

## 1. Введение

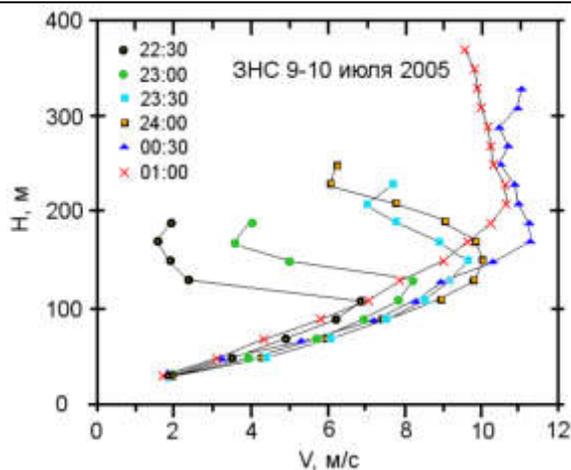
Обменные процессы в атмосферном пограничном слое (АПС) играют определяющую роль в формировании погоды и климата, воздействуют на ближний перенос и диффузию примесей, влияют на распространение электромагнитных и звуковых волн. Разработка и эксплуатация прогностических численных моделей требуют параметризации обменных процессов в АПС. Для параметризации неустойчивого и нейтрально стратифицированного АПС в течение десятилетий достаточно успешно используется теория подобия Монина–Обухова, которая позволяет по стандартным данным о метеорологических параметрах определять необходимые характеристики турбулентного обмена в АПС. Но в устойчиво стратифицированном АПС до сих пор, несмотря на многочисленные исследования, физические процессы массо-тепло-обмена остаются недостаточно понятыми, плохо определяемыми и не поддающимися универсальной параметризации [1–3].

Особые трудности связаны с проблемой моделирования и предсказания таких мезо-масштабных явлений как низкоуровневые струйные течения и внутренние гравитационные волны, которые часто обнаруживаются в таких течениях. Теоретические исследования внутренних гравитационных волн (подразделяемых на волны плавучести (ВП) и гравитационно-сдвиговые волны (ГСВ)) необычайно сложны вследствие нелинейности таких волновых движений. До настоящего времени не только не существует доступных аналитических оценок параметров ВП и ГСВ, но даже нет общепринятого мнения о степени влияния волновой активности различных типов на интенсивность турбулентности и обменные процессы в статически устойчивом АПС. Поэтому экспериментальные исследования этих процессов весьма важны.

### *Низкоуровневые струйные течения*

Низкоуровневые струйные течения (НСТ) характеризуются максимумом в профилях скорости ветра и значительными вертикальными сдвигами скорости ( $\sim 3\text{--}8 \text{ мс}^{-1}/100 \text{ м}$ ). Поэтому гравитационно-сдвиговые волны типа волн Кельвина-Гельмгольца (ВКГ) образуются в НСТ чаще, чем другие типы внутренних гравитационных волн (см., например, [4]). Причиной НСТ могут служить синоптические фронты, кататические ветры, бризовая и горно-долинная циркуляции. Но помимо этого, НСТ повсеместно образуются в однородной и слабо-неоднородной равнинной местности в безоблачные ночи. Высота максимума ночных НСТ обычно близка к высоте верхней границы приземной радиационной инверсии ( $\sim 50\text{--}500 \text{ м}$ ), а максимальная скорость ветра может превышать скорость геострофического ветра. Пример эволюции профиля скорости ветра в ночном НСТ приведен на *рис. 1-1*.

Целенаправленные исследования НСТ начались в 1950-х годах в США благодаря возросшему интересу к массо-тепло-переносу в АПС и к роли низкоуровневой температурной адвекции в образовании ночных гроз (см., например, [5, 6]). Тогда же было предложено физическое объяснение возникновения супер-геострофических струй за счет инерционных осцилляций скорости ветра, связанных с резким уменьшением турбулентной вязкости воздуха при переходе от дневной



**Рис. 1-1.** Типичный пример развития ночного низкоуровневого струйного течения на Звенигородской научной станции, Московская область. Профили скорости ветра измерены содаром, время осреднения – 30 мин. Около значков указано местное время

неустойчивой стратификации АПС к устойчивой ночной стратификации и с “отрывом” ветрового потока от поверхностного трения [7]. В настоящее время теория физических механизмов образования ночных НСТ продолжает уточняться [8–11].

В России экспериментальные исследования НСТ велись в 1960-х годах в Главной Геофизической Обсерватории им. Воейкова [12–14] и были возобновлены лишь в начале 2000-х годов, в Институте физики атмосферы им. Обухова [15–17]. Между этими этапами были получены только отдельные примеры регистрации ночных НСТ на 300-метровой метеорологической башне в Обнинске [18] и в ходе содарных исследований АПС [19–22].

Современный этап интенсивных исследований НСТ начался в 1980-ых годах в связи с общей проблемой параметризации планетарного пограничного слоя. Развитию исследований НСТ способствовало появление новых средств для наземных дистанционных измерений скорости ветра и температуры воздуха в АПС, таких как радары ясного неба, содары, системы радиоакустического зондирования и доплеровские лидары. Были предложены критерии идентификации НСТ [23] и приведены многочисленные примеры вертикальных профилей скорости ветра в ночном АПС. Были получены статистические данные о распределении высот расположения оси струйных течений и о распределении максимальной скорости в струе в различных регионах [24–27]. Были проведены климатологические исследования НСТ на территории США [28, 29]. В отдельных случаях были прослежены связи НСТ с синоптическими явлениями [30].

Вместе с тем, до сих пор не решен целый ряд проблем. Например, нет четкого разграничения НСТ, возникающих при стационарных инверсиях над относительно ровной подстилающей поверхностью за счет резкого уменьшения турбулентной вязкости [7] и НСТ, вызванных адвективным ускорением и бароклинностью, связанной с наклоном местности, либо с синоптическими процессами [31]. Очевидно, по этой причине данные разных авторов о частоте наблюдения НСТ и о

типичной высоте оси течения значительно отличаются. Степень корреляции высоты НСТ с высотой верхней границы инверсионного слоя остается пока неопределенной [32]. Экспериментальные данные о связи максимальной скорости ветра в струе с характеристиками устойчивости инверсионного слоя и с характеристиками турбулентности в нижней и верхней части струи до последнего времени были весьма малочисленны [33, 34].

Экспериментальные исследования НСТ продолжаются в настоящее время в связи с генерацией волн, а также для нужд ветроэнергетики и метеорологии загрязнений [35].

*Внутренние гравитационные волны в атмосферном пограничном слое*

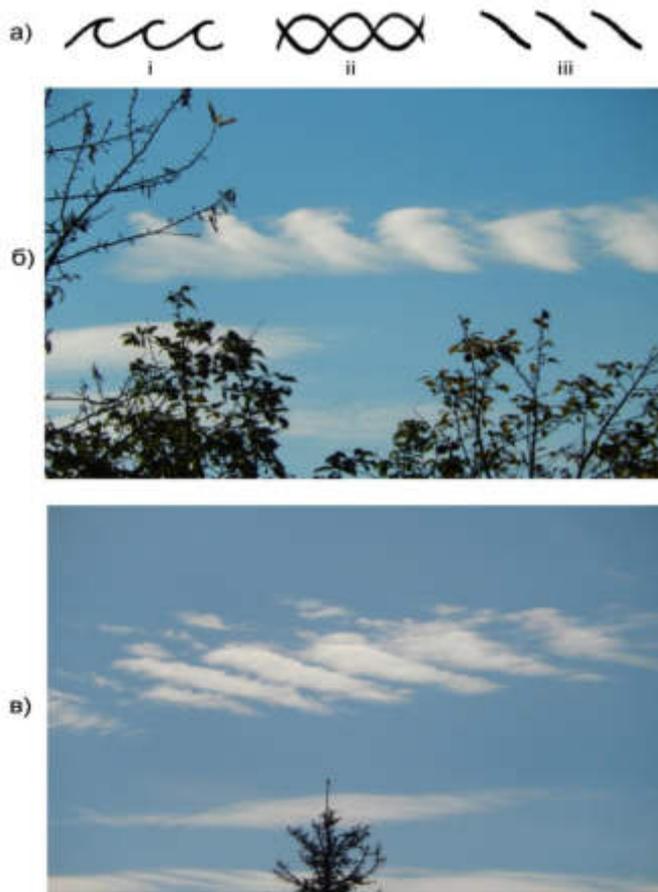
Существование в нижней тропосфере мезомасштабных волнообразных структур с длинами волн от сотни метров до нескольких километров было известно ещё в позапрошлом веке по наблюдениям облаков необычной формы. Схематическое изображение форм таких структур, а также примеры фотографий облаков в виде валов с характерной завихренностью в верхней части и в виде наклонных полос приведены на *рис. 1-2*. Такие структуры образуются из-за потери устойчивости воздушного течения при скачке плотности воздуха и скорости ветра на верхней границе облака и являются типичным образцом волн Кельвина-Гельмгольца (ВКГ). Время жизни облачных волновых структур, показанных на *рис. 1-2*, составляет несколько минут, а затем они размываются.

Лабораторные исследования сдвиговых течений в двухслойных жидкостях, которые были начаты в 1970 годах [36] и позднее продолжены [37], продемонстрировали возникновение и обрушение ВКГ, формы которых хорошо согласуются как с наблюдаемыми в облаках волнообразными структурами, так и с результатами численного моделирования [38]. Однако, в безоблачном АПС подобные структуры не идентифицировались до появления средств наземного дистанционного зондирования атмосферы (содаров, радаров и лидаров).

С развитием техники зондирования, позволяющей с высоким разрешением визуализировать мезомасштабные турбулентные образования, волнообразные структуры стали эпизодически обнаруживаться в поле интенсивности эхо-сигнала. Позднее подобные структуры были обнаружены и в поле ветра при доплеровских радарных и лидарных измерениях

Отметим, что до сих пор ни в российской, ни в зарубежной литературе нет устоявшейся терминологии для обозначения волновых движений в безоблачной атмосфере. Во многих зарубежных публикациях рассматриваемые нами структуры – внутренние гравитационно-сдвиговые волны – именуется волнами Кельвина-Гельмгольца (ВКГ), т.к. по форме эти волнообразные структуры похожи на волны Кельвина-Гельмгольца в облаках (см. *рис. 1-2*). Мы также будем использовать этот термин и аббревиатуру в дальнейшем тексте.

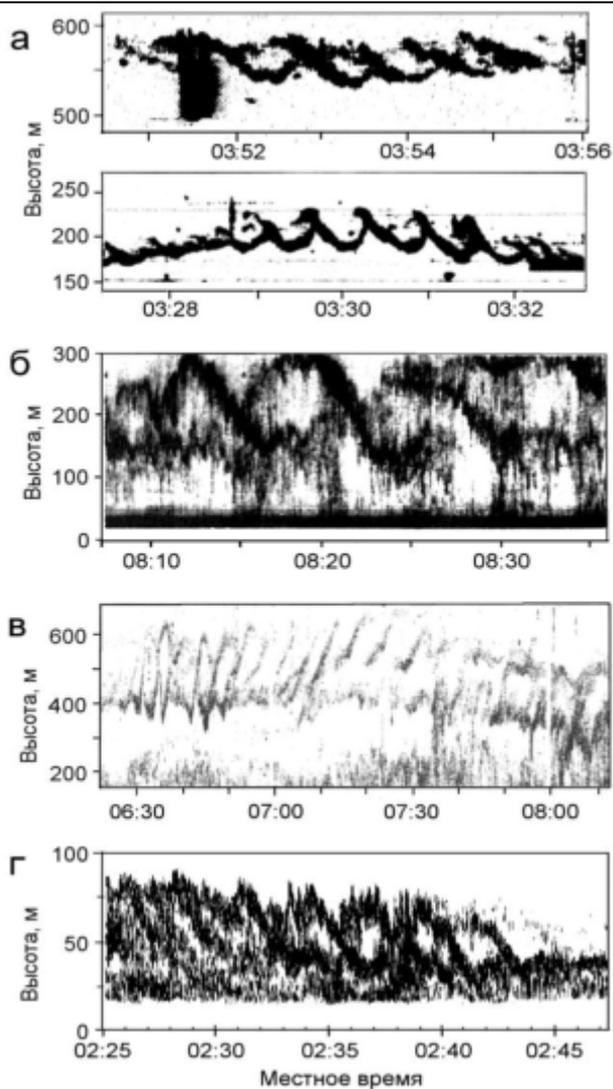
Среди экспериментальных исследований ВКГ основное место занимают радиолокационные наблюдения волн в верхней тропосфере, нижней стратосфере и ионосфере [39–41]. Это связано с распространённостью сетей непрерывного мониторинга атмосферы импульсными СВЧ и ВЧ радарными, которые достаточно часто регистрируют ВКГ на высотах 2–20 км и 50–100 км. Вертикальная разрешающая способность таких радаров (100–200 м) недостаточна для исследования устойчиво стратифицированного АПС.



**Рис. 1-2.** Волны Кельвина-Гельмгольца (ВКГ) в атмосфере. а) – схематическое изображение "валов" (i), "кошачьих глаз" (ii) и "наклонных полос" (iii). б) и в) – примеры облаков с ВКГ, Воскресенский район Московской области, 6 октября 2013 г.; б) – валы, время снимка 14:37:02; в) – наклонные полосы, время снимка 13:45:54

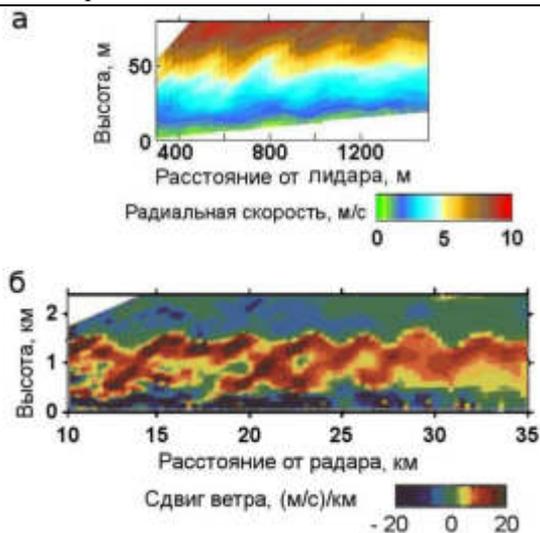
В атмосферном пограничном слое дистанционных наблюдений ВКГ немного, и практически нет климатологической информации. По-видимому, это объясняется отсутствием сетевого мониторинга АПС и эпизодичностью зондирования этого слоя. Насколько нам известно, до настоящего времени опубликовано лишь около полутора десятков свидетельств обнаружения цугов ВКГ в АПС с помощью частотно-модулированных радаров, содаров и лидаров, которые имеют достаточно высокое разрешение по вертикали (2–20 м) для исследований волнообразных образований.

На рис. 1-3 показаны образцы первых регистраций внутренних гравитационно-сдвиговых волн в безоблачном АПС на радарных и содарных эхограммах в координатах высота – текущее время [42–45]. Степень почернения на графиках соответствует степени интенсивности принятого локатором сигнала, вызванного обратным рассеянием радиоволн и звука на неоднородностях показателя преломления воздуха. Поскольку интенсивность принятого сигнала прямо пропорцио-



**Рис. 1-3.** Визуализация ВКГ на радарных и содарных эхограммах. **а** – частотно-модулированный радар, Сан Диего; верх: 23 июня 1970 г.; низ: 25 июня 1970 г. **б** – содар, Оклахома, 6 сентября 1971 г. **в** – содар, Колорадо, 2 марта 1971 г. **г** – содар, ЗНС ИФА РАН, 28 марта 1991 г. Адаптировано из [42–45]

нальна структурным характеристикам турбулентных флуктуаций температуры  $C_T^2$  (для содара), либо влажности  $C_q^2$  (для радара) [46], то, чем темнее изображение структуры на эхограмме, тем сильнее турбулизована эта структура. На эхограммах чётко видны цуги волнообразных структур. На *рис. 1-3а* показаны ВКГ в форме "кошачьих глаз" и "валов" (см. *рис. 1-2а*), зарегистрированные частотно-модулированным радаром в тонком слое приподнятой инверсии. На *рис. 1-3б*, и *1-3в* показаны содарные эхограммы с ВКГ в виде "кошачьих глаз" и "наклонных полос" в слоях приподнятых инверсий. На *рис. 1-3г* показаны "кошачьи глаза" в



**Рис. 1-4.** Визуализация волн Кельвина-Гельмгольца в пространственных координатах. **а** – "валы" в двумерном поле радиальной скорости ветра по данным сканирующего лидара, 06.10.1999, Канзас. **б** – "кошачьи глаза" в двумерном поле вертикального сдвига скорости ветра по данным импульсного сканирующего радара, 06.09.1995, Чилболтон, Англия. Адаптировано из [47] и [48]

слое приземной инверсии, полученные с помощью содара с высоким пространственным (3.5 м) и временным (1 с) разрешением. Высоты расположения ВКГ, их амплитуды и периоды заметно отличаются друг от друга (масштабы высоты и времени на *рис. 1-3а, б, в* и *г* различны), но формы этих волновых образований, занимающих всю толщину слоя приподнятой или приземной температурной инверсии, легко узнаваемы. Они совсем не похожи на близкую к синусоидальной форму бегущих внутренних гравитационных волн (волн плавучести), которые тоже эпизодически регистрируются на эхограммах в форме колебаний высоты границ инверсионных слоев.

Изображения ВКГ, аналогичные приведенным на *рис. 1-3*, были получены в Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук (ИФА) при проведении содарных измерений на Звенигородской научной станции (ЗНС) и в экспедиционных условиях в 2007–2016 гг.

На *рис. 1-4* показаны примеры изображений ВКГ в координатах горизонтальная протяженность-высота, полученных с помощью сканирующего доплеровского лидара [47] и сканирующего импульсного радара высокого разрешения [48]. Пространственная структура в виде "валов" хорошо видна в поле радиальной скорости ветра в слое приземной инверсии (*рис. 1-4а*); "кошачьи глаза" наблюдались в поле вертикального сдвига горизонтальной скорости ветра в приподнятом инверсионном слое (*рис. 1-4б*). Такие пространственные изображения позволяют оценить размеры цугов ВКГ и длину волны, не прибегая к гипотезе "замороженной турбулентности" Тейлора.

В последнее десятилетие большое внимание уделяется вопросам взаимодействия волн в АПС с турбулентностью [49–53]. Это связано, прежде всего, с развитием крупномасштабного регионального моделирования АПС, которое нужда-

ются в адекватной параметризации обменных процессов при устойчивой стратификации [54].

В настоящей статье описаны применявшиеся авторами в 2013–2016 гг. методы экспериментальных исследований НСТ, обнаружения ВГВ, определения их типа и условий их возникновения, количественного определения параметров волн, а также их воздействия на мелко- и мезомасштабные флуктуации параметров АПС. Главное внимание уделено гравитационно-сдвиговым волнам типа волн Кельвина-Гельмгольца, которые преобладают над другими типами волн в условиях ночных инверсий над однородной, либо слабо-неоднородной равнинной поверхностью средних широт. Основным средством исследования НСТ и ВГВ служили наземные акустические доплеровские локаторы (содары). Натурные измерения проводились в Московском регионе, на Цимлянской научной станции, расположенной в однородной степной местности, над снежной поверхностью Антарктики, в аридных областях Калмыкии, над водной поверхностью в прибрежной зоне Черного моря. Была исследована повторяемость гравитационно-сдвиговых волн, условия их формирования в приземных и приподнятых инверсионных слоях, а также их характерные амплитуды, периоды, длины волн, скорости перемещения и время жизни. Исследована связь интенсивности мелкомасштабных флуктуаций параметров АПС и потоков, измеряемых конвенциональными методами, с волновой активностью.

## **2. Методы регистрации и аппаратура**

### *Акустическое зондирование*

В качестве основного инструмента в наших исследованиях использовались доплеровские акустические моностатические локаторы (содары), действие которых основано на рассеянии звука мелко-масштабными температурными неоднородностями [55, 46, 56–58]. Содары позволяют проводить непрерывные измерения вертикальных профилей структурной характеристики температуры  $Cr^2$ , а также скорости и направления ветра с высоким пространственным и временным разрешением. При исследовании волновой активности главным достоинством содаров (как и других локационных средств зондирования) является их способность визуализировать мезо-масштабную структуру АПС, что позволяет по форме эхограмм отличать волны Кельвина-Гельмгольца от бегущих волн плавучести, а также определять высоту расположения волновых слоев и их вертикальную протяженность. Микробарометрические методы регистрации волн не дают таких возможностей.

Вследствие сильного поглощения слышимого звука в воздухе, содары обладают небольшим высотным диапазоном зондирования (от 10–20 м до 150–800 м над подстилающей поверхностью) и не могут измерять скорость ветра во всем пограничном слое, который при неустойчивой стратификации простирается до высоты 1.5–2.0 км. Однако, в инверсионных условиях (при которых толщина слоя перемешивания не превышает нескольких сот метров) хорошее пространственное разрешение и малая «мертвая зона» содаров дают акустическому зондированию преимущества перед другими средствами наземного дистанционного зондирования АПС [22, 59]. Кроме того, содары значительно проще и экономически доступнее, чем радары ясного неба и доплеровские лидары. Поэтому при иссле-

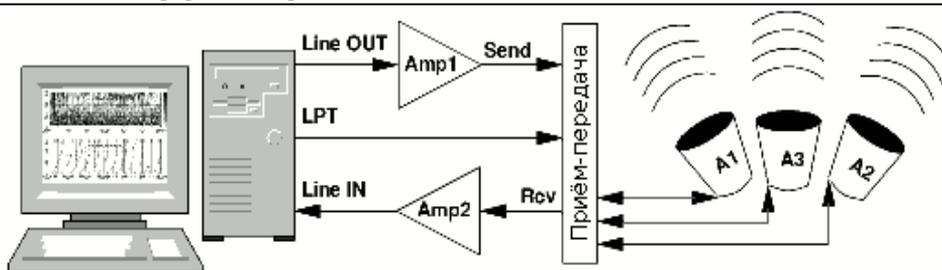


Рис. 2-1. Блок-схема трехкомпонентного моностатического содара ИФА им. А.М. Обухова на базе компьютерных технологий [60]

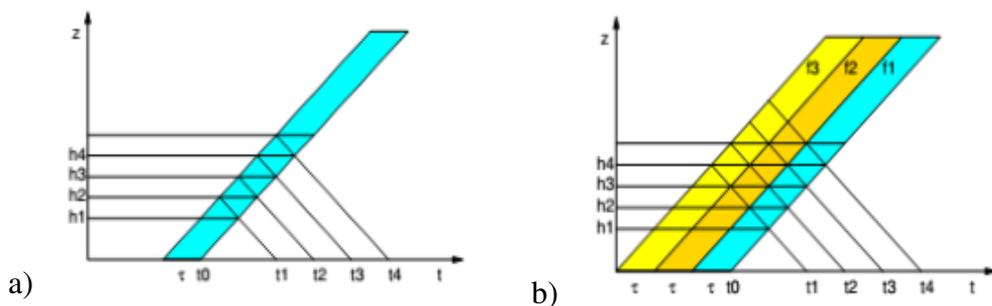
довании низкоуровневых струйных течений и волн в АПС содары являются наиболее адекватным средством дистанционных измерений.

Упрощенная блок-схема трехкомпонентного содара, использующего программные ресурсы компьютера, изображена на *рис. 2-1*. Генерируемый звуковой картой компьютера акустический импульс усиливается и направляется через переключательное устройство на реверсивный электроакустический преобразователь. Через определенное время преобразователь переключается в режим приема и передает эхо-сигнал через усилитель на устройство обработки вывода [60].

В измерениях 2007–2016 гг. наряду с одночастотными содарами использовались многочастотные содары с частотно-кодированным импульсом, имеющие лучшее разрешение. Цикл зондирования содара в координатах высота-время представлен на *рис. 2-2*. При одночастотном зондировании (*рис. 2-2a*) антенна излучает зондирующий сигнал частоты  $f$  в течение интервала  $\tau$ . Сигнал распространяется вверх со скоростью звука  $c$  и небольшая часть его рассеивается в атмосфере в обратном направлении. Прием сигнала возможен только через некоторое время после излучения импульса из-за переходных процессов в антенне. После этого, в момент времени  $t_1$  принимается сигнал, рассеянный в высотном диапазоне  $h_1$  (высота от  $ct_1/2$  до  $c(t_1+\tau)/2$ ), в момент  $t_2$  – в диапазоне  $h_2$  и т.д. Вертикальное разрешение содара определяется пространственной протяженностью импульса  $c\tau/2$ .

Содар с частотным кодированием излучает последовательно  $n$  (например,  $n = 3$ ) зондирующих импульсов длительностью  $\tau$  на дискретно возрастающих частотах, и эхо-сигнал принимается на этих частотах одновременно (*рис. 2-2b*). Такой режим увеличивает время зондирующего цикла на  $(n-1)\tau$  по сравнению с одночастотным режимом, однако дает возможность получить  $n$  независимых эхо-сигналов с более высоких уровней, где сигнал слабее. В любой момент времени принятый сигнал приходит со всех высот, через которые проходит цуг импульсов. Поскольку запись эхо-сигнала начинается непосредственно после излучения последнего импульса, то с нижних высот можно принять эхо-сигнал только от импульсов, излучаемых последними. В момент времени  $t_1$  антенна принимает эхо-сигнал с высотных диапазонов  $h_1, h_2, h_3$  на частотах  $f_1, f_2, f_3$  соответственно. В момент  $t_2$  – с высот  $h_2, h_3, h_4$  и так далее. Таким образом, принимается один отраженный сигнал с диапазона  $h_1$ , два с  $h_2$  и все три с более высоких диапазонов.

Для формирования звукового луча в содарах ИФА используются параболические отражающие антенны, и угол наклона луча задается направлением оси антенны, а ширина луча зависит от частоты. Для параболических антенн зависи-



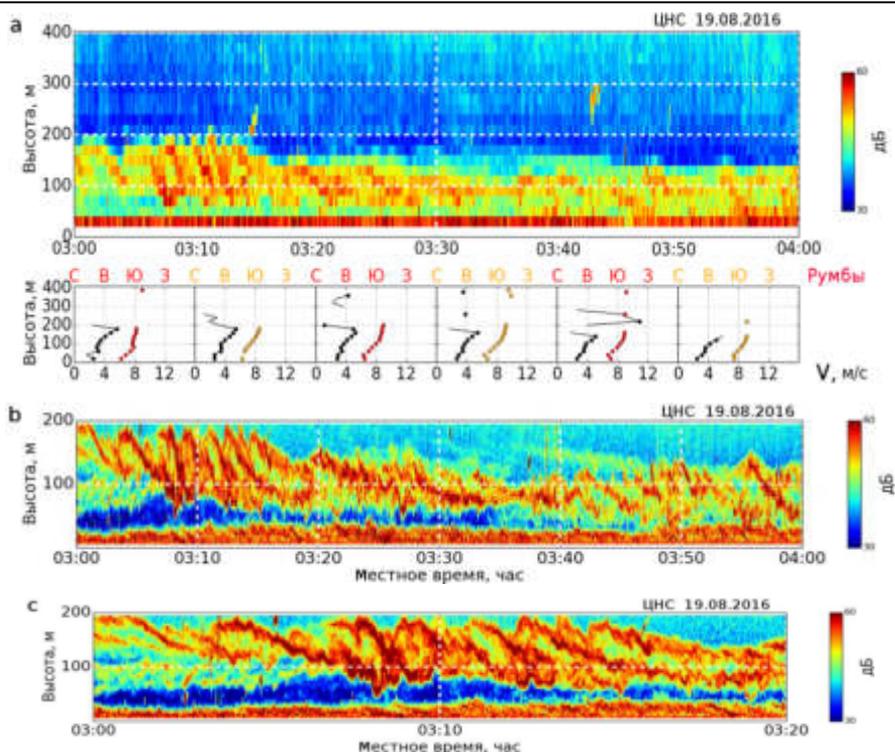
**Рис. 2-2.** Схема излучения звукового импульса длительностью  $\tau$  и приема эхо-сигнала. **а)** – одночастотное зондирование; **б)** – частотно-кодированное зондирование [61]



**Рис. 2-3.** Антенны содара и минисодара в шумозащитных экранах в процессе сборки в песках Калмыкии. 2016 г.

мость величины зондируемого объема от частоты является эффектом второго порядка. Поэтому при малых  $\tau$  ( $\sim 0.1$  с) по сравнению с характерными временами для зондируемого объема, принятые эхо-сигналы из одного высотного диапазона можно считать независимыми измерениями для одного и того же объема в один момент времени. Более того, использование в зондирующем сигнале набора частот позволяет выделить эхо-сигнал из фонового шума. При использовании параболических антенн для компонент многочастотного эхо-сигнала применяется процедура некогерентного спектрального интегрирования.

Для определения профиля ветра зондирование производят в трех различных направлениях, и по трем радиальным компонентам ветра восстанавливают профили скорости и направления горизонтального ветра, а также вертикальной компоненты ветра. Наибольшая точность измерений скорости ветра достигается, когда одна антенна направлена в зенит, а две других наклонены на угол 20–30 градусов от зенита с азимутами, различающимися на 90 градусов. На *рис. 2-3* приведена фотография антенн содара и минисодара в шумозащитных экранах.



**Рис. 2-4.** Цуг волн Кельвина-Гельмгольца на синхронных эхограммах содара со стандартным разрешением (панель **a**) и минисодара (панель **b**). В нижней части панели **a** приведены профили скорости и направления ветра, осредненные за 10 мин. На панели **c** приведен фрагмент эхограммы **b** с растянутой шкалой времени, что позволяет лучше визуализировать внутреннюю структуру волновых образований

В измерениях использовались различные модификации содаров ЛАТАН-3 и ЛАТАН-3М (многочастотный), разработанные в Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН [60, 61]. В базовом режиме работы трёхкомпонентный содар использует диапазон несущей частоты 1.6–2.0 кГц (длины волн 0.20–0.16 м), и имеет высотное разрешение 20 м, разрешение по времени 15 с и высотный диапазон от 30 м до 650 м. Этот содар позволяет регистрировать волновые структуры с амплитудами более 100 м и периодами более 5 минут. Минисодар работает на несущих частотах от 3.5 до 5.0 кГц (длины волн 0.09–0.07 м), имеет высотное разрешение 5–10 м, разрешение по времени 2–5 с и высотный диапазон от 10 до 250 м. Такое относительно небольшое улучшающей способности измерительной аппаратуры приводит к более чем десятикратному увеличению количества зарегистрированных эпизодов волновой активности. На *рис. 2-4* приведен пример синхронной регистрации волн на эхограммах содара и минисодара. Волны, практически не различимые на эхограмме содара (*рис. 2-4a*), четко визуализируются на эхограмме минисодара (*рис. 2-4b* и *c*).



**Рис. 2-5.** Сопутствующие измерения. (а) Микроволновый радиометр МТП-5 и погодный датчик Vaisala WXT530 на крыше экспедиционного кунга. ЦНС, 2016 г. (б) Погодная станция Davis Vantage Pro. Черноморское побережье, 2016 г.

### *Сопутствующие измерения*

Определение степени термической устойчивости инверсионного слоя проводилось по дистанционным измерениям профилей температуры с помощью сканирующего микроволнового радиометра МТП-5, разработанного НПО “АТТЕХ”. Прибор МТП-5, измеряющий собственное излучение кислорода на частоте 60 ГГц, обеспечивает определение профилей температуры до 600 м с вертикальным разрешением 50 м и временным разрешением 5 мин. Точность измерений температуры составляет  $0.5^{\circ}\text{K}$ . Одновременные измерения приборами ЛАТАН-3 и МТП-5, синхронизированные по сигналам GPS, позволяли подробно проследивать эволюцию профилей скорости ветра при формировании и распаде радиационных инверсий. Это помогает не только фиксировать наличие струйного течения и определять максимальную скорость в струе и высоту оси струи, но и исследовать физические механизмы образования струйного течения. Фотография МТП-5 в экспедиционных условиях приведена на *рис. 2-5(а)*.

Сопутствующие метеорологические и микропульсационные измерения с помощью трехкомпонентных ультразвуковых анемометров-термометров Metek и Gill на мачте использовались для независимого контроля температуры и скорости ветра в нижней части инверсионного слоя, а также для определения статистических параметров турбулентности и характеристик устойчивости. Анемометры позволяют измерять скорость воздушного потока с разрешением до  $0.01 \text{ мс}^{-1}$ . В измерениях использовалась частота отсчетов 10 Гц. В экспедиционных условиях также осуществлялись измерения метеорологических параметров с помощью автоматических погодных станций Vaisala WXT530 и Davis Vantage Pro (*рис. 2-5б*).

### *Места измерений*

Измерения исследуемых величин регулярно проводились на стационарных пунктах дистанционного зондирования в г. Москве и на ЗНС ИФА РАН в Московской области, а также в режиме экспедиционных работ на Цимлянской научной станции (ЦНС ИФА РАН) и в составе комплексных экспедиций ИФА РАН в других регионах.

Многолетние данные получены на базе экспериментальной мезомасштабной сети мониторинга атмосферного пограничного слоя в Московском регионе, со-



**Рис. 2-6.** Содарные измерения в экспедиционных условиях. Слева – мини содар в степи на ЦНС (вверху) и на океанологической платформе (внизу) летом 2015 г. Справа – содар на береговом склоне на Черноморском гидрофизическом полигоне, пос. Кацивели, осенью 2016 г.

стоящей из трёх стационарных пунктов наземного дистанционного зондирования АПС. Основное оборудование пунктов составляют идентичные доплеровские содары Латан-3. На пунктах синхронно проводятся непрерывные круглосуточные измерения вертикальных профилей средней скорости ветра и её флуктуаций, а также профилей структурной характеристики температуры. Управление режимом измерений, контроль работы аппаратуры и передача первичных данных измерений проводится через Интернет.

Данные о структуре атмосферного пограничного слоя при долговременных инверсиях над снежной и ледовой поверхностью, сопровождаемых низкоуровневыми струйным течениями и кататическими ветрами, были получены в ходе двух антарктических экспедиций: на французско-итальянской станции «Конкордия» на Куполе Си, и на финской станции «Абоа» на слабо-наклонной однородной поверхности ледника.

В серии экспедиционных экспериментов ИФА РАН были проведены исследования поля ветра, структуры турбулентности и волновых процессов над различными типами местности:

над однородной степной поверхностью – на Цимлянской научной станции ИФА в 2012, 2015 и 2016 в летний период в ходе непрерывных измерений длительностью от двух до четырех недель;

над однородной песчаной поверхностью в аридной зоне – на песчаных дюнах вблизи пос. Нарын-Худук, Калмыкия, в 2016 году в летний период ходе десятидневного круглосуточного мониторинга параметров АПС;

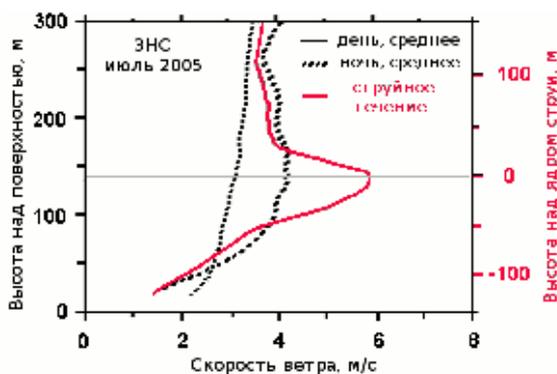
над морем в прибрежной зоне и на береговых склонах – на Черноморском гидрофизическом полигоне РАН с использованием стационарной океанологической платформы летом 2015 и осенью 2016 года в ходе десятидневных круглосуточных измерений.

Фотографии содаров в процессе экспедиционных измерений представлены на рис. 2-6.

### 3. Низкоуровневые струйные течения

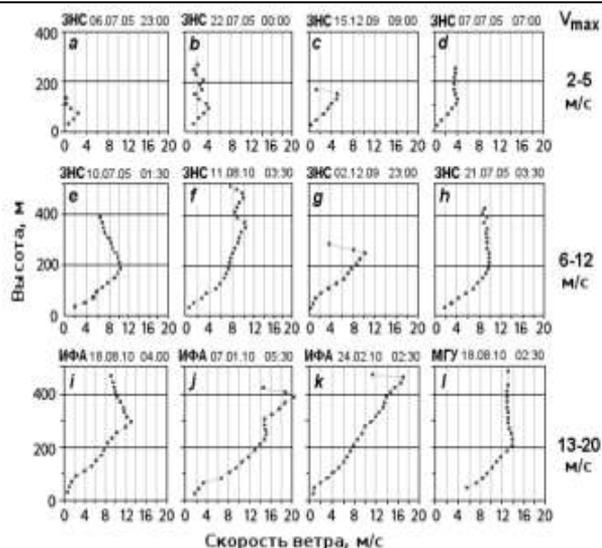
К настоящему времени экспериментальные исследования низкоуровневых струйных течений (НСТ) представлены в нескольких сотнях публикаций. Однако, в литературе нет единой чёткой дефиниции НСТ, поскольку такие течения могут порождаться различными явлениями (морскими бризами, горно-долинной циркуляцией, синоптической бароклинностью, атмосферными фронтами) и, соответственно, иметь различный режим существования и сильно различающиеся характеристики. Отдельный класс образуют НСТ, которые регулярно наблюдаются в АПС при температурных инверсиях над однородной и слабо-неоднородной подстилающей поверхностью вне связи с вышперечисленными явлениями. В основном, именно такие струйные течения рассматриваются в данной работе.

В осреднённых профилях скорости ветра в ABL, которые обычно используются в климатологии различных регионов, струйные течения, как правило, не проявляются. Причиной этого является изменчивость формы НСТ и его параметров. Максимальная скорость и высота ядра струи меняются и в течение суток, и от дня ко дню; при этом иногда изменчивость профилей удаётся объяснить изменениями внешних условий (уровня солнечной радиации, скорости геострофического ветра и т.п.), но часто эта изменчивость является случайной. Поэтому профили, осреднённые за месяц, либо сезон, являются монотонными. Однако, если относить все индивидуальные ночные профили к высоте не над подстилающей поверхностью, а над местоположением ядра струи, то струйное течение чётко проявляется в осреднённом профиле. Пример осреднённых за один летний месяц профилей скорости ветра на рис. 3-1 иллюстрирует это утверждение.



**Рис. 3-1.** Пример летних среднемесячных профилей скорости ветра для дня и ночи при обычном осреднении, и при осреднении профилей ночных НСТ, приведённых к высоте ядра струи. Нулевая высота приведённого профиля (по правой шкале) совмещена со средней за месяц высотой ядра НСТ

Основные цели наших содарных исследований НСТ заключались в проверке предсказываемых физической теорией Блакадара [7] закономерностей формирова-



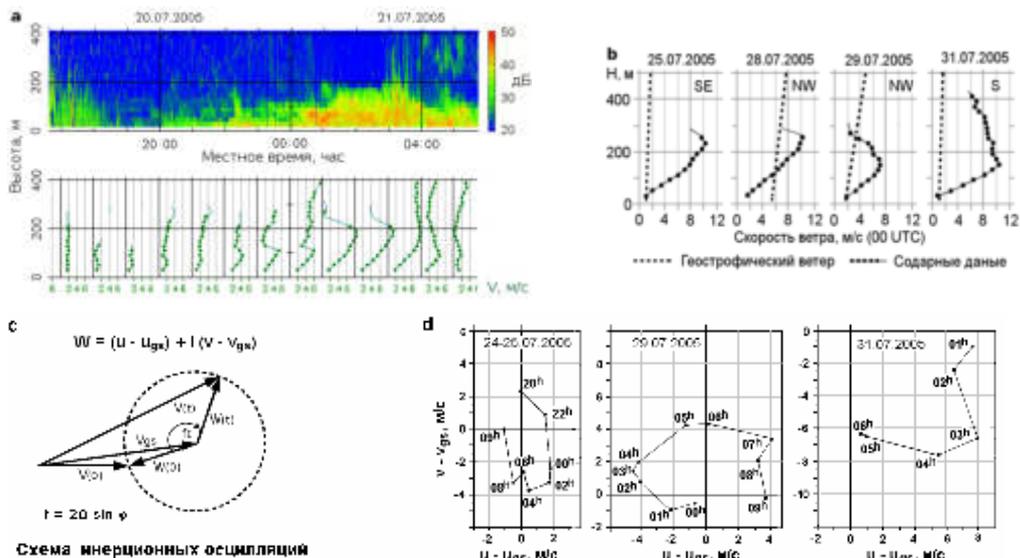
**Рис. 3-2.** Типичные примеры осреднённых за 30 мин профилей скорости ветра в низкоуровневых струйных течениях, наблюдавшихся в сельской местности на ЗНС, а также в центре (ИФА) и на юго-западе (МГУ) Москвы

ния супергеострофических ночных течений, в сравнении характеристик струйных течений, одновременно регистрируемых над городом и над прилегающей сельской местностью, и выявлении сезонных отличий влияния мегаполиса на НСТ, а также в получении климатологических данных о распределениях средних параметров НСТ в сельской местности и на территории крупного мегаполиса.

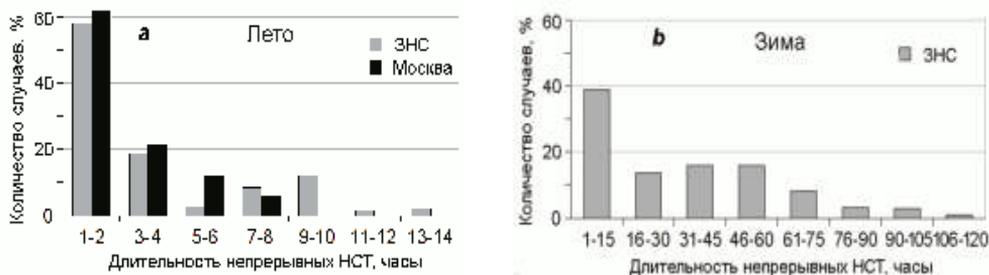
На *рис. 3-2* показано разнообразие профилей скорости ветра в струйных течениях, наблюдавшихся нами в Московском регионе.

### *Формирование ночных струйных течений*

Процесс формирования ночных НСТ изучался на примере летних измерений на ЗНС. Связь между затуханием интенсивности турбулентного перемешивания во время смены дневной неустойчивой стратификации АПС на устойчивую, и образованием ночного струйного течения хорошо видна при сопоставлении соударных эхограмм с профилями скорости ветра. Пример такого сопоставления показан на *рис. 3-3а*. Подобная картина наблюдалась на ЗНС практически каждую летнюю ночь. Промежуток времени между затуханием турбулентности и появлением максимума в профиле скорости ветра составлял около двух часов, хотя иногда наблюдались промежутки в 1 час, либо в 3 часа. Лишь в 20% случаев максимальная скорость в ядре струи  $V_{max}$  достигала 10 м/с. В этих случаях  $V_{max}$  превышала скорость геострофического ветра (*рис. 3-3б*). На *рис. 3-3с* показана схема инерционных осцилляций скорости ветра [7], а на *рис. 3-3д* приведены годографы измеренной соударом скорости, которые согласуются с этой схемой. В целом, наши данные подтверждают утверждение [31], что инерционные осцилляции редко наблюдаются в чистом виде, потому что обычно они маскируются другими явлениями (например, влиянием бароклинности).



**Рис. 3-3.** Формирование ночного НСТ за счет инерционных осцилляций скорости ветра после затухания турбулентного трения. **а** – содарная эхограмма (верх), показывающая затухание турбулентности в вечерний переходный период (в 19:00), и развитие струйного течения в слое приземной инверсии (низ). **б** – сопоставление измеренных профилей скорости ветра с геострофическим ветром. **с** – схема образования супер-геострофической скорости ветра под влиянием силы Кориолиса. **д** – примеры экспериментальных годографов скорости ветра в ядре струи



**Рис. 3-4.** Распределение длительности НСТ: (а) в июле 2005 г., (б) в декабре 2009 и в январе 2010 г.

### Продолжительность существования низкоуровневых струйных течений

Время жизни струйных течений в средних широтах сильно зависит от сезона. На *рис. 3-4* представлено сопоставление гистограмм повторяемости летних и зимних струйных течений, которые так же тесно связаны с инверсиями, как и летние ночные НСТ. Если летом максимальная продолжительность струйного течения составляла ~ 13 часов, то в морозную зиму 2009–2010 годов на ЗНС нами были зарегистрированы непрерывные НСТ длительностью более 4-х суток. В городе максимальная продолжительность НСТ в летнее время заметно меньше, чем за городом. Длительность городских зимних течений не показана на *рис. 3-4*, по-

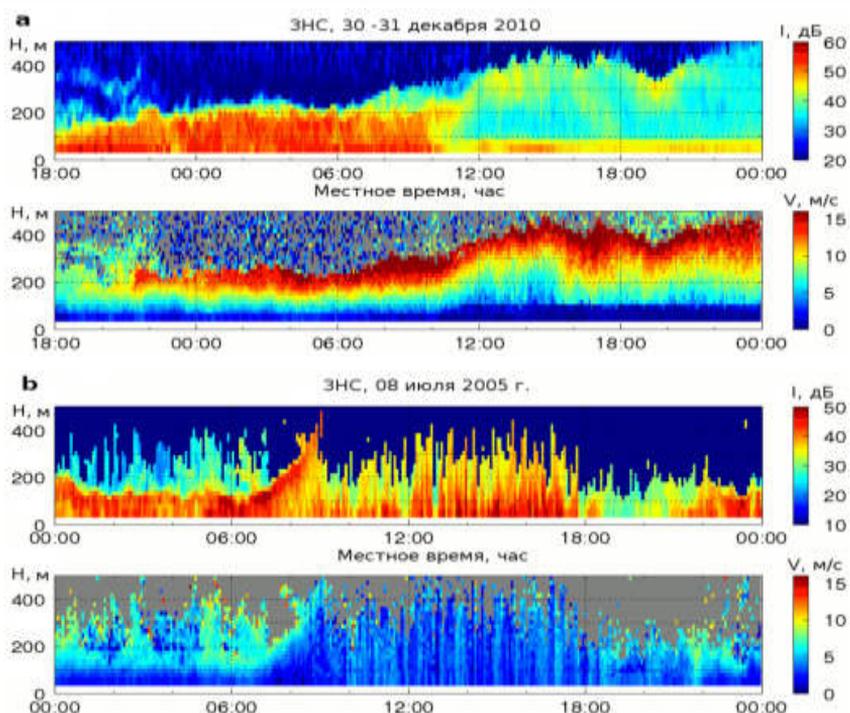


Рис. 3-5. Сопоставление содарной эхограммы и ветровой диаграммы при долгоживущей зимней инверсии (а) с аналогичным графиком для лета (б)

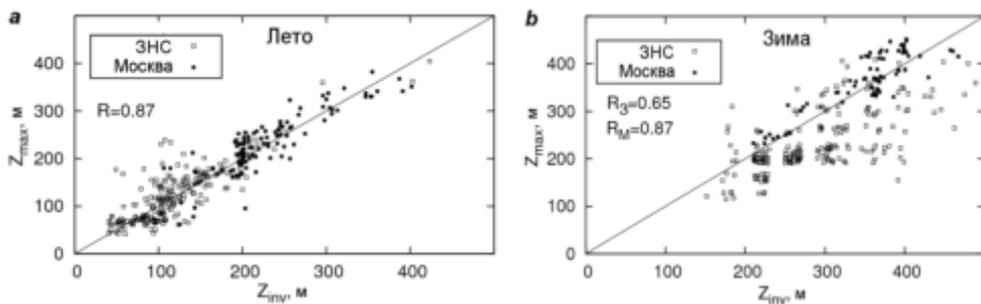
скольку из-за влияния городского "острова тепла", подавляющего инверсии, она всегда была существенно меньше ширины первого столбика на гистограмме.

Приведённый на рис. 3-5а пример содарной эхограммы и диаграммы скорости ветра дает наглядное представление о временной изменчивости мезомасштабной структуры долгоживущей зимней инверсии, которая сохраняется круглые сутки. Высота инверсии меняется в течение суток, интенсивность турбулентного перемешивания также меняется, но оно не затухает полностью, и струйное течение сохраняется. На рис. 3-5б для сравнения показан аналогичный график для лета, где чётко видна суточная смена типа стратификации и затухание турбулентности в вечернее время.

#### *Связь высоты ядра струйного течения с высотой инверсии*

Хорошее согласие между высотой ядра летних ночных НСТ  $Z_{max}$ , и высотой инверсии  $Z_{inv}$ , видно на рис. 3-6а. Отметим, что согласованность этих высот соблюдается для ночных НСТ не только в сельской местности, но и в городских условиях. При исследовании связи характеристик НСТ с температурными инверсиями мы, следуя работе [62], определяли высоту расположения верхней границы инверсии по профилю интенсивности содарного эхо-сигнала, которая пропорциональна структурному параметру температуры.

Вопрос о связи  $Z_{max}$  и  $Z_{inv}$  долгие годы дискутируется в литературе. Проводилось много экспериментальных исследований, которые дают большой разброс за-



**Рис. 3-6.** Сравнение высоты оси струйного течения с высотой верхней границы инверсии над сельской и городской местностью. **а** – июль 2005 г.; **б** – январь 2009 г.

висимостей и приводят к противоречивым выводам (см., например, [23, 63]). Возможно, это вызвано большой неопределённостью обычно применяемой идентификации высоты инверсии по экспериментальному профилю потенциальной температуры, а также пространственным разносом ветровых и температурных измерений. Использование содарных данных, как показывают наши результаты, более перспективно для этих целей. Отметим, что преимущества использования содарных данных перед другими способами определения высоты инверсии указывались ранее в работах [64, 65].

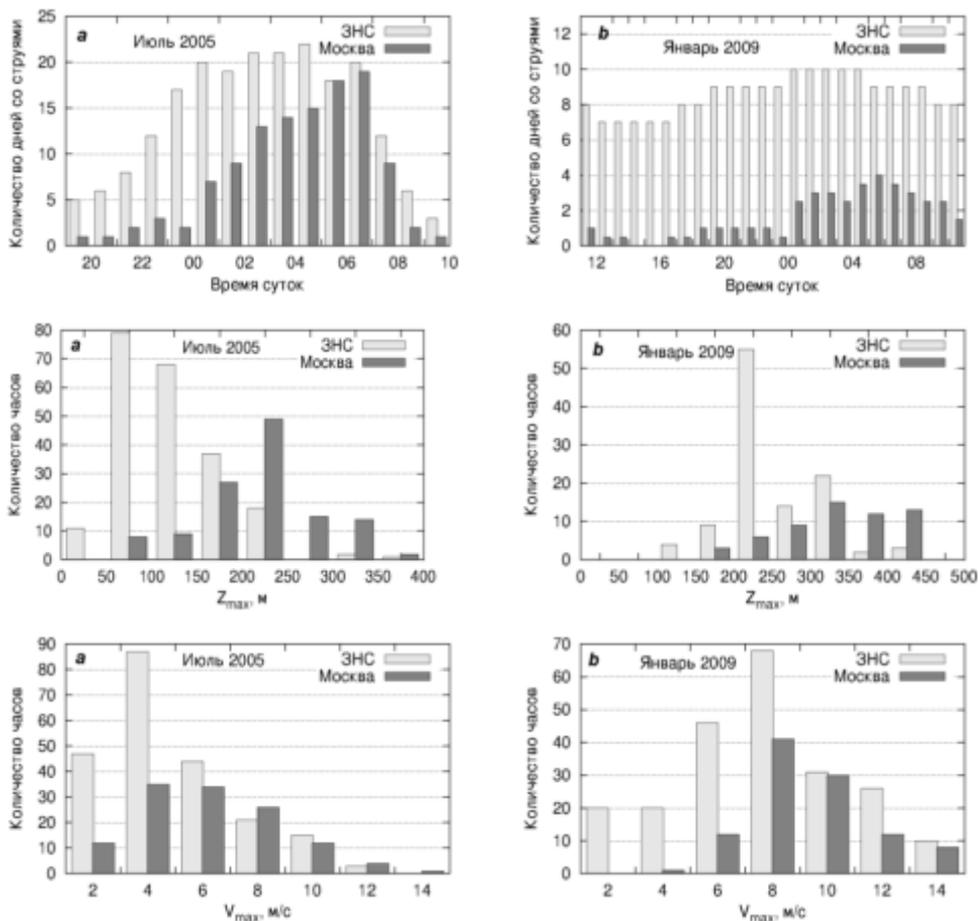
На *рис. 3-6b* приведено сопоставление высот высот оси зимних струйных течений и верхней границы инверсионных слоёв над сельской и городской местностью. Рассеяние точек на этом графике несколько больше, чем для летнего месяца (*рис. 3-6a*), причём коэффициент корреляции  $R_{ЗНС}$  для сельской местности оказался ниже, чем  $R_{Мос}$  для города. Однако, в целом, для долгоживущих зимних НСТ, так же как и для ночных летних НСТ, наблюдается связь высоты ядра струйного течения с высотой инверсии.

#### *Климатологические данные о низкоуровневых струйных течениях*

На *рис. 3-7* приведены некоторые статистические данные о средних параметрах НСТ в центре Москвы и в прилегающей сельской местности для одного летнего и одного зимнего месяцев.

В верхнем ряду представлены гистограммы суточного распределения количества дней с НСТ. В летнее время количество струйных течений в сельской местности равномерно распределено по тёмному времени суток, тогда как в городе такие течения чаще возникают в предрассветные часы. Зимой за городом НСТ наблюдаются круглосуточно. В центре города зимние НСТ наблюдаются относительно редко из-за городского "острова тепла", под влиянием которого резко уменьшается количество инверсий. В среднем и нижнем рядах *рис. 3-7* показаны распределения высоты струйного течения и максимальной скорости, соответственно.

В целом, над городом НСТ появляются реже, возникают, в основном, во второй половине ночи, длятся короче, расположены выше и имеют большую скорость, чем в сельской местности.

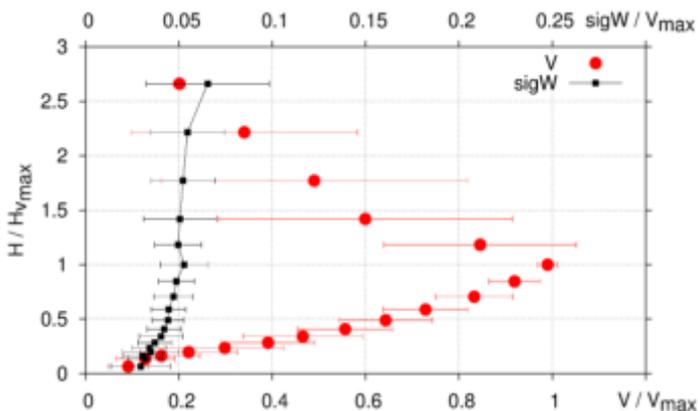


**Рис. 3-7.** Статистика НСТ над городской и сельской местностью в летнее и зимнее время. Верх: распределение количества НСТ по времени суток. Середина: распределение высоты ядра струи. Низ: распределение скорости ветра в ядре струи. Левая колонка относится к летнему времени, правая – к зимнему

*Профили дисперсии вертикальной компоненты скорости ветра  
внутри струйных течений*

Опубликованные разными авторами экспериментальные данные о профилях дисперсий компонент скорости ветра внутри НСТ противоречивы. Так, лидарные данные [66] показали примеры локального минимума дисперсии горизонтальной скорости ветра  $\sigma_u^2$  в окрестности ядра струи, причём величина дисперсии уменьшалась в 5–10 раз по сравнению с её значением на более низких высотах. Содарные измерения [19, 67, 68] не показывали минимума дисперсии, а в работе [69] отмечался даже максимум  $\sigma_w^2$  и  $\sigma_u^2$  в ядре струи. Поэтому мы дополнительно исследовали этот вопрос.

На рис. 3-8 приведены композитные нормализованные профили горизонтальной скорости ветра  $V$  и стандартного отклонения вертикальной скорости  $\sigma_w$ . Для



**Рис. 3-8.** Композитные нормализованные профили горизонтальной скорости ветра  $V$  и стандартного отклонения вертикальной скорости  $\sigma_w$ : среднее из 132-х профилей, зарегистрированных в струйных течениях за 8 ночей в июле–августе 2011 г. на ЗНС. Время осреднения каждого профиля – 30 минут. Высота нормирована на высоту ядра НСТ, скорости и стандартные отклонения нормированы на скорость в ядре струи

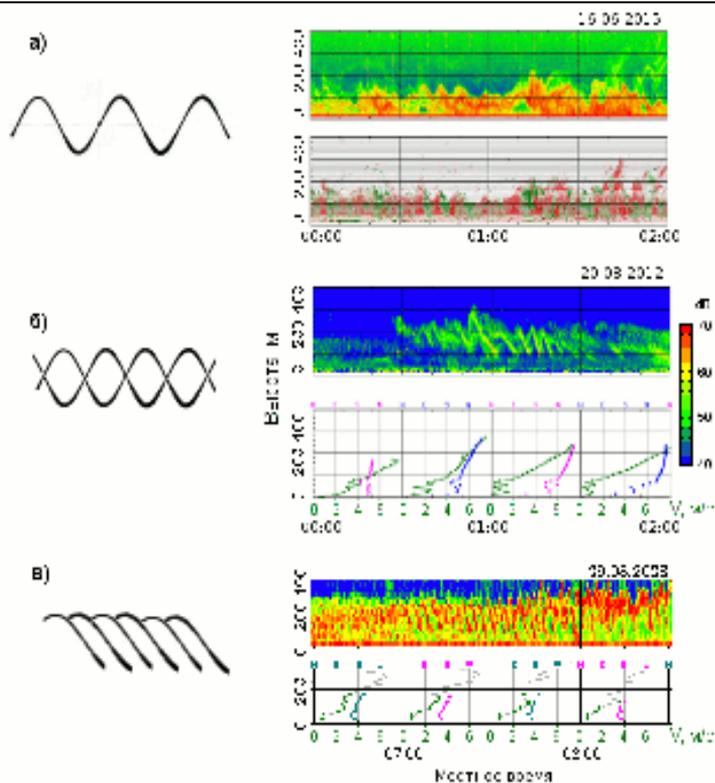
построения графика использовано 132 получасовых профилей, зарегистрированных в струйных течениях за 8 ночей в июле–августе 2011 г. на ЗНС. Композитные профили показывают слабую высотную изменчивость величины  $\sigma_w$  в пределах струйного течения, которая составляет около 5% от максимальной скорости ветра в ядре струи. Более поздние лидарные данные [70] подтвердили наши результаты.

### 3. Внутренние гравитационные волны в равнинной местности средних широт

#### *Классификация внутренних гравитационных волн в устойчиво стратифицированном АПС*

Средства наземного дистанционного зондирования дают ценную информацию о волновой активности в атмосфере, обеспечивая наглядную двумерную картину мезомасштабных волновых структур в поле показателя преломления воздуха, либо в поле скорости ветра. В условиях устойчивой стратификации АПС на содарных эхограммах интенсивности принятого сигнала регулярно наблюдались периодические и квазипериодические структуры, с временными периодами от десятков секунд до нескольких минут и с вертикальными масштабами от десятков до сотен метров. Структуры отличаются широким разнообразием форм и условий возникновения. Из всего многообразия можно выделить несколько основных типов поперечных внутренних волн, которые достаточно регулярно идентифицируются на содарных эхограммах:

1) внутренние гравитационные волны (ВГВ) типа волн плавучести (ВП) наблюдаются в форме синусоидальных колебаний высоты инверсионных слоёв, а также в поле вертикальной скорости. Скорость и направление распространения ВП отличается от скорости ветра в слое. Источником ВП может являться бароклинность тропосферы или орографическое препятствие на пути воздушного



**Рис. 4-1.** Типы волновых структур, регистрируемых содаром. Слева – схематическое изображение структуры на эхограмме, справа – примеры содарных данных. **а)** ВГВ типа волн плавучести; на нижней панели – поле вертикальной скорости. Черноморский гидрофизический полигон РАН, 2015 г. **б)** обрушающиеся ВКГ в форме "кошачьих глаз"; на нижней панели профили скорости и направления ветра. ЦНС, 2012 г. **в)** ВКГ в виде "наклонных полос". ЗНС, 2008 г.

потока. В равнинной местности средних широт ВП на эхограммах содаров наблюдаются редко, порядка десяти эпизодов за год, обычно при прохождении грозных фронтов (рис. 4-1(а));

2) обрушающиеся волны типа волн Кельвина-Гельмгольца (ВКГ) наблюдаются в виде непродолжительных цугов формы «кошачьи глаза», сопровождающихся интенсивным перемешиванием волнового слоя, увеличением вертикальных потоков тепла и массы, и интенсивности турбулентности. Обязательным условием их возникновения является наличие сдвиговой неустойчивости в слое. Волны такого типа в равнинной местности регистрируются чрезвычайно редко, не более нескольких эпизодов в течение года (рис. 4-1(б));

3) внутренние гравитационно-сдвиговые волны типа ВКГ в форме наклонных полос в поле  $C_T^2$ , занимающих весь турбулизованный слой инверсии, наблюдаются регулярно при наличии сдвига ветра. Цуги ВКГ распространяются со скоростью потока и могут существовать от десятков минут до нескольких дней. В равнинной местности такие структуры наблюдаются в 80% случаев наличия приземной или приподнятой инверсии (рис. 4-1(в)).

Широкая распространенность ВКГ в статически устойчивом АПС является значимой предпосылкой к исследованию их морфологии и климатологии, а также оценке реального влияния ВКГ на турбулентный обмен, которое часто постулируется как значительное.

*Статистика волн Кельвина-Гельмгольца в форме наклонных полос*

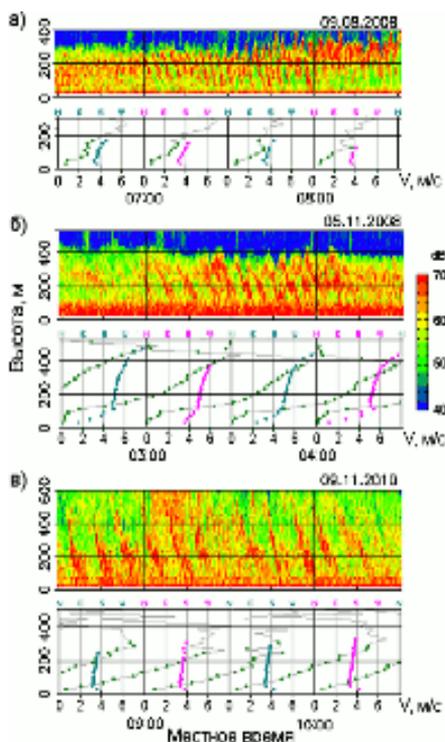
Непрерывные многолетние содарные измерения параметров атмосферного пограничного слоя, проведенные в ИФА им. А.М. Обухова РАН, позволили составить обширный каталог случаев возникновения внутренних гравитационно-сдвиговых волн в атмосферном пограничном слое. В нижеприведенных статистических данных использованы архивные данные измерений, выполненных в течение 3-х лет, с 2009 г. по 2011 г. [71]. При анализе содарных данных эпизоды ВКГ выделялись на эхограммах визуально, независимо двумя операторами, с использованием следующих критериев:

1. Форма структур соответствует схематической на *рис. 4-1(в)*.
2. Минимальный период волнообразных структур превышает период посылок зондирующих импульсов (т.е., временное разрешение содара) не менее, чем в 12 раз ( $> 3$  минут).
3. Толщина слоя волновой активности (т.е. двойная амплитуда волны) превышает высотное разрешение содара не менее чем в 3 раза ( $> 60$  м).
4. Глубина модуляции фонового уровня эхосигнала волновой структурой превышает 5 дБ.
5. Цуг волнообразных структур содержит не менее 3-х периодов волны.

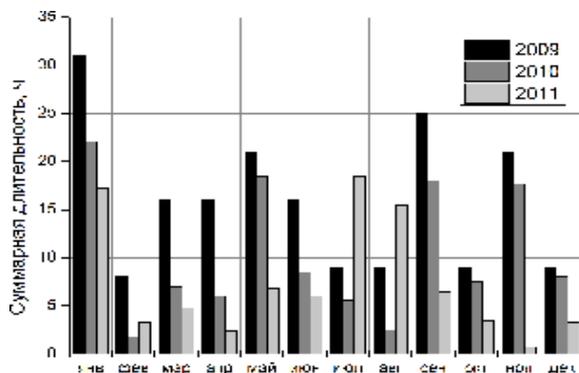
Идентификация структур с меньшими периодами, длительностью, амплитудой и глубиной модуляции является ненадежной из-за ограниченного временного и пространственного разрешения содара. ЛАТАН-3 допускает перестройку параметров излучения (несущая частота, длительность и период повторения зондирующих импульсов, чувствительность и т. п.) в широких пределах, однако эти параметры были зафиксированы на указанных выше значениях, исходя из многофункциональности режима мониторинга АПС на ЗНС. Критерии 1) – 5) ограничивают количество ВКГ, и более мелкие и короткие волны не вошли в статистику. На *рис. 4-2* представлены примеры регистрации ВКГ с различной амплитудой и различным периодом наклонных полос на содарных эхограммах в координатах высота – текущее время.

В выбранных примерах эхограмм на *рис. 4-2* структура ВКГ ясно видна, т. к. модуляция интенсивности эхосигнала "полосами" достигает 15–20 дБ. Кроме таких структур, было обнаружено много менее четких ВКГ, в которых глубина модуляции составляла лишь 5–10 дБ. В статистике не проводится разделения случаев по глубине модуляции, так как такое разделение не приводило к заметным изменениям в статистических распределениях параметров волн. За 3 года круглосуточных измерений было отобрано 234 случая ВКГ с длительность цугов волн от 15 мин до нескольких часов, соответствующих указанным критериям. Общая длительность эпизодов составила порядка 400 часов.

На *рис. 4-3* приведено распределение суммарной длительности идентифицированных ВКГ по месяцам. Наибольшее количество ВКГ наблюдалось в январе и сентябре, а наименьшее – в феврале, октябре и декабре. Однако, межгодовая из-



**Рис. 4-2.** Визуализация ВКГ содаром ЛАТАН-3, ЗНС ИФА. Под эхограммами представлены осреднённые за 30 мин профили модуля горизонтальной скорости (точки, соединённые линиями) и направления ветра в румбах (точки без линий). Значения скорости ветра с малой статистической обеспеченностью изображены линиями без точек



**Рис. 4-3.** Распределение по месяцам суммарной длительности (в часах) регистрации гравитационно-сдвиговых волн на содарных эхограммах, полученных на ЗНС в 2009–2011 годах

менчивость количества превышает межсезонную изменчивость, поэтому представленное распределение не позволяет сделать определённого заключения о годовом ходе повторяемости ВКГ на ЗНС. По-видимому, их возникновение не свя-

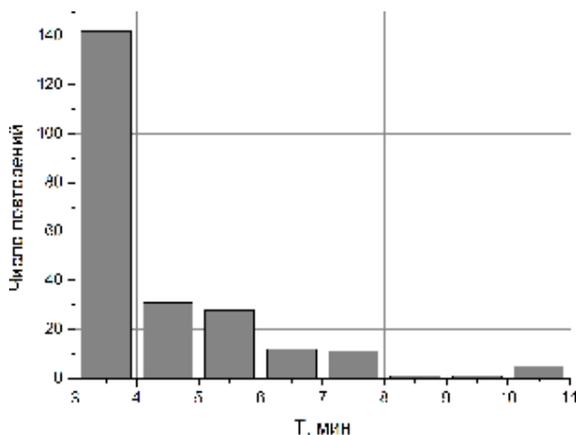


Рис. 4-4. Распределение периодов "полос" ВКГ на ЗНС в 2009–2011 годах

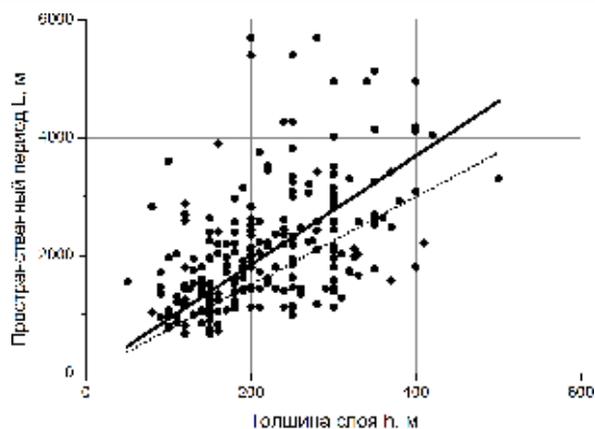
зано непосредственно со средней температурой воздуха и с направлением и скоростью ветра, которые имеют сезонный ход.

Средний период полос ВКГ для каждого случая определялся визуально по эхограмме. На *рис. 4-4* представлено распределение зарегистрированных ВКГ по периодам волн. Распределение демонстрирует быстрый спад числа повторений случаев с периодами больше 3 мин. В то же время было обнаружено несколько эпизодов ВКГ с аномально большими периодами, которые соответствуют длинам волн 5–8 км. Очевидно, что асимметрия этого эмпирического распределения вызвана выбором критериев отбора ВКГ.

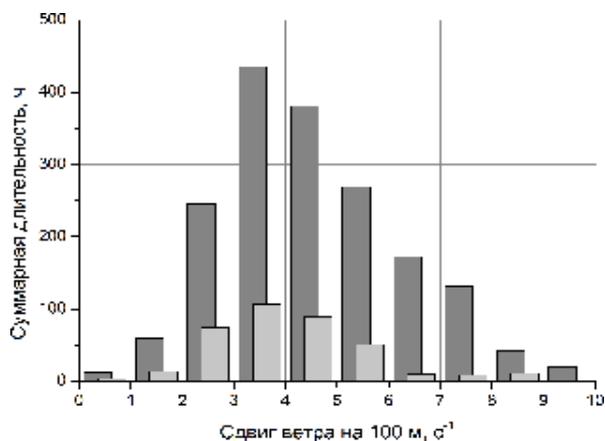
Используя гипотезу «замороженной турбулентности» Тейлора можно получить оценку для длины наблюдаемой волны как произведение периода, определяемого по эхограмме, и средней скорости ветра в слое с ВКГ. Этот параметр позволяет провести качественное сравнение с результатами модельных представлений о ВКГ. По теореме Говарда о полуокружности [72] необходимым условием неустойчивости слоя является критерий для числа Ричардсона:  $Ri < 1/4$  в какой-либо области внутри слоя. Тогда в среде могут возникнуть гравитационно-сдвиговые волны с положительной скоростью роста, зависящей от волнового числа и числа Ричардсона. Область значений, которые может принимать отношение длины внутренней гравитационно-сдвиговой волны  $L$  к толщине слоя волновой активности  $h$ , зависит от вида модели высотных изменений плотности и скорости движения среды, а также от числа Ричардсона. Наиболее вероятные значения для различных моделей лежат в диапазоне  $4.4 < L/h < 7.5$  [72].

На *рис. 4-5* представлена зависимость рассчитанного по "гипотезе замороженности" пространственного периода (длины волны)  $L$  от толщины слоя  $h$ , которая соответствует двойной амплитуде колебаний, определявшейся визуально по эхограмме. Точность визуального определения периода и амплитуды волны не лучшей разрешающей способности содара.

Среднее отношение  $L/h$ , рассчитанное для 234-х случаев составило  $9.2 \pm 0.3$ , что сравнимо с величиной  $L/h = 7.5$ , соответствующей наиболее быстро растущей моде в модели с линейными профилями скорости и плотности [72]. Это теоретическое соотношение также приведено на *рис. 4-5*.



**Рис. 4-5.** Зависимость пространственного периода  $L$  внутренних гравитационно-сдвиговых волн от толщины слоя волновой активности  $h$  на ЗНС в 2009–2011 г. Сплошная линия – экспериментальная линия регрессии  $L = 9,2 h$ . Пунктирная линия – теоретическое соотношение  $L/h = 7.5$ , справедливое для модели слоя с линейными профилями скорости и плотности [72]



**Рис. 4-6.** Распределение суммарной длительности (в часах) наблюдения ВКГ при различных вертикальных сдвигах скорости ветра в НСТ в 2008–2011 годах (светло-серый цвет) и распределение длительности наблюдения ночных НСТ с различными величинами вертикальных сдвигов в 2009 г. (темно-серый)

Для выяснения связи между величиной сдвига ветра и возникновением ВКГ были отдельно рассчитаны сдвиги в нижней части всех НСТ, наблюдавшихся на ЗНС в 2009 году, и тех течений, при которых наблюдались ВКГ. В литературе нет общепринятого метода оценки величины сдвига скорости ветра в слое, так как формы вертикальных профилей скорости отличаются значительным разнообразием. В данной работе сдвиг ветра в слое рассчитывался как разность максимального и минимального значения скорости ветра в слое, отнесенная к толщине слоя.

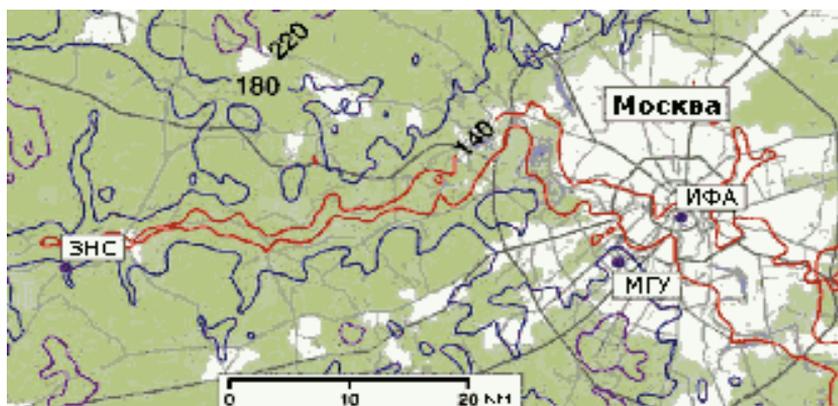
На *рис. 4-6* приведено распределение суммарной длительности ВКГ при различных сдвигах ветра для всех случаев за 2008–2011 годы, а также распределение для осредненных за один час сдвигов ветра в ночных НСТ за 2009 год, рас-

считанных по эхограммам. Форма распределения для случаев с ВКГ не имеет заметных отличий: оба распределения близки к нормальному с максимумом при сдвиге равном 3.5 м/с на 100 м и с небольшой асимметрией в сторону больших сдвигов. Таким образом, в наших наблюдениях не обнаружено непосредственно (т.е. без учёта градиента температуры) влияния величины сдвига скорости ветра на возникновение ВКГ.

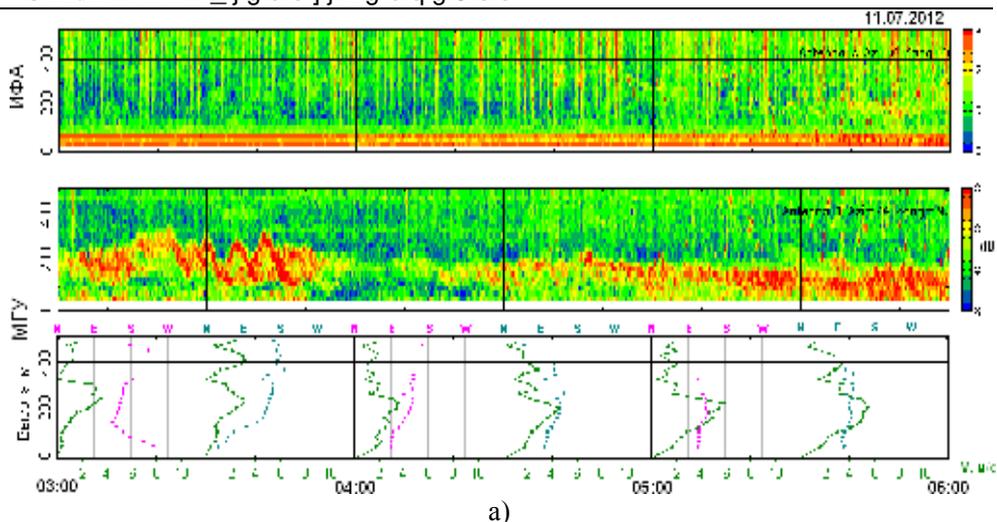
В целом, представленные результаты дают довольно обширную статистику распределений параметров ВКГ. В основном, наблюдались волны в форме "наклонных полос" на высоте 100–300 м, при сдвигах ветра 3–5 мс<sup>-1</sup> на 100 м. Типичные параметры наблюдаемых волн: длина волны 400–2000 м, двойная амплитуда (толщина слоя волновой активности) 60–300 м, среднее соотношение между длиной волны и толщиной слоя  $L/h = 9.2$ .

I j h k l j Z g k l \ \_ g j g f \_ g g t z k r l Z [ φ m ] h h e D \_ e v \ b g z v f ] h e v p Z

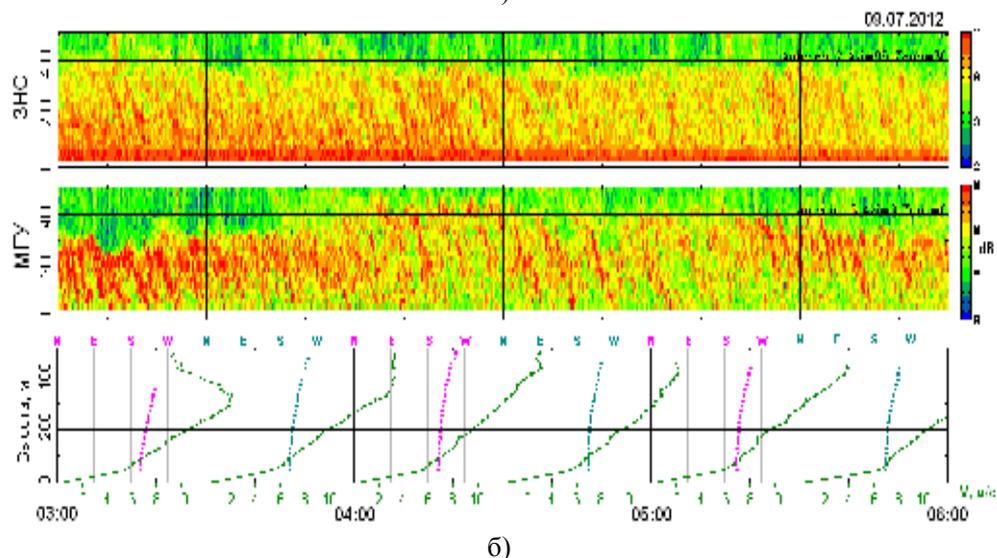
Измерения параметров АПС в одной точке, к которым относятся содарные измерения, не дают информации о пространственных масштабах наблюдаемых явлений. Грубые оценки пространственных характеристик могут быть получены только на основе гипотезы Тейлора, которую не всегда можно корректно применять при рассмотрении волновых процессов. Однако некоторые выводы о масштабах можно сделать на основе анализа многоточечных измерений. Нами получены статистические данные о волновой активности на территории большого равнинного региона, включающего в себя как крупный мегаполис, так и сельскую местность. Был проведен визуальный анализ эхограмм, полученных синхронно в трех стационарных пунктах сети дистанционного зондирования АПС в Московском регионе: (1) в центре Москвы, на крыше здания ИФА РАН, (2) на юго-западе города, на крыше физфака МГУ, в относительно слабо урбанизированной зоне, и (3) в сельской местности на ЗНС, расположенной в 50 км к западу от центра Москвы ( j b.k4-7).



**Рис. 4-7.** Карта расположения 3-х пунктов экспериментальной мезомасштабной сети мониторинга АПС в Московском регионе; ЗНС – Звенигородская научная станция ИФА, МГУ – физический факультет Московского государственного университета, ИФА – Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН. Цифры около изолиний – высота в метрах над уровнем моря



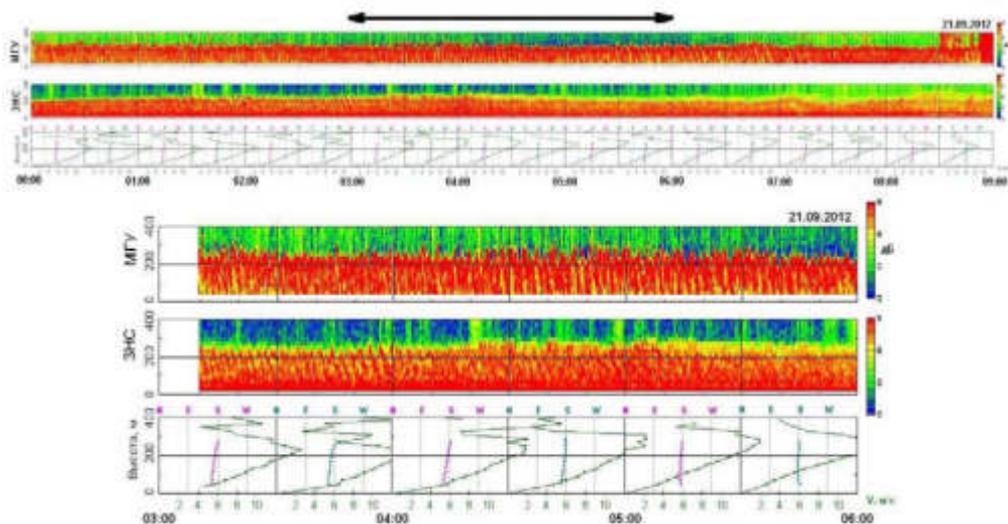
а)



б)

**Рис. 4-8.** Пример синхронных содарных измерений в разнесенных пунктах. Обозначения такие же, как на рис. 4.2. а) ВКГ в форме "кошачьих глаз" в пункте МГУ при отсутствии волн в пункте ИФА. Расстояние между МГУ и ИФА – 8 км. б) ВКГ формы "наклонные полосы", зарегистрированные одновременно на пунктах ЗНС и МГУ, отстоящих на 40 км друг от друга

Анализ данных содарного мониторинга за 2011–2014 годы показал, что одновременные эпизоды волн Кельвина-Гельмгольца в МГУ и на ЗНС (расстояние между пунктами – 40 км) были зарегистрированы в 77% от числа дней в году. Только в МГУ эпизоды ВКГ наблюдались в 5% дней, а только на ЗНС – в 12% дней. Лишь в 6% дней в году ни в одном из пунктов измерений не было зарегистрировано волновой активности. Межгодовая изменчивость этих соотношений мала. В тех малочисленных случаях, когда волны обнаруживаются только в одном из измерительных пунктов, в МГУ либо на ЗНС, они, по-видимому, порождаются локальными условиями.



**Рис. 4-9.** Пример длительного цуга ВКГ, зарегистрированного одновременно в МГУ и на ЗНС, 7 сентября 2012 года. В нижней части рисунка приведено увеличенное изображение фрагмента, отмеченного стрелкой. Обозначения – как на j b.k4-8

Количество эпизодов ВКГ, наблюдавшихся в ИФА, несколько меньше, чем в МГУ и на ЗНС, что, по-видимому, связано с влиянием городского острова тепла на стратификацию АПС. Такое влияние особенно сильно в морозное зимнее время, когда в центре Москвы наблюдается конвекция при инверсиях в МГУ и на ЗНС. Второй причиной уменьшения числа одновременных эпизодов может служить большое количество транспорта в центре Москвы, акустические шумы от которого иногда препятствуют различимости структуры АПС в верхней части высотного диапазона содарного зондирования в ИФА.

На j b.k4-8( Z приведен пример сопоставления эхограмм, полученных для случая, когда волны наблюдались в МГУ, но не были зафиксированы в ИФА. Расстояние между этими пунктами измерений составляет 8 км. На j b.k4-8( J приведен пример сопоставления эхограмм и профилей скорости ветра для эпизода одновременного существования ВКГ в МГУ и на ЗНС, на расстоянии 40 км друг от друга.

Продолжительность существования цугов эпизодов ВКГ составляла от одного до нескольких часов. В летнее время волновая активность иногда наблюдалась непрерывно в течение всего темного времени суток. Зимой, когда образуются долговременные, порой многосуточные инверсии над снежной поверхностью, время жизни цугов ВКГ доходило до 10–15 часов.

На j b.k4-9 приведен пример эпизода ВКГ продолжительностью около 9 часов, наблюдавшегося одновременно на ЗНС и в МГУ. Учитывая расстояние между точками измерений (порядка 40 км), длительность явления и преобладающее направление ветра, перпендикулярное линии между пунктами, можно утверждать, что горизонтальные размеры области, охваченной одновременными волновыми процессами в АПС, превышали сотню километров.

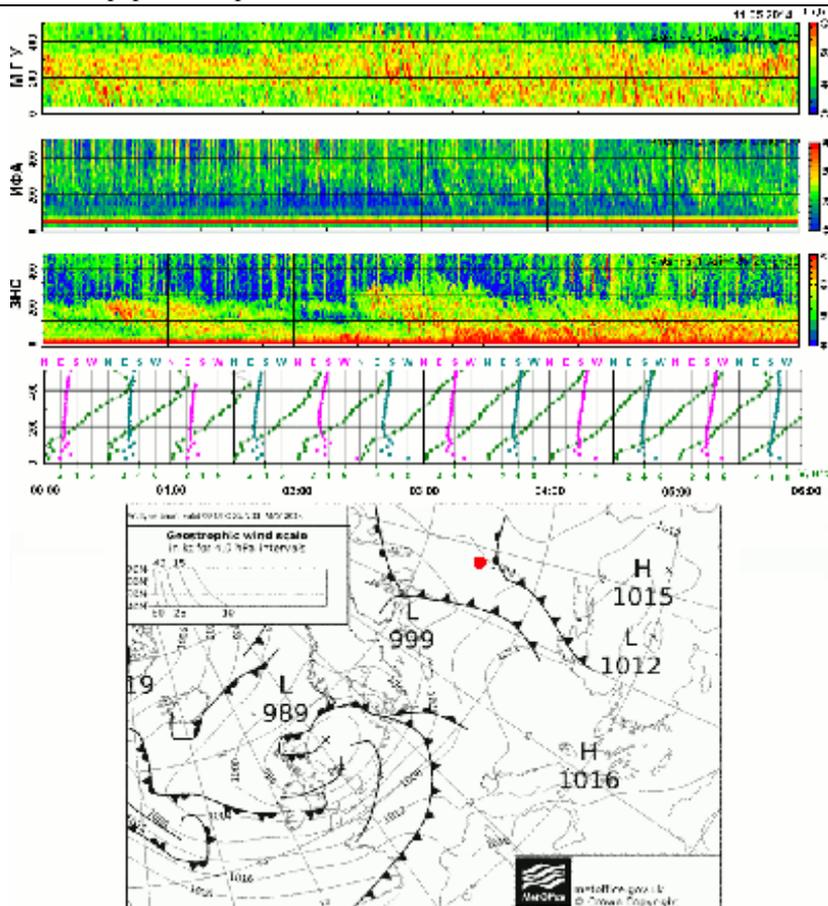


Рис. 4-10. Эхограммы и профиль скорости в 3-х пунктах зондирования 11 мая 2014 г. Внизу – карта за 00UTC 11 мая 2014 г. Красным кружком обозначен регион содарных измерений. Обозначения на эхограммах такие же, как на рис. 4-8

### Анализ синоптических условий при наблюдении ВКГ

Авторами были проведены сопоставления эпизодов ВКГ с картами барической топографии. Отдельно рассматривались ситуации высокого давления (антициклональные условия), низкого давления (циклональные условия), и атмосферных фронтов в регионе измерений. В антициклонах, несмотря на сильные низкоуровневые струйные течения с большими сдвигами ветра, наблюдаются лишь редкие локальные эпизоды ВКГ. Это, очевидно, объясняется тем, что при обычной для антициклонов сильно-устойчивой стратификации ночного АПС число Ричардсона превышает критическое значение  $Ri(cr) = 0.25$ , т. е. нарушается необходимое условие возникновения в потоке неустойчивости Кельвина–Гельмгольца:  $Ri < Ri(cr)$ . В условиях низкого давления ВКГ также наблюдаются относительно редко. Циклоны обычно характеризуются сплошной облачностью, при которой отсутствуют низкоуровневые струйные течения, поэтому в АПС нет значительных сдвигов скорости ветра и отсутствуют сдвиговые волны. Чаще все-

2.5. Соподарные исследования волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых течениях

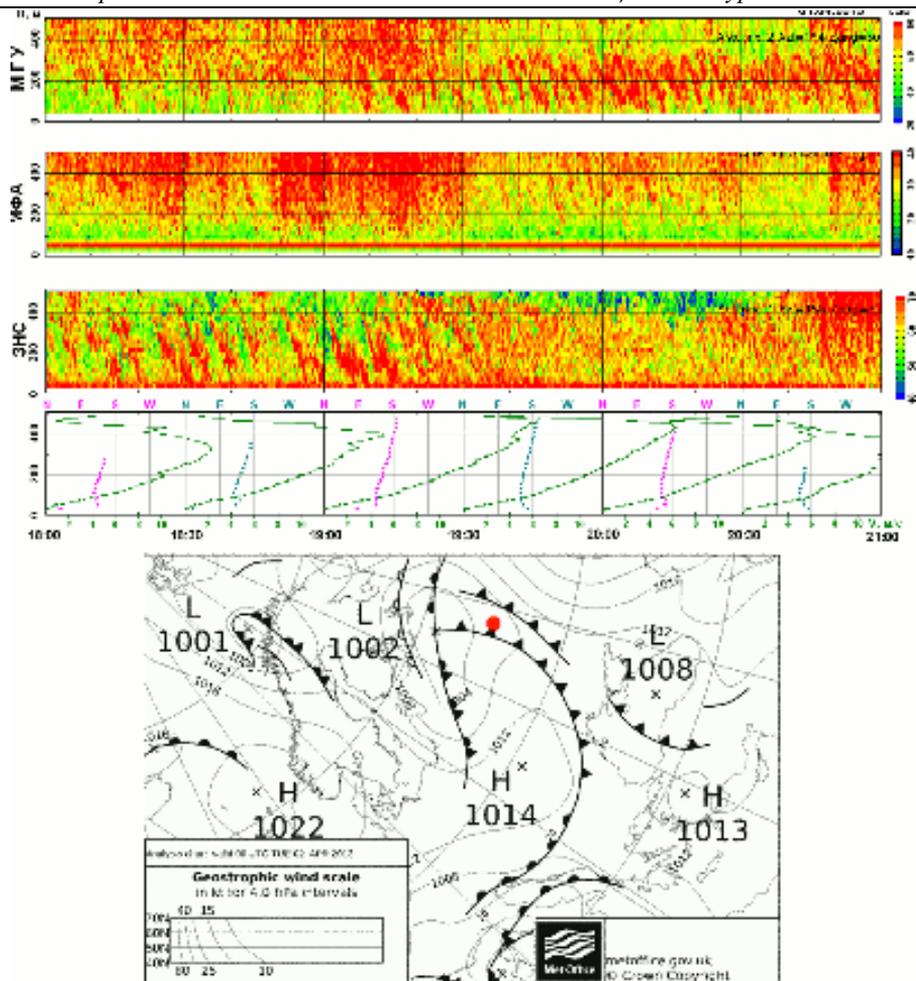


Рис. 4-11. Сопоставление эхограмм и синоптической карты для 1 апреля 2013 г.  
Карта за 00 UTC 02 апреля 2013 г.

го присутствие ВКГ (в особенности, обширных цугов) связано с большими градиентами приземного барического поля вблизи ложбин давления и атмосферных фронтов. Возможны два различных фактора, объясняющих связь волновой активности в АПС с такими синоптическими условиями:

(1) вследствие умеренной облачности и слабой статической устойчивости АПС, числа Ричардсона часто принимают значения меньше критического, и возникает неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, приводящая к развитию ВКГ;

(2) вследствие бароклинности тропосферы в ней генерируются бегущие гравитационные волны, которые частично захватываются существующим в струйном течении приземным волноводом. Такие захваченные волны проявляются как стоячие колебания плотности воздуха в волноводе, похожие на сдвиговые волны Кельвина-Гельмгольца.

Примеры сопоставления эпизодов обширных цугов ВКГ, зарегистрированных в трёх пунктах, и синоптических карт приведены на рис. 4-10 и 4-11.



**Рис. 5-1.** Расположение финской антарктической станции Абоа и итальянско-французской антарктической станции Конкордия, на которых проводились исследования волн в АПС с помощью минисодаров высокого разрешения

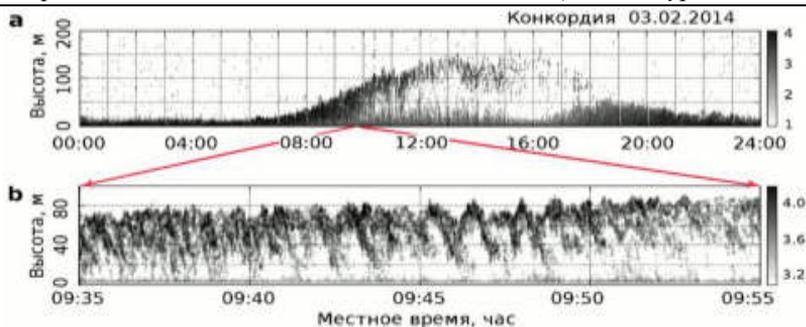
#### 4. Внутренние гравитационные волны в Антарктике, в аридных и прибрежных регионах

##### *Волны в антарктическом АПС*

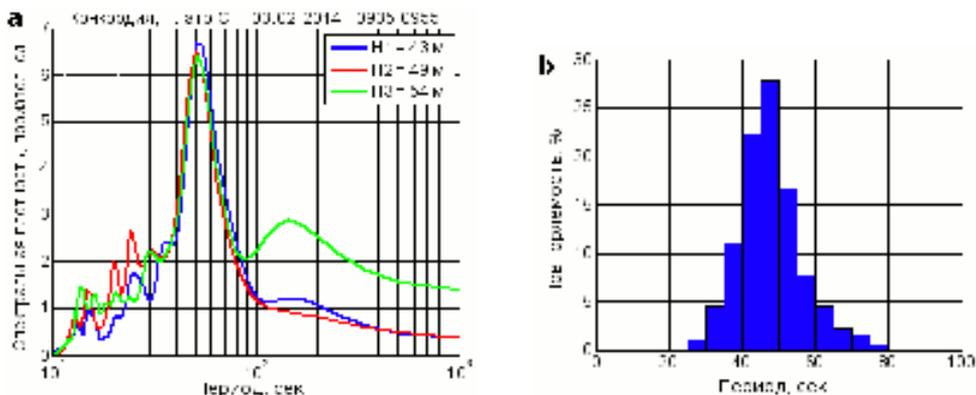
Содарные исследования волн над заснеженной поверхностью Антарктики проводились на финской станции Абоа ( $73.04^{\circ}\text{S}$ ,  $13.40^{\circ}\text{W}$ ), находящейся на слабо-наклонном леднике на Земле Королевы Мод в 100 км от побережья [73, 74], и на итальянско-французской станции Конкордия ( $75.10^{\circ}\text{S}$ ,  $123.35^{\circ}\text{E}$ ), находящейся на Куполе Си [75]. Расположение станций показано на *рис. 5-1*. На *рис. 5-2*, *5-3* и *5-5* приведены примеры содарной визуализации волновой активности, наблюдавшейся в приземных и приподнятых инверсионных слоях в летние антарктические сезоны.

На Плато Си кульминационная высота Солнца над горизонтом достаточно велика (около  $38^{\circ}$ ), чтобы "подогреть" подстилающую поверхность. В декабре–феврале 2014 г. в дневные часы при ясной погоде и температуре воздуха около  $-25^{\circ}\text{C}$  над снежным покровом на станции Конкордия наблюдалась слабая конвекция, прикрытая приподнятым инверсионным слоем. Суточная смена стратификации видна на содарной эхограмме на *рис. 5-2a*, полученной с помощью минисодара с высотным разрешением 2 м и временным разрешением 1 с [76]. На увеличенном фрагменте эхограммы, *рис. 5-2b*, четко различимы волнообразные структуры типа волн Кельвина–Гельмгольца в форме наклонных полос с амплитудой  $2A \approx 50$  м и периодом  $T \approx 50$  с. Длина волны по грубой оценке с использованием гипотезы заморозненности Тейлора составляет  $\lambda \approx 250\text{--}350$  м.

Для более точного определения периода волн были рассчитаны спектры интенсивности эхо-сигнала. Пример такого спектра показан на *рис. 5-3a*, а на *рис. 5-3b* приведено распределение периодов волн для всех 15-ти дней хорошей погоды, наблюдавшейся в течение полутора месяцев содарных измерений. Отметим, что полученные на станции Конкордия данные могут способствовать решению



**Рис. 5-2.** **a** – пример изменения мезомасштабной структуры турбулентности при утреннем переходе от тонкого слоя ночной приземной инверсии к неустойчивой стратификации. **b** – отмеченный стрелками фрагмент эхограммы в увеличенном масштабе, демонстрирующий мелкие волны Кельвина-Гельмгольца в слое инверсии при его подъеме над конвективными термиками

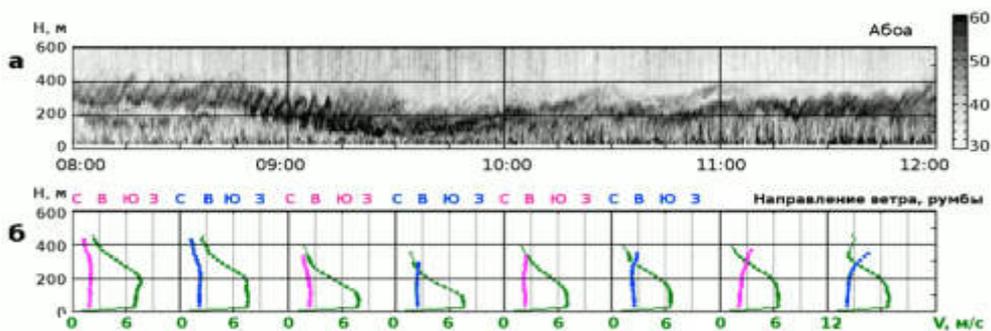


**Рис. 5-3.** **a** – энергетические спектры содарного эхо-сигнала на трёх высотах. Период волн  $T = 5.3$  сек. **b** – распределение периодов ВКГ, наблюдавшихся в слое поднимающейся инверсии в течение 15 дней

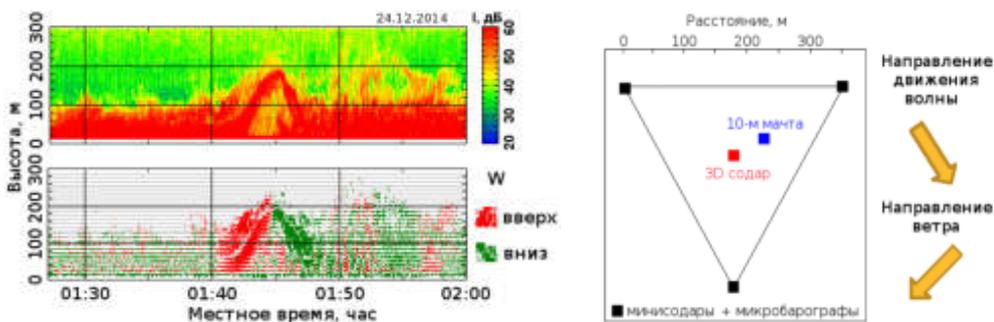
вопроса о взаимодействии волн и конвективных термиков при подъеме инверсионного слоя в утренний переходный период.

На станции Абоа при безоблачной погоде обычно наблюдались кататические течения, сопровождавшиеся возникновением волн Кельвина-Гельмгольца в верхней части течения, где скорость ветра уменьшается с высотой. На *рис. 5-4* показана эхограмма типичного цуга ВКГ и соответствующие профили скорости ветра. По этим данным были сделаны следующие оценки параметров волн для эпизода в окрестности 09:00 часов: длительность цуга – около получаса, длина цуга – порядка 10 км, амплитуда волн  $2A \approx 200$  м, период  $T \approx 3$  минуты, длина волны  $\lambda \approx TV \approx 900$  м.

В течение полутора месяцев антарктического лета 2014–2015 на станции Абоа работала синхронизованная сеть доплеровского акустического зондирования, которая состояла из трехкомпонентного содара и трёх однокомпонентных вертикально направленных минисодаров [74]. Трехкомпонентный содар использовался для измерения средней скорости и направления ветра, а минисодары, которые



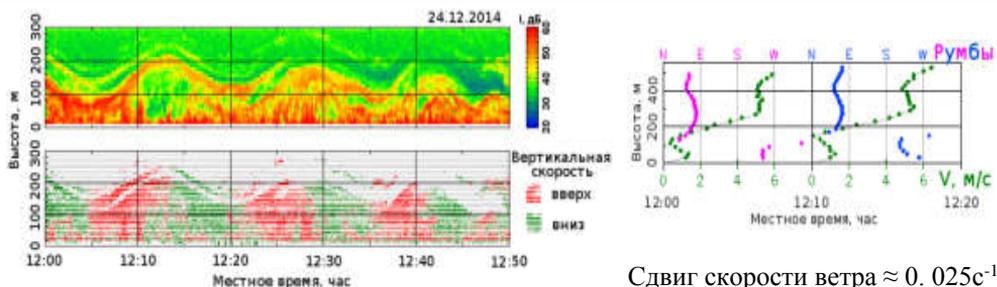
**Рис. 5-4.** а – волновые движения в верхней части кататического течения, зарегистрированные трёхкомпонентным частотно-кодированным минисодаром Латан-3М на финской станции Абоа 21 декабря 2010 г. Под эхограммой указано местное время. б – осреднённые за 30 мин профили скорости и направления ветра на Абоа, соответствующие эхограмме. Сдвиг ветра составляет около  $-3 \text{ мс}^{-1}/100 \text{ м}$



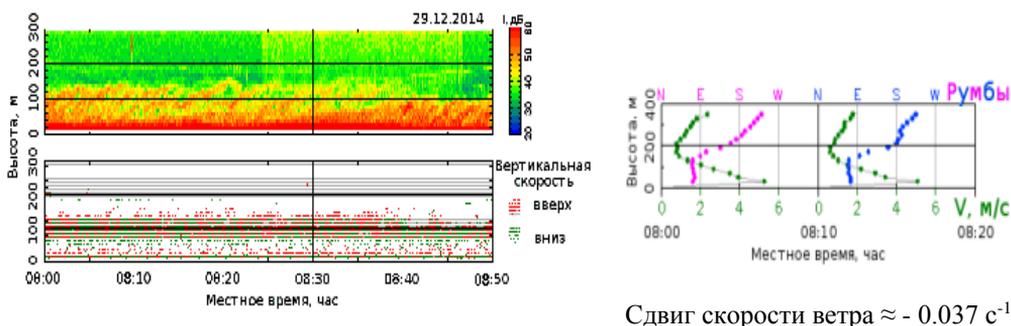
**Рис. 5-5а.** Слева: Одиночная волна на верхней границе приземной инверсии; верх – эхограмма, низ – вертикальная скорость W. Справа: Схема расположения содарной сети и направление движения одиночной волны относительно среднего ветра

имели высокое разрешение по высоте и времени, служили для визуализации волнообразных возмущений и определения их параметров и перемещений.

Многоточечные измерения выявили сложную пространственную структуру волн различных типов. На рис. 5-5а показан пример эхограммы уединенной волны и диаграммы вертикальной компоненты скорости ветра. На этом же рисунке приведена схема расположения содарной сети и указано направление перемещения волны относительно направления среднего ветра в слое волновой активности. Было зарегистрировано несколько эпизодов уединенных волн протяженностью около одного километра, движущихся поперек ветра. Оценка горизонтальных размеров таких структур по средней скорости ветра с помощью гипотезы Тейлора приводила к завышению длины волны в 4–5 раз. Обнаружена высокая корреляция между скоростью вертикального смещения контура одиночной волны и вертикальной компонентой скорости ветра, что свидетельствует о реальном смещении воздушных частиц волной и находится в согласии с результатами работы [77].



**Рис. 5-5b.** Слева: Волны плавучести (ВП) в приподнятой инверсии над конвекцией. Верх – эхограмма, низ – вертикальная скорость  $W$ . Справа: Профили скорости и направления ветра, осредненные за 10 мин.



**Рис. 5-5c.** Слева: гравитационно-сдвиговые волны (волны Кельвина-Гельмгольца) в форме "наклонные полосы" в приземном кататическом течении над слабо-наклонной поверхностью ледника. Верх – эхограмма, низ – вертикальная скорость  $W$ . Справа: профили скорости и направления ветра, осредненные за 10 мин.

Помимо одиночных волн, на эхограммах четко различались 2 типа цугов внутренних гравитационных волн: бегущие волны плавучести (ВП) в виде синусообразных колебаний границ приподнятых инверсионных слоев (*рис. 5-5b*), и волны Кельвина-Гельмгольца (VKГ) в виде наклонных полос (*рис. 5-5c*).

В случае ВП видна такая же корреляция между смещением контура волн и вертикальной скоростью ветра, как и для одиночной волны. Период волн составляет около 15 минут. Направление ветра на высоте расположения волнового слоя резко меняется с юго-западного на северо-восточное. Это означает, что цуг ВП возник на границе раздела двух различных масс воздуха, связанных с прохождением синоптического фронта. Однако, горизонтальное разнесение содаров (350 м) было слишком велико для того, чтобы найти соответствие между отдельными элементами возмущений и определить длину волны ВП.

Эхограмма на *рис. 5-5c* выглядит по-другому. Волны в форме наклонных полос возникают в верхней части кататической струи, где наблюдается значительный отрицательный сдвиг скорости ветра. Это характерные гравитационно-сдвиговые волны типа волн Кельвина-Гельмгольца. Упорядоченных вертикальных потоков воздуха в волновом слое не наблюдается. Периоды VKГ составляют от одной до двух минут, т.е. заметно меньше периодов ВП. Скорость и направле-

ние перемещения ВГК близки к скорости и направлению среднего ветра. Оценка длины волны ВГК по гипотезе Тейлора составляла 100–200 м.

Полученные нами в Антарктике данные о волнах в АПС наглядно показали необходимость дополнения микробарографических измерений содарной визуализацией волн, которая не только позволяет определить высоту расположения и вертикальную протяженность слоев волновой активности, но и дает возможность различить разные типы волн по их форме. Отметим также, что принципиальных отличий характера волн в АПС высоких широт и в АПС средних широт не обнаружено.

### *Волны в аридных и степных районах*

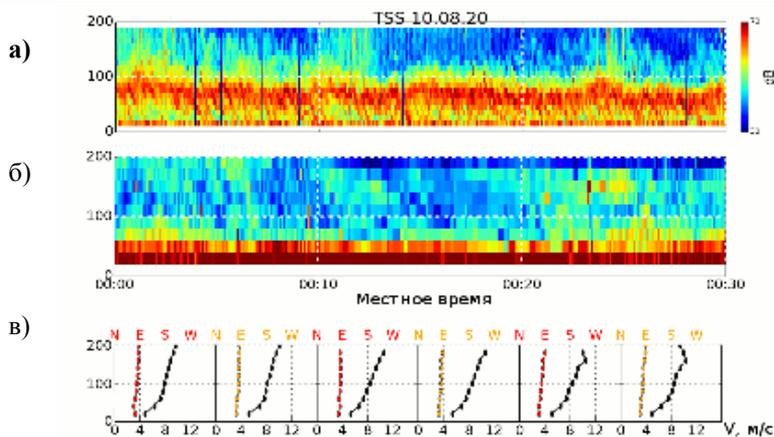
Волновые структуры в АПС над аридными и степными районами изучались в ходе экспедиций в полупустынной зоне Калмыкии и в степи, на Цимлянской научной станции (ЦНС) ИФА. В экспериментах использовались различные модификации трехантенного многочастотного содара с разрешением от 2 с по времени и от 5 м по высоте.

С 19 по 30 июля 2016 года измерения проводились над пустынной ровной поверхностью на одном из песчаных выносов, окружённых степью, в 6 километрах от посёлка Нарын-Худук, республика Калмыкия. Измерения на ЦНС проводились в августе 2012, 2015 и 2016 гг. непрерывными сериями продолжительностью от 2 до 4 недель. Станция расположена на северной границе г. Цимлянск, на расстоянии около 2,5 км от Цимлянского водохранилища, в равнинной степной местности с небольшим уклоном. Измерения проводились преимущественно в жаркую безоблачную погоду. В структуре АПС наблюдался выраженный суточный ход, с мощными инверсиями и струйными течениями в ночное время и интенсивным конвективным обменом в дневное время. Спутниковые снимки мест проведения измерений представлены на *рис. 5-6*.

Использование минисодаров высокого разрешения позволило регистрировать ВГК в тонких слоях ночных инверсий, наблюдаемых при интенсивном выхолаживании над песчаной поверхностью. Пример регистрации (с временным разрешением менее минуты) в слое приподнятой инверсии структуры ВГК, не различимой на стандартном содаре, приведен на *рис. 5-7*.



**Рис. 5-6.** Спутниковые снимки местности проведения экспериментов. **а)** измерительный пункт в Калмыкии, 2016 г. **б)** Цимлянская научная станция ИФА



**Рис. 5-7.** Регистрация ВКГ малого масштаба с временным периодом волн менее минуты, ЦНС, 2016 г. а) эхограмма минисодара высокого разрешения; б) эхограмма содара стандартного разрешения; в) серия профилей скорости и направления ветра по данным трехкомпонентного содара

Волны регистрировались в течение 80% времени существования инверсий, при условии достаточной разрешающей способности прибора. В целом, статистика зарегистрированных гравитационно-сдвиговых волн в степной и аридной зоне не отличается от полученной при анализе многолетних измерений на ЗНС (Раздел 2.4). Это означает, что топография равнинной местности, которую можно характеризовать как слабо-неоднородную, а также средняя температура воздуха, незначительно влияли на образование ночных ВКГ, и основной причиной возбуждения наблюдавшихся волн была сдвиговая неустойчивость в слое приземной, либо приподнятой инверсии.

#### *Волны в АПС в прибрежных регионах*

Эксперименты, направленные на исследование динамики и структуры АПС в прибрежной зоне, были проведены на базе Черноморского гидрофизического полигона РАН в поселке Кацивели. Трехкомпонентный многочастотный содар работал в круглосуточном режиме в течение 10 дней в июне 2015 г. и в октябре 2016 г. на стационарной океанологической платформе, расположенной приблизительно в 500 метрах от береговой линии. Глубина моря в месте расположения платформы составляет около 30 м, в пяти километрах от береговой линии располагается граница горного плато километровой высоты. Высота инструментальной палубы платформы над морем составляет 15 м. Карта местности и внешний вид платформы с установленным содаром на верхней палубе представлены на рис. 5-8.

В точке измерений наблюдалась сложная структура АПС, сильно зависящая от направления ветра и определяемая взаимодействием морского и наземного АПС, бризовыми циркуляциями, стоковыми ветрами и суточными вариациями. Скорость и направление ветра при этом изменялись, в основном, беспорядочно; эпизоды чисто бризовой циркуляции наблюдались лишь в отдельные часы. Волновая активность была зарегистрирована содаром в 20% всего времени измерений, с преобладанием внутренних гравитационных волн типа волн плавучести,



Рис. 5-8. Карта расположения океанологической платформы и внешний вид с установленным на верхней палубе минисодаром

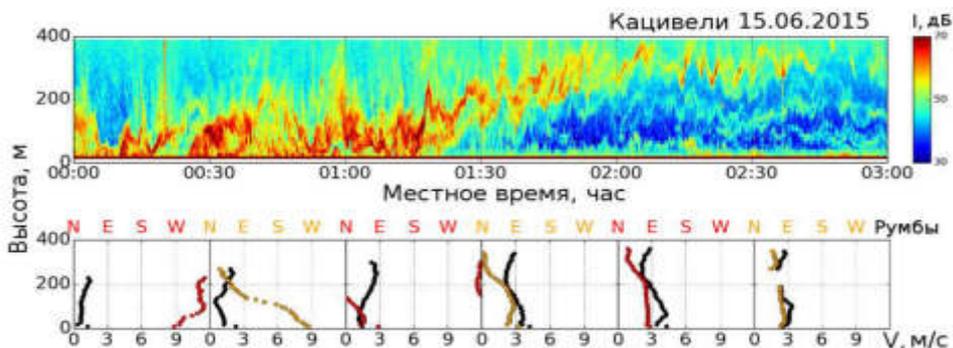
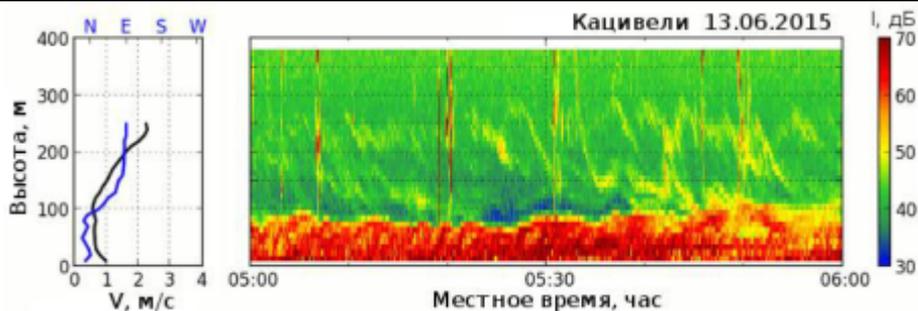


Рис. 5-9. Многослойная структура волн плавучести, типичная для ночного АПС над прибрежной водной поверхностью и изменчивость профилей скорости и направления ветра

что, очевидно, связано с орографическими особенностями местности. Пример таких волн приведен на *рис. 5-9*.

ВКГ наблюдались в инверсионных слоях при наличии сдвигов ветра. В бризовых ячейках были зарегистрированы ВКГ различной формы одновременно в двух слоях: в нижней части бриза и в возвратном течении. Пример регистрации такого эпизода приведен на *рис. 5-10*. Разница в направлении ветра между нижней (до 100 м) и верхними частями течения составляет  $100^\circ$ , сдвиг скорости ветра отрицателен в нижней части положителен в верхней.



**Рис. 5-10.** Пример регистрации ВКГ в бризовой ячейке. В слое от 0 до 100 м наблюдаются ВКГ в форме косы с наклоном полос вправо при отрицательном сдвиге ветра. В возвратном потоке бриза в слое 150–250 м наблюдаются полосы с наклоном влево при положительном сдвиге ветра

### 5. Воздействие волн Кельвина-Гельмгольца на мелко-масштабные флуктуации метеорологических параметров в ночном АПС

Вопрос о влиянии волн на обменные процессы в статически устойчивом АПС важен для параметризации АПС в численных моделях [1, 54, 50]. Этот вопрос подразделяется на 2 части:

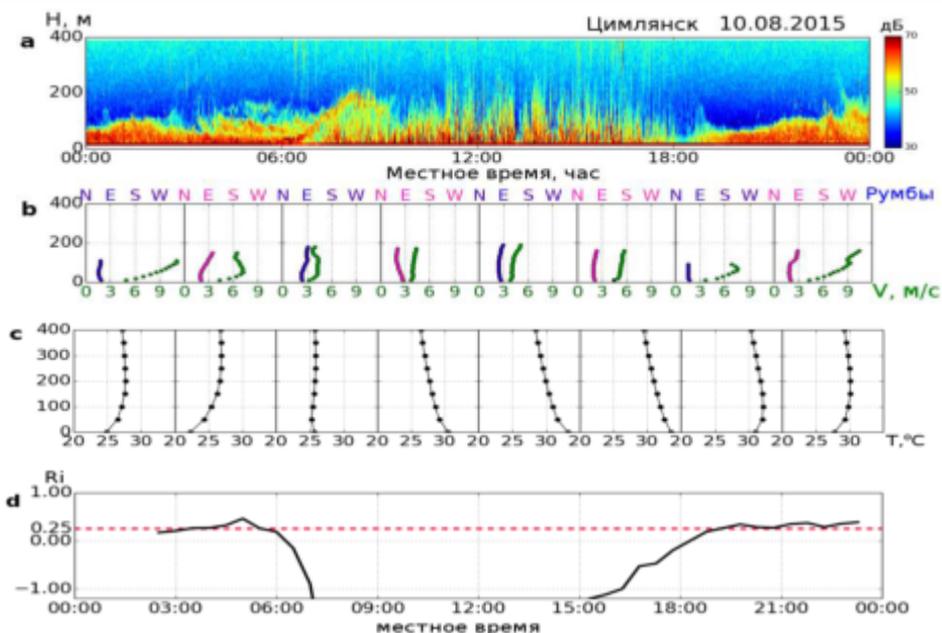
- 1) влияние волн на генерацию турбулентности, которая обеспечивает перенос тепла, количества движения и примесей от приповерхностного слоя атмосферы к вышележащим слоям;
- 2) влияние волн на интенсивность флуктуаций метеорологических параметров, которые возникают в слое, охваченном волновыми движениями, и не участвуют в таком переносе.

Проблема экспериментального разграничения турбулентности и внутренних гравитационных волн изучается много лет [78]. В присутствии волн стандартные методы односточных пульсационных измерений потоков тепла, импульса и примесей могут приводить к существенно завышенным значениям [49]. Примеры спектрального разделения потока тепла на волновую и турбулентную части приведены в работах [79, 51].

Содарные, радарные и лидарные методы определения интенсивности турбулентного перемешивания по измерениям структурной характеристики температуры, либо дисперсий компонент скорости ветра, также могут давать завышенные значения из-за вклада волновых возмущений. Не-турбулентное происхождение флуктуаций компонент скорости ветра в данных содарных измерений характеристик АПС в периоды волновой активности было показано в работах [80, 81].

В данном разделе приведены результаты исследования влияния волн Кельвина-Гельмгольца и волн плавучести на содарные и локальные измерения характеристик флуктуаций параметров АПС. Для этого сопоставлялись результаты измерений, проведенных в течение трех временных интервалов: непосредственно перед прохождением цуга волн, во время регистрации цуга, и сразу после его окончания.

Измерения проводились в августе 2015 г. на Цимлянской научной станции ИФА (рис. 5-6(б)). В измерениях использовался многочастотный доплеровский минисодар Латан-3М [61] с высотным разрешением 10 м и временным разрешением 5 с. Измерения профилей температуры воздуха проводились сканирующим



**Рис. 6-2.** Типичный пример суточных изменений структуры АПС при ясной летней погоде на ЦНС. **а** – содарная эхограмма; **б** и **с** – профили скорости ветра (зеленые точки), его направления (в румбах) и температуры воздуха, осредненные за 3 часа; **д** – суточный ход числа Ричардсона (красная линия соответствует значению  $Ri_{кр} = 0.25$ )

радиометром МТР5. Приземные потоки тепла и импульса, а также число Ричардсона  $Ri$  определялись по данным ультразвуковых термометров-анемометров (сопников) на 10-метровой метеорологической мачте.

Волновые движения типа волн Кельвина-Гельмгольца (ВКГ) наблюдались на содарных эхограммах почти каждую ночь, волны плавучести (ВП) за 18 дней измерений были зарегистрированы только два раза. Для обработки были выбраны эпизоды волновой активности при ветрах из северо-восточного сектора, не осложненные влиянием водохранилища и городской застройки. Всего было рассмотрено 7 эпизодов ВКГ и один эпизод ВП. Различия форм этих двух типов внутренних гравитационных волн, визуализируемых на содарных эхограммах, описаны ранее, в разделе 4.

Во время эпизодов ВКГ стояла безоблачная погода, скорость ветра в волновом слое составляла 8–11 м/с, сдвиг скорости лежал в пределах 5–7 м/с на 100 м, период волн составлял 1–3 мин. Эпизод ВП наблюдался при малооблачной погоде, меньшей скорости ветра в слое и меньшем сдвиге скорости (около 7 м/с, и 4 м/с на 100 м, соответственно); период волн составлял около 7 мин.

На рис. 6-2 представлен типичный для ясной погоды пример содарной эхограммы, суточного хода  $Ri$  и профилей скорости ветра и температуры. В ночное время наблюдалась устойчивая термическая стратификация, сопровождаемая формированием инверсионного приземного слоя, наблюдались струйные течения со сдвигами ветра до  $0.07 \text{ с}^{-1}$ ,  $Ri$  принимало значения, близкие к критическому  $Ri_{кр} = 0.25$ , которое служит индикатором условий, способствующих возникнове-

### 2.5. Содарные исследования волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых течениях

нию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [72]. В дневное время стратификация становилась неустойчивой, наблюдалась конвекция.

Для описания интенсивности мелкомасштабных флуктуаций параметров АПС использовались две традиционные характеристики, которые определяются по данным содарных измерений (см., например, [82]):

- Интеграл интенсивности регистрируемого содаром эхо-сигнала  $I$  (в произвольных единицах) по слою волновой активности  $\Delta h$ :  $I_{int} = \int_{\Delta h} I(z) dz$ .

- Среднеквадратичное значение вертикальной компоненты скорости ветра, осредненное по волновому слою  $\sigma_w = (\langle w^2 \rangle)^{1/2}$ .

Поскольку интенсивность обратного рассеяния звука прямо пропорциональна структурному параметру температуры  $S_T^2$  [46], то величину  $I_{int}$  следует рассматривать как интегральную характеристику температурных флуктуаций.

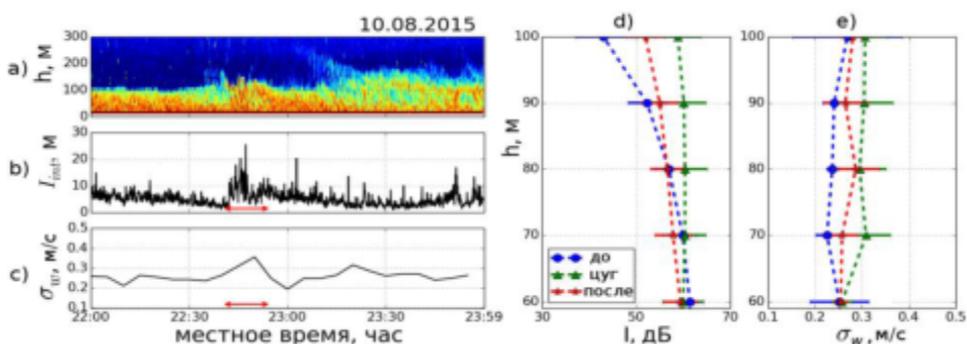
Приземные значения

- потока тепла  $Hf = c_p \rho \langle wT \rangle$ , и
- количества движения  $\langle uw \rangle$

определялись стандартным корреляционным методом по микропульсационным измерениям на мачте. Здесь использованы следующие обозначения:  $w$  – флуктуации вертикальной компоненты скорости ветра,  $u$  – флуктуации горизонтальной компоненты скорости,  $T$  – флуктуации температуры воздуха,  $c_p$  – удельная теплоёмкость при постоянном давлении,  $\rho$  – плотность воздуха; угловые скобки означают осреднение по времени.

Для оценки влияния волн на вышеперечисленные характеристики нами были проведены сравнения этих характеристик для 3-х временных периодов: непосредственно перед прохождением цуга волн, во время цуга, и сразу после его окончания. Критерии для идентификации цугов волн на содарных эхограммах были сформулированы ранее [83].

На *рис. 3-6a* и *3-6b* приведены примеры поведения характеристик флуктуаций, измеренных при прохождении цугов ВКГ.



**Рис. 6-3а.** Изменение характеристик мелкомасштабных флуктуаций параметров АПС при проходе цуга ВКГ 10 августа 2015 г. **а)** фрагмент эхограммы, зарегистрированной вертикально направленной антенной; **б)** временной ход интегральной интенсивности эхо-сигнала  $I_{int}$  в слое от 30 м до 100 м; **в)** временной ход среднеквадратичного отклонения вертикальной скорости  $\sigma_w$ , осредненного по тому же слою; красными горизонтальными стрелками отмечено время регистрации цуга; **д)** и **е)** осредненные за 15 мин вертикальные профили тех же характеристик до появления цуга, во время цуга, и после его окончания

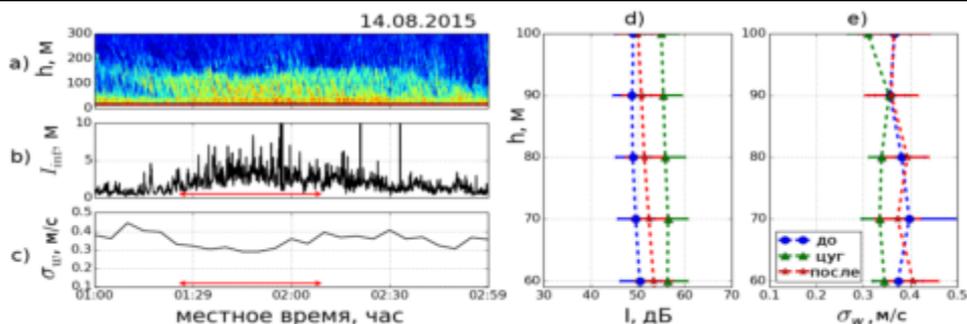


Рис. 6-3б. То же, что на рис. 6-3а, но для 14 августа 2015 г. Профили **д)** и **е)** осреднены за 45 мин.

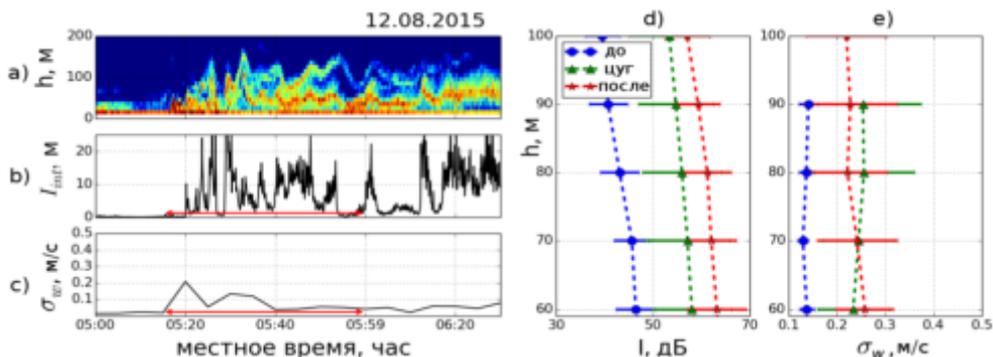


Рис. 6-3с. То же, что на рис. 6-3а и *b*, но для цуга волн плавучести 12 августа 2015 г. Профили рассчитаны по трём смежным 40-минутным периодам

Для этих двух примеров величина  $I_{int}$  несколько увеличивается во время прохождения цуга ВКГ, в то время как величина  $\sigma_w$  увеличивается на рис. 6-3а и уменьшается на рис. 6-3б. Более сильное влияние волн плавучести, чем ВКГ, видно на рис. 6-3с. На некоторых высотах интенсивность эхо-сигнала во время прохождения цуга ВП в 10 раз больше, чем до цуга, а величина  $\sigma_w$  увеличивается в 2.5 раза.

Сильное влияние волн плавучести сказывается также на результатах измерений потоков тепла и импульса, примеры которых показаны на рис.6-4а, *b* и *c*.

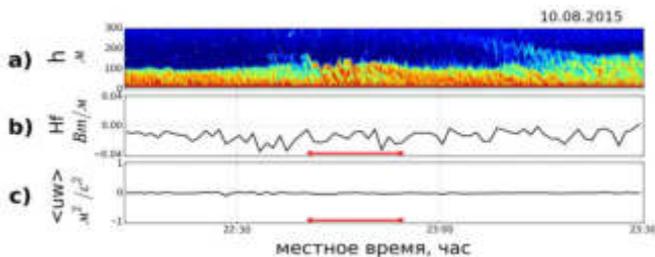


Рис. 6-4а. Пример изменения турбулентных вертикальных потоков тепла и импульса при прохождении ВКГ. **а)** – эхограмма; **б)** – поток тепла  $Hf$ ; **в)** – поток импульса  $\langle uW \rangle$ . Стрелками обозначено время прохождения волнового цуга. 10.08.2015

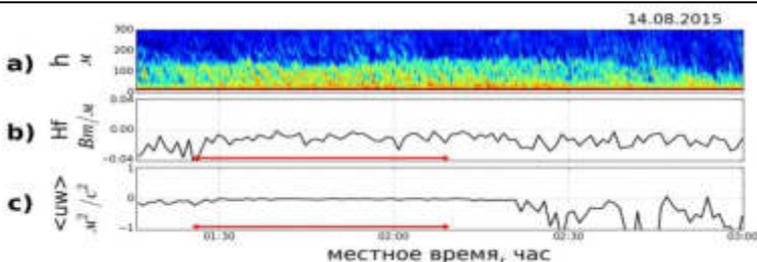


Рис. 6-4в. То же, что на рис. 6-4а, но для 14 августа 2015 г.

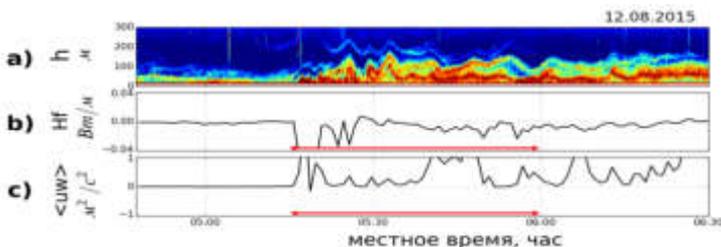


Рис. 6-4с. То же, что на рис. 6-4а и б, но для цуга волн плавучести 12 августа 2015 г.

Средние значения отношений характеристик мелкомасштабных флуктуации в соседние интервалы времени для всех эпизодов ВКГ, а также для эпизода ВП, приведены в *Таблице 6-1*.

**Таблица 6-1.** Среднее отношение характеристик мелкомасштабных флуктуации для всех эпизодов ВКГ в сопоставлении с отношением для эпизода ВП

Характеристика	Отношение в соседние периоды времени	Среднее по эпизодам ВКГ	Эпизод ВП
$I_{int}$	во время цуга / до цуга	2.2	42.0
	во время цуга / после цуга	2.0	1.1
$\sigma_w$	во время цуга / до цуга	1.2	1.5
	во время цуга / после цуга	1.2	1.8
Hf	во время цуга / до цуга	0.8	10.9
	во время цуга / после цуга	1.1	5.6
$\langle uw \rangle$	во время цуга / до цуга	1.4	1000.0
	во время цуга / после цуга	1.4	0.5

При прохождении цугов ВКГ в среднем наблюдалось лишь небольшое увеличение значений  $I_{int}$ ,  $\sigma_w$ , Hf и  $\langle uw \rangle$ . Поскольку флуктуации параметров можно рассматривать как сумму турбулентных флуктуаций и флуктуаций, вызванных волновыми движениями, то это означает незначительное влияние волн Кельвина-Гельмгольца на интенсивность турбулентности, а также небольшой вклад волновых движений в результаты измерений характеристик турбулентности стандартными микропульсационными и содарными методами.

Как видно из *Таблицы 6-1*, волны плавучести, наоборот, оказывают большое влияние на результаты измерений. При прохождении цуга ВП наблюдалось резкое увеличение интегральной интенсивности эхо-сигнала и потока импульса, и значительное увеличение потока тепла. Как следует из визуального анализа содарных эхограмм на *рис. 6-3с* и *6-4с*, это увеличение происходит, главным образом, за счет вертикальных смещений границы инверсии.

Различие результатов, полученных для волн Кельвина-Гельмгольца и для волн плавучести, показывает, насколько важно идентифицировать тип ВГВ при исследованиях проблемы воздействия волн на турбулентность в устойчивом АПС. Отметим также, что приведенные в *Таблице 6-1* цифры являются сугубо ориентировочными, и их точность трудно оценить, поскольку визуальное определение границ цугов волн по содарным эхограммам является в значительной мере субъективным.

### Заключение

В результате длительного круглогодичного содарного мониторинга атмосферы на стационарных пунктах экспериментальной сети дистанционного зондирования, действующей в Московском регионе с 2005 года, а также проведения в 2007–2016 годах экспедиционных исследований, в ИФА им. А.М. Обухова РАН создан уникальный архив экспериментальных данных о мезомасштабной структуре турбулентности и профилях скорости ветра в нижней части АПС. Особую ценность представляют данные о низкоуровневых струйных течениях и волновых процессах при статически-устойчивой стратификации АПС, полученные с помощью содаров высокого разрешения. До настоящего времени обработана и обобщена лишь небольшая часть этого архива. К сожалению, это типично для комплексных экспериментальных исследований. Так, например, данные международного полевого эксперимента по исследованию ночного АПС, CASES-99 (Cooperative Atmospheric Surface Exchange Study), проводившегося в США в 1999 г. в течение одного месяца, продолжают обрабатываться и публиковаться уже более 16-ти лет.

Основным средством исследования в нашей работе служили доплеровские моностатические акустические локаторы – содары, действие которых основано на обратном рассеянии звуковых волн температурными турбулентными неоднородностями. Теория звуковой локации атмосферы была разработана в прошлом веке А.М. Обуховым и В.И. Татарским и подтверждена натурными экспериментами М.А. Каллистратовой. В настоящее время коммерческие содары широко используются во всем мире. Сударная визуализация структуры АПС в координатах высота-время дает наглядное представление о морфологии волн. Без такой информации невозможно однозначно классифицировать волновые процессы, регистрируемые локальными средствами измерений: микробарографами или акустическими анемометрами. Разработанные для полевых исследований волновой активности в устойчивом АПС содары высокого разрешения позволяют адаптировать параметры аппаратуры к конкретным задачам, обеспечивая информацию о тонкой структуре приземного слоя, либо средние профили скорости ветра и интенсивности турбулентности в значительном диапазоне высот. Простой стандарт электронных и программных компонентов содара позволяет организовывать однокомпо-

### 2.5. Содарные исследования волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых течениях

нентные, трехкомпонентные или многоточечные измерения с использованием универсальных инструментальных блоков.

Визуальный анализ содарных эхограмм из обширного архива данных показал, что волновые структуры регистрируются почти в 80% времени существования устойчивой стратификации АПС. При этом в однородной и слабо-неоднородной равнинной местности в подавляющем большинстве случаев наблюдаются гравитационно-сдвиговые волны типа волн Кельвина-Гельмгольца. Используемые авторами способы регистрации и описания ВКГ продемонстрировали распространенность этого явления, а также большой диапазон временных и пространственных параметров наблюдаемых волн. Однако, неоднозначность выводов о связи ВКГ с генерацией турбулентности говорит о необходимости дальнейших экспериментальных исследований ВКГ с использованием как дистанционных, так и локальных средств измерений и применением спектральных методов обработки для разделения турбулентных и волновых флуктуаций. Без проведения таких исследований невозможно решить задачу параметризации волн в АПС для учета их вклада в обменные процессы в метеорологических и климатических моделях.

Авторы выражают благодарность О.Г. Чхетиани и И.А. Репиной за помощь в организации экспедиционных измерений. Экспедиционные работы в Цимлянске, Калмыкии и на Черноморском побережье в 2014–2016 гг., а также обработка, анализ и обобщение архивных данных содарных исследований, выполнены в рамках проекта РФФ № 14-27-00134. Разработка аппаратуры и ее изготовление, а также измерения в Московском регионе были поддержаны грантами РФФИ №№ 07-05-00521, 10-05-00802, 13-05 00846 и 16-05 01072. Измерения в Антарктике были выполнены при поддержке Академии наук Финляндии (проекты ASTREX и IS4FIRES) и Итальянской национальной программы исследования Антарктики PNRA (проекты RMO Concordia, COMPASS).

## Литература

[1] *Holtstag A.A.M., Svensson G., Baas P. et al.* Stable atmospheric boundary layers and diurnal cycles challenges for weather and climate models // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 2013. V. 94. P. 1691–1706.

[2] *Bosveld F.C., Baas P., Steeneveld et al.* The GABLS third intercomparison case for model evaluation, Part B. Results and process understanding // *Bound.-Layer Meteorol.* 2014. V. 152. P. 157–187.

[3] *Optis M., Monahan A., Bosveld F.C.* Limitations and breakdown of Monin-Obukhov similarity theory for wind profile extrapolation under stable stratification // *Wind Energy.* 2016. V. 19. P. 1053–1054.

[4] *Plougonven R., Zhang F.* Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts // *Rev. Geophys.* 2014. V. 52. P. 33–76.

[5] *Gifford F.A.* The breakdown of a low-level inversion studied by means of detailed sounding with a modified radiosonde // *Bull. Amer. Met. Soc.* 1952. V. 33. P. 373–379.

[6] *Lettau H.* Graphs and illustrations of diverse atmospheric states and processes observed during the Great Plains Turbulence Field Program. Report No. 1, Atmospheric Analysis Laboratory, 1954. Air Force Cambridge Research Center.

[7] *Blackadar A.K.* Boundary layer wind maxima and their significance for the growth of nocturnal inversions // *Bull. Am. Met. Soc.* 1957. V. 38(5). P. 283–290.

- [8] *Chimonas G.* The nighttime accelerations of the wind in the boundary layer // *Boundary-Layer Meteor.* 2005. V. 116. P. 519–531.
- [9] *Shapiro A., Fedorovich E.* Analytical description of a nocturnal low-level jet // *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 2010. V. 136. P. 1255–1262.
- [10] *Van de Wiel B.J.H., Moene A.F., Steeneveld G.J. et al.* A conceptual view on inertial oscillations and nocturnal low-level jets // *J Atmos. Sci.* 2010. V. 67(8). P. 2679–2689.
- [11] *Shapiro A., Fedorovich E., Rahimi S.* A Unified Theory for the Great Plains Nocturnal Low-Level Jet // *J. Atmos. Sci.* 2016. V. 73. No. 8. P. 3037–3057.
- [12] *Новожилов Н.И.* Турбулентная инверсия – результат деятельности мезоструи // *Метеорология и Гидрология.* 1963. № 3. С. 33–36.
- [13] *Воронцов П.А.* Струйные течения в атмосферном пограничном слое // *Труды ГГО.* 1967. Вып. 205. С. 77–92.
- [14] *Цверева И.Г.* Струйные течения в пограничном слое атмосферы // *Метеорология и Гидрология.* 1967. № 10. С. 33–36.
- [15] *Kallistratova M.A., Kouznetsov R.D., Kuznetsov D.D. et al.* The summertime low-level jet characteristics measured by sodars over rural and urban areas // *Meteorol. Z.* 2009. V. 18 (3). P. 289–295.
- [16] *Kallistratova M.A., Kouznetsov R.D.* Low-level jets in the Moscow region in summer and winter observed with a sodar network // *Bound.-Layer Meteorol.* 2012. V. 143. P. 159–175.
- [17] *Kallistratova M.A., Kouznetsov R.D., Kramar V.F., Kuznetsov D.D.* Profiles of vertical wind speed variances within nocturnal low-level jets observed with a sodar // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 2013. V. 30. P. 1970–1977.
- [18] *Бызова Н.Л.* Типовые характеристики нижнего 300-метрового слоя атмосферы по измерениям на высотной мачте. М.: Гидрометеиздат, 1982. 95 с.
- [19] *Каллистратова М.А., Кедрер Й., Петенко И.В., Тиме Н.С.* Опыт измерения профилей средней скорости ветра в нижней тропосфере содарным анемометром в инверсионных и конвективных условиях // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1985. Т. 21, № 5. С. 492–497.
- [20] *Каллистратова М.А., Петенко И.В., Шурыгин Е.А.* Содарные исследования поля скорости ветра в нижней тропосфере // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1987. Т. 23. С. 451–462.
- [21] *Kallistratova M.A.* Acoustic and radioacoustic remote sensing studies in CIS (Former USSR) // *Int. J. Remote Sensing.* 1994. V. 15. P. 251–266.
- [22] *Coulter R.L., Kallistratova M.A.* The role of acoustic sounding in a high-technology era // *Meteorol. Atmos. Phys.* 1999. V. 71. P. 3–13.
- [23] *Andreas E.L., Claffey K.J., Makshatas A.P.* Low-level atmospheric jets and inversions over the Western Weddell Sea // *Boundary-Layer Meteor.* 2000. V. 97. P. 459–486.
- [24] *Banta R.M., Newsom R.K., Lundquist J.K. et al.* Nocturnal low-level jet characteristics over Kansas during CASES-99 // *Boundary-Layer Meteor.* 2002. V. 105. P. 221–252.
- [25] *Banta R.M., Mahrt L., Vickers D. et al.* The very stable boundary layer on nights with weak low-level jets // *J. Atmos. Sci.* 2007. V. 64. P. 3068–3090.
- [26] *Wang Y., Klipp C.L., Garvey D.M. et al.* Nocturnal low-level-jet-dominated atmospheric boundary layer observed by a Doppler lidar over Oklahoma City during JU2003 // *J. Appl. Meteor. Climat.* 2007. V. 46. P. 2098–2109.
- [27] *Conangla L., Cuxart J.* On the turbulence in the upper part of the low-level jet an experimental and numerical study // *Boundary-Layer Meteorol.* 2006. V. 118(2). P. 379–400.

## 2.5. Содарные исследования волн Кельвина-Гельмгольца в низкоуровневых течениях

- [28] *Mitchell M.J., Arritt R.W., Labas K.* A climatology of the warm season Great Plains low-level jet using wind profiler observations // *Weather Forecasting*. 1995. V. 10. P. 576–591.
- [29] *Whiteman C.D., Bian X., Zhong S.* Low-level jet climatology from enhanced rawinsonde observations at a site in the Southern Great Plains // *J. Appl. Meteor.* 1997. V. 36. P. 1363–1376.
- [30] *Sjostedt D.W., Sigmon J.T., Colucci S.J.* The Carolina nocturnal low-level jet synoptic climatology and a case study // *Weather and Forecasting*. 1990. V. 5. P. 404–415.
- [31] *Lundquist J.K.* Intermittent and elliptical inertial oscillations in the atmospheric boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 2003. V. 60. P. 2661–2673.
- [32] *Sládkovič R., Kanter H.-J.* Low-level jet in the Bavarian pre-alpine region // *Arch. Meteor. Geophys. Bioklimatol.* 1977. V. 25A. P. 343–355.
- [33] *Mahrt L.* Stratified atmospheric boundary layers // *Bound.-Layer Meteor.* 1999. V. 90. P. 375–396.
- [34] *Mahrt L., Vickers D.* Contrasting vertical structures of nocturnal boundary layers // *Boundary-Layer Meteor.* 2002. V. 105. P. 351–363.
- [35] *Emeis S.* Wind speed and shear associated with low-level jets over Northern Germany // *Meteorol. Z.* 2014. V. 23. No. 3. P. 295–304.
- [36] *Thorpe S.A.* Experiments on instability and turbulence in a stratified shear flow // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 61. P. 731–751.
- [37] *Patterson M.D., Caulfield C.P., McElwaine J.N., Dalziel S.B.* Time-dependent mixing in stratified Kelvin-Helmholtz billows Experimental observations // *Geoph. Res. Lett.* 2006. V. 33. L15608.
- [38] *Peltier W.R., Caulfield C.P.* Mixing efficiency in stratified shear flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2003. V. 35. P. 135–167.
- [39] *Hicks J.J.* Radar observations of a gravitational wave in clear air near the tropopause associated with CAT // *J. Appl. Meteor.* 1969. V. 8. P. 627–633.
- [40] *Muschinski A.* Local and global statistics of clear-air Doppler radar signals // *Radio Science*. 2004. V. 39. RS1008. P. 23.
- [41] *Fukao S., Luce H., Mega T., Yamamoto M.K.* Extensive studies of large-amplitude Kelvin-Helmholtz billows in the lower atmosphere with VHF middle and upper atmosphere radar // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 2011. V. 137. P. 1019–1041.
- [42] *Gossard E.E., Richter J.H., Jensen D.R.* Effect of wind shear on atmospheric wave instabilities revealed by FM/CW radar observations. *Bound.-Layer Meteorol.* 1973. V. 4. P. 113–131.
- [43] *Cronenwett W.T., Walker G.B., Inman R.L.* Acoustic sounding of meteorological phenomena in the planetary boundary layer // *J. Appl. Meteorol.* 1972. V. 11. P. 1351–1358.
- [44] *Hall F.F. Jr.* Acoustic remote sensing of temperature and velocity structure in the atmosphere // *Proceed. of NATO Advanced Study Institute, Statistical Methods and Instrumentation in Radio Meteorology, April 15–22, 1971. Boulder.* P. 167–180.
- [45] *Kallistratova M.A., Petenko I.V.* Aspect sensitivity of sound backscattering in the atmospheric boundary layer // *Appl. Phys. B.* 1993. V. 57. P. 41–48.
- [46] *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
- [47] *Newsom R.K., Banta R.M.* Shear-flow instability in the stable nocturnal boundary layer as observed by Doppler lidar during CASES-99 // *J. Atmos. Sci.* 2003. V. 30. P. 16–33.
- [48] *Chapman D., Browning K.A.* Radar observations of wind-shear splitting within evolving atmospheric Kelvin-Helmholtz billows // *Quart. J. R. Met. Soc.* 1997. V. 123. P. 1433–1439.

- [49] *Nappo C.J., Miller D.R., Hiscox A.L.* Wave-modified flux and plume dispersion in the stable boundary layer // *Bound.-Lay. Meteorol.* 2008. V. 129. P. 211–223.
- [50] *Nappo C., Sun J., Mahrt L., Belušić D.* Determining wave–turbulence interactions in the stable boundary layer // *Bull. Am. Met. Soc.* 2014. V. 95. P. 11–13.
- [51] *Durden D.J., Nappo C.J., Leclerc M.Y. et al.* On the impact of wave-like disturbances on turbulent fluxes and turbulence statistics in nighttime conditions a case study // *Biogeosciences.* 2013. V. 10. P. 433–8443.
- [52] *Román-Cascón C., Yagüe C., Mahrt L. et al.* Interactions among drainage flows, gravity waves and turbulence a BLLAST case study. *Atmos. Chem. Phys.* 2015. V. 15. P. 9031–9047.
- [53] *Sun J., Nappo C.J., Mahrt L. et al.* Review of wave-turbulence interactions in the stable atmospheric boundary layer // *Rev. Geophys.* 2015. V. 53. P. 956–993.
- [54] *Sandu I., Beljaars A., Bechtold P. et al.* Why is it so difficult to represent stably stratified conditions in numerical weather prediction models? // *J. Adv. Model. Earth Syst.* 2013. V. 5. P. 17–133.
- [55] *Обухов А.М.* О рассеянии звука в турбулентном потоке // *Докл. АН СССР.* 1941. Т. 30. С. 611–614.
- [56] *Каллистратова М.А.* Экспериментальное исследование рассеяния звука в турбулентной атмосфере // *Докл. АН СССР.* 1959. Т. 125. № 1. С. 69–72.
- [57] *Каллистратова М.А.* Экспериментальное исследование рассеяния звуковых волн в атмосфере // *Труды ИФА АН СССР.* 1962. № 4. С. 203–256.
- [58] *Kallistratova M.A., Coulter R.L.* Application of sodars in the study and monitoring of the environment // *Meteorol. Atmos. Phys.* 2004. V. 85. P. 1–38.
- [59] *Kallistratova M.A.* Physical grounds for acoustic remote sensing of the atmospheric boundary layer // *Lecture Notes in Earth Sci.* V. 69. Acoustic Remote Sensing Application / S.P. Singal (Ed.). Springer-Verlag, 1997. P. 3–35.
- [60] *Кузнецов Р.Д.* Содар ЛАТАН-3 для исследований атмосферного пограничного слоя // *Оптика Атмос. Океана.* 2007. Т. 20 (8). С. 684–687.
- [61] *Kouznetsov R.D.* Multi-frequency sodar with high temporal resolution // *Meteorol. Z.* 2009. V. 18. No. 2. P. 69–173.
- [62] *Beyrich F.* Mixing height estimation from sodar data - A critical discussion // *Atmos. Environ.* 1997. V. 31. P. 3941–3953.
- [63] *Milionis A.E., Davies T.D.* Associations between atmospheric temperature inversions and vertical wind profiles a preliminary assessment // *Meteorol. Appl.* 2002. V. 9. P. 223–228.
- [64] *Arya S.P.S.* Parameterizing the height of the stable atmospheric boundary layer // *J. Appl. Meteorol.* 1981. V. 20 (10). P. 1192–1202.
- [65] *Garratt J.R.* Observations in the nocturnal boundary layer // *Bound. Layer Meteorol.* 1982. V. 22. P. 21–48.
- [66] *Banta R.M., Pichugina Y.L., Brewer W.A.* Turbulent Velocity-Variance Profiles in the Stable Boundary Layer Generated by a Nocturnal Low-Level Jet // *J. Atmos. Sci.* 2006. V. 63. P. 2700–2719.
- [67] *Coulter R.L.* A case study of turbulence in the stable nocturnal boundary layer // *Bound. Layer Meteorol.* 1990. V. 52. P. 75–91.
- [68] *Karipoti A., Leclerc M.Y., Zhang G. et al.* Influence of nocturnal low-level jet on turbulence structure and CO<sub>2</sub> flux measurements over a forest canopy // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. D10102.

[69] *Prabha T., Leclerc M., Karipot A. et al.* Influence of nocturnal low-level jets on eddy-covariance fluxes over a tall forest canopy // *Bound. Layer Meteorol.* 2008. V. 126. P. 219–236.

[70] *Bonin T.A., Blumberg W.G., Klein P.M., Chilson P.B.* Thermodynamic and Turbulence Characteristics of the Southern Great Plains Nocturnal Boundary Layer Under Differing Turbulent Regimes // *Bound. Layer Meteorol.* 2015. V. 157. P. 401–420.

[71] *Люлюкин В.С., Каллистратова М.А., Кузнецов Р.Д. и др.* Внутренние гравитационно-сдвиговые волны в атмосферном пограничном слое по данным акустической локации // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* 2015. Т. 51. № 2. С. 218–229.

[72] *Госсард Э., Хук В.* Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.

[73] *Kouznetsov R.D., Tisler P., Palo T., Vihma T.* Evidence of very shallow summertime katabatic flows in Dronning Maud Land, Antarctica // *J. Appl. Meteor. Climatology* 2013. V. 52. P. 164–168.

[74] *Kouznetsov R.D., Tisler P., Vihma T.* Multiple-point sodar observations of structures in the ABL over slightly sloped glacier in Antarctica in 2014–2015 summer. Presentation at 15th EMS Annual Meeting, 07–11 Sept 2015, Sofia, Bulgaria. Paper EMS2015. 281.

[75] *Petenko I., Argentini S., Casasanta G., Kallistratova M. et al.* Wavelike structures in the turbulent layer during the morning development of convection at Dome C, Antarctica // *Bound. Layer Meteorol.* 2016. V. 161(2). P. 289–307.

[76] *Argentini S., Pietroni I., Mastrantonio G. et al.* Use of a high-resolution sodar to study surface-layer turbulence at night // *Bound. Layer Meteorol.* 2011. V. 143. P. 177–188.

[77] *Petenko I., Mastrantonio G., Viola A., Argentini S., Pietroni I.* Wavy vertical motions in the ABL observed by sodar // *Bound. Layer Meteorol.* 2012. V. 143(1). P. 125–141.

[78] *Finnigan J.J., Einaudi F.* The interaction between an internal gravity wave and the planetary boundary layer. Part II Effect of the wave on the turbulence structure // *Quart. J. R. Met. Soc.* 1981. V. 107. P. 807–832.

[79] *Viana S., Yagüe C., Maqueda G.* Propagation and effects of a mesoscale gravity wave over a weakly-stratified nocturnal boundary layer during the SABLES2006 field campaign // *Bound. Layer Meteorol.* 2009. V. 133. P. 165–188.

[80] *Kouznetsov R.D.* The summertime ABL structure over an Antarctic oasis with a vertical Doppler sodar // *Meteorol. Z.* 2009. V. 18(2). P. 163–167.

[81] *Kouznetsov R.D., Kallistratova M.* Non-turbulent variances of doppler velocity components. Presentation at 17th Intern. Symp. for the Advancement of Boundary-Layer Remote Sensing (ISARS2014), 28–31 Jan. 2014, Auckland, New Zealand.

[82] *Petenko I.V., Bezverkhniy V.A.* Temporal scales of convective coherent structures derived from sodar data // *Meteorol. Atmos. Physics* 1999. V. 71. P. 105–116.

[83] *Lyulyukin V.S., Kouznetsov R.D., Kallistratova M.A.* The composite shape and structure of braid patterns in Kelvin-Helmholtz observed with a sodar // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 2013. V. 30. P. 2704–2711.

## 2.6. Исследование внутренних гравитационных волн от атмосферных фронтов

*С.Н. Куличков, И.П. Чунгузов, В.Г. Перепелкин*  
*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

### Введение

Инфразвуковые и внутренние гравитационные волны играют существенную роль в динамике атмосферных процессов [1].

Инфразвуковые волны распространяются на расстояния в сотни и тысячи километров от источников, проходя при эТ. в атмосфере области высот от земной поверхности до термосферы (высоты более 100 км). Это позволяет использовать инфразвук не только для пеленгации различных источников (взрывы, извержения вулканов, грозы, торнадо и др.) [2–3], но и для зондирования верхних слоев атмосферы [4–5]. Инфразвуковые волны могут являться также и предвестниками возникновения опасных атмосферных явлений, таких как смерчи и торнадо [6–8].

Внутренние гравитационные волны (ВГВ) имеют частоты ниже частоты Брента – Вейселя [1–3] и могут вносить заметный вклад в конвективные процессы в тропосфере, перенос энергии импульса между различными слоями в атмосфере, оказывать существенное влияние на процесс генерации турбулентности и турбулентное перемешивание [1, 6–10] в нижней и верхней атмосфере.

Ранее, экспериментальные работы по регистрации инфразвуковых и внутренних гравитационных волн от атмосферных фронтов проводились лишь эпизодически в разных странах, начиная приблизительно со второй половины XX столетия [1, 6–7, 11].

В настоящее время пробел в проведении регулярных систематических исследований ВГВ можно заполнить, используя данные международной сети инфразвукового мониторинга (IMS) режима выполнения Договора о Всеобъемлющем Запрещении Ядерных Испытаний [2–3]. Некоторые результаты таких исследований представлены в [11].

Накоплено значительное количество экспериментальных данных, однако какого-либо существенного продвижения в интерпретации результатов наблюдений ВГВ с точки зрения изучения процессов внутри областей, занятых атмосферными фронтами и вихрями, к настоящему времени еще не достигнуто.

Основным вопросом для дискуссии, по которому еще нет общепринятого мнения, является проблема поиска механизмов генерации инфразвука и внутренних гравитационных волн от атмосферных явлений. Предлагаются различные теории генерации инфразвука и ВГВ [12–16]. Наибольшее распространение получила традиционная вихревая теория Лайтхилла [14–16] генерации звука турбулентностью (что, по нашему мнению, наиболее приемлемо для инфразвука от единиц до десятых долей Гц). Для объяснения явления генерации более низкочастотного инфразвука (частоты в сотые доли Гц) предлагаются механизмы циклострофической адаптации вихревых возмущений в сжимаемой среде и гидродинамической неустойчивости сжимаемых сдвиговых течений и механизма излучения инфразвука, турбулентными пульсациями температуры при конденсационных процессах в облаках [12–13].

В [10] указывается, что важными источниками ВГВ являются также конвективные облака и грозы. Грозы являются нестационарным источником тепла, который генерирует волны в основном за счет нагрева атмосферы при образовании в облаке капель воды и последующего охлаждения атмосферы из-за испарения выпадающих осадков. Нагрев и охлаждение газа при образовании конвективных облаков происходит за счет фазовых переходов при конвективном движении влажного воздуха.

Следует отметить, что механизм генерации инфразвука турбулентными вихревыми структурами может, хотя бы схематично объяснить наблюдаемые значения (доли и единицы Паскалей) амплитуд инфразвуковых волн в интервале частот от единиц до сотых долей Гц [1, 6–7, 14–15]. В тоже время регистрируемые значения амплитуд ВГВ (десятки Паскалей) в области периодов 10–60 и более минут [8–9, 17] до сих пор еще не нашли своего общепринятого объяснения.

Достаточно подробные обзоры существующих теорий механизма генерации инфразвука и ВГВ разнообразными атмосферными процессами приведены в [6–7, 10].

Целью настоящей работы является развитие системы наблюдений инфразвука и ВГВ и анализ данных регистраций в периоды прохождения интенсивных атмосферных фронтов в московском регионе летом 2015 года.

Полученные экспериментальные данные могут внести определенный вклад в поиск дистанционных предвестников опасных атмосферных процессов [8–9, 17], а также позволить исследовать физические процессы непосредственно внутри мощных фронтальных конвективных структур, что не всегда можно осуществить традиционными дистанционными методами при помощи метеорологических радаров и спутников.

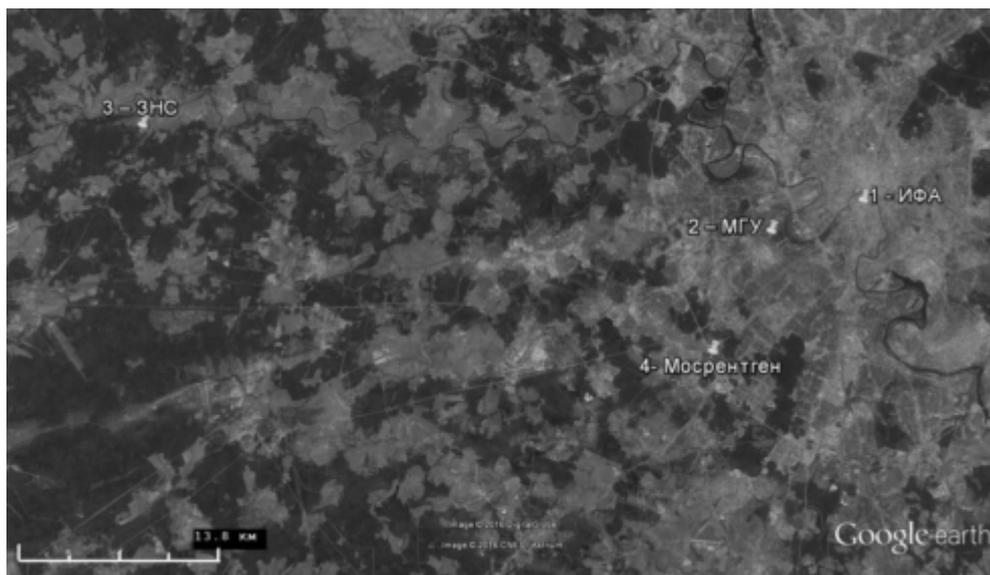
Наблюдения флуктуаций атмосферного давления в диапазоне частот инфразвуковых и внутренних гравитационных волн осуществлялись на группе из четырех микробарографах конструкции ИФА им. А.М. Обухова РАН [18–19], расположенных на территории г. Москвы (пункты ИФА, МГУ, Мосрентген) и Звенигородской научной станции ИФА им. А.М. Обухова РАН (ЗНС).

Конструкция микробарографов позволяет регистрировать флуктуации атмосферного давления в диапазоне частот от  $10^{-4}$  Гц до 3 Гц. Схема их расположения показана на рис. 1. В настоящей работе будут проанализированы внутренние гравитационные волны в диапазоне от частоты Брента – Вьяйсяля (около 0,003 Гц) до частоты нижней границы микробарографа  $10^{-4}$  Гц.

Динамика атмосферных фронтов в атмосфере во время проведения экспериментов рассчитывалась по прогностическим полям геопотенциала, температуры и ветра, полученных по модели COSMO-Ru [20].

## **1. Алгоритм диагностики атмосферных фронтов**

Атмосферные фронты – тонкие (относительно своих горизонтальных размеров) зоны с характерной толщиной от единиц до нескольких десятков километров, простирающиеся в горизонтальной плоскости на многие сотни или тысячи километров. В вертикальной плоскости фронтальные поверхности могут достигать тропопаузы. Обычно фронтальные поверхности разделяют сравнительно однородные синоптические массы воздуха, а прохождение фронта означает суще-



**Рис. 1.** Пространственное расположение микробарографов (1 – ИФА, 2 – МГУ, 3 – ЗНС, 4 – Мосрентген)

ственную смену погоды [21]. Степень однородности синоптических масс воздуха, разделенных фронтом, можно оценить с помощью корреляционных функций метеорологических полей.

Корреляционные функции метеорологических полей обычно имеют существенно меньшие значения в случае определения этих функций для точек, разделенных фронтом, по сравнению с аналогичными значениями, когда эти точки принадлежат одной существенно более крупной (по сравнению с толщиной фронта) синоптической массе воздуха при одном и том же расстоянии между парой точек [21–22].

Атмосферные фронты в модели динамики идеального газа представляют собой двумерные поверхности. В реальной атмосфере, а также в моделях, включающих турбулентную вязкость, речь идет о перемещающихся со временем очень тонких (по сравнению с горизонтальными размерами) зонах в атмосфере, имеющих достаточно сложную геометрию и топологию.

Технология построения поверхности, моделирующей атмосферный фронт по значениям метеорологических полей (геопотенциал, температура, ветер) в точках регулярной сетки использует три предиктора:

1) наибольшее собственное число симметричной матрицы Гессе (гауссова кривизна графика):

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 H & \partial_{xy}^2 H \\ \partial_{yx}^2 H & \partial_{yy}^2 H \end{pmatrix},$$

где  $H$  – геопотенциал,

2) наибольшее собственное число симметричной матрицы

$$\begin{pmatrix} \partial_y u & (\partial_y v - \partial_x u)/2 \\ (\partial_y v - \partial_x u)/2 & -\partial_x v \end{pmatrix},$$

где  $\langle u, v \rangle$  – компоненты ветра в направлениях  $\langle x, y \rangle$ ,

3) горизонтальный градиент температуры  $|\nabla T|$ .

Определение оптимальных весовых функций (зависящих от сезона и барического уровня, на котором строятся линии фронтов), с которыми эти предикторы входят в результирующий предиктор (по значениям которого определяются точки сетки, составляющие атмосферный фронт, а также тип и интенсивность фронта) были определены с помощью специальной процедуры статистической оптимизации ([21–23]).

Области фронтов на различных барических уровнях оцениваются в этой технологии независимо. При сопоставлении результатов таких расчетов пространственная форма фронтов получается в виде кусочно-гладких двумерных поверхностей.

Ниже нами использовались данные о фронтах на приземном барическом уровне 925 гПа.

Анализ данных регистрации флуктуаций атмосферного давления проводился традиционными методами. Определялись спектральная плотность сигнала; когерентность между различными записями на сети микробарографов, значения суммы фаз между записями на сети микробарографов, азимуты приходов и фазовые скорости регистрируемых внутренних гравитационных волн.

Рассчитанные азимуты направлений прихода сигналов сравнивались с направлениями на атмосферные фронты.

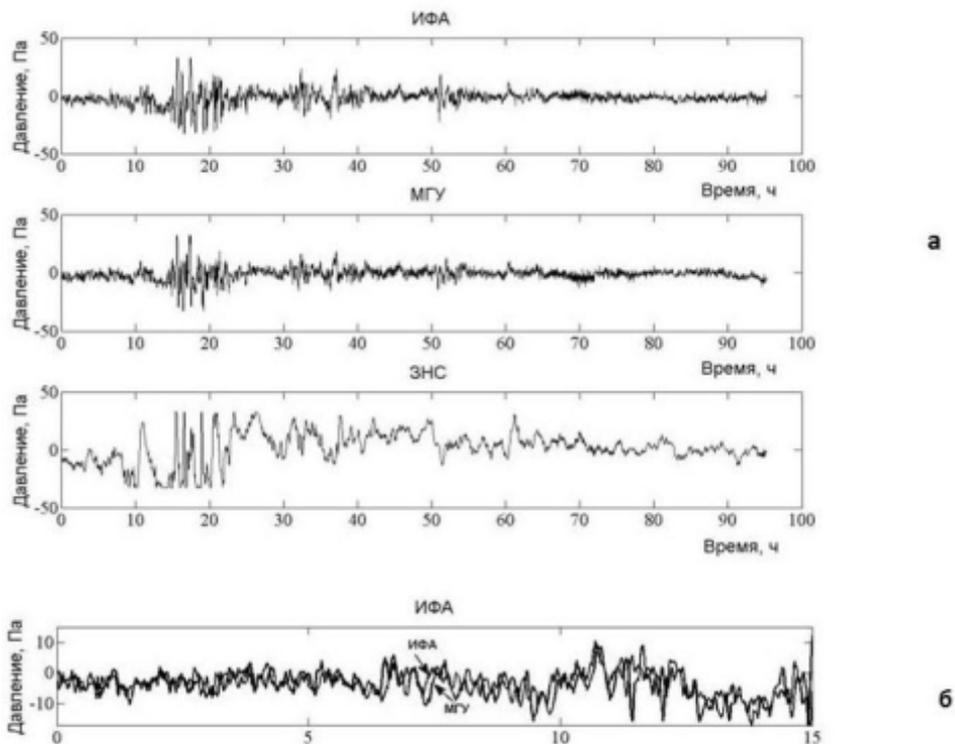
## 2. Данные регистрации ВГВ при прохождении атмосферного фронта в июне 2015 г.

Результаты регистрации флуктуаций атмосферного давления от атмосферных фронтов 26–30 июня 2015 года показаны на рис. 2 (пункт №4 в это время еще не был введен в эксплуатацию).

На рис. 2 б видно подобие записей сигналов в пунктах ИФА и МГУ. При этом время прихода сигнала в пункт МГУ запаздывает на несколько минут от соответствующего времени прихода сигнала в пункт ИФА.

Первоначально, с помощью фильтра Чебышева второго порядка [24] осуществляется удаление составляющих сигнала с частотами вне исследуемого в настоящей работе диапазона внутренних гравитационных волн (0,0001–0,003 Гц).

Далее, записи сигналов обрабатывались с использованием традиционной методики спектрально-когерентного анализа [25–26]. Наличие волнового процесса (в нашем случае – ВГВ) в регистрируемом сигнале определялось не только по вычисленным высоким значениям коэффициента когерентности  $K$  ( $K > 0,6$ ), но и по равным нулю значениям суммы  $\Delta\varphi$  разностей фаз регистрируемых сигналов (где  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{1,2} + \Delta\varphi_{2,3} + \Delta\varphi_{3,1}$ ;  $\Delta\varphi_{i,j}$  – разность фаз между сигналами в пунктах с номерами  $i$  и  $j$ ; в рассматриваемых ниже случаях значения  $i$  и  $j$  изменялись от 1 до 3, [25–26]).



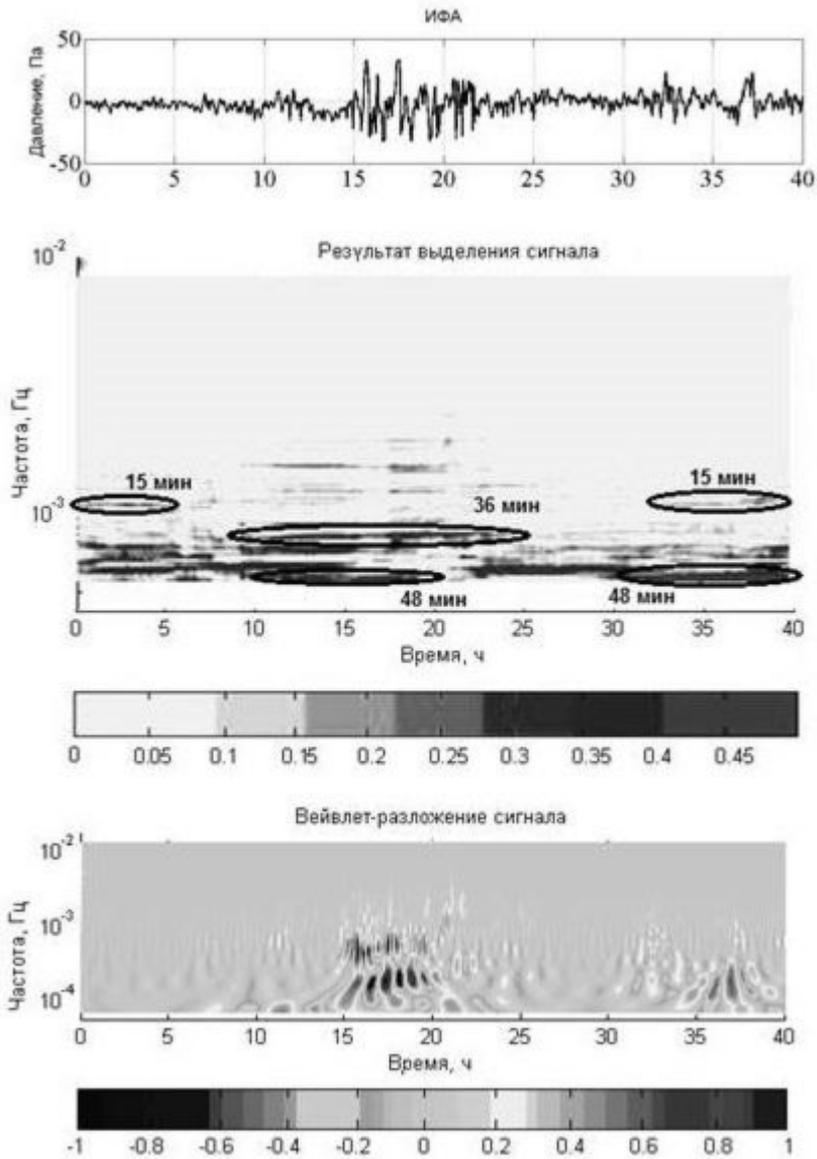
**Рис. 2.** Результаты регистрации флуктуаций атмосферного давления 26–30 июня 2015 года на микробарографах 1–3 на рис. 1. Время начала записи соответствует 12 часам Московского времени 26 июня 2015 г. По вертикальной оси – амплитуда давления в Па; По горизонтальной – время в часах от начала записи

Ниже, приведены результаты обработки записей на рис. 2.

На рис. 3 показано изменение во времени значений спектральной плотности, которая считалась в скользящем окне величиной 4 часа со сдвигом 1 минута, а также результаты вейвлет-анализа (использовался вейвлет Морле [27–28]). Хорошо видны области регистрации внутренних гравитационных волн в диапазоне периодов от 12 минут до 3 часов практически на протяжении всей записи на рис. 2.

Из рис. 3 видно наличие в значениях спектральной плотности регистрируемого сигнала квазигармонических компонент в достаточно узких диапазонах частот ВГВ (узкие полосы в развертке по вертикали на рис. 3). Данные компоненты, хорошо выделяются практически на всем интервале времени регистрации сигнала от атмосферного фронта.

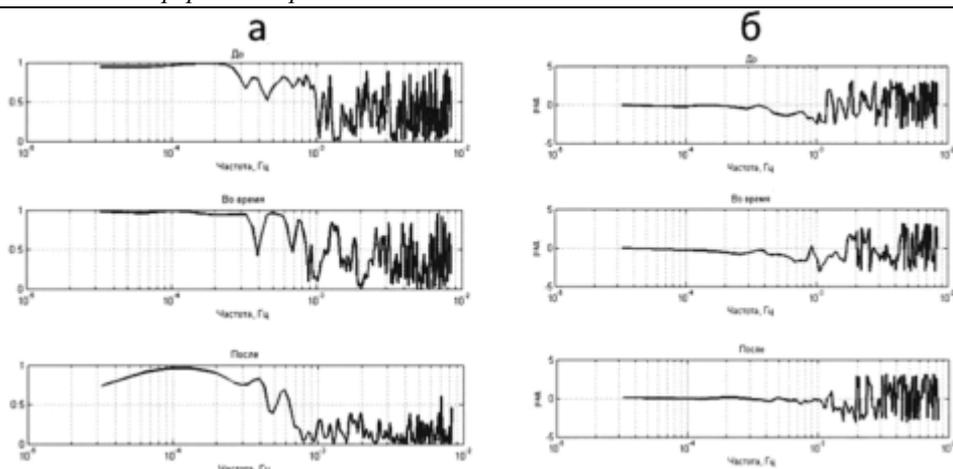
Проведенный вейвлет-анализ (нижняя панель на рис. 3) позволяет выделить в этом сигнале отдельные волновые пакеты (похожие на базисную функцию вейвлета). Необходимо отметить, что выявленные волновые пакеты могут указывать на развитие отдельных структур в областях внутри атмосферных фронтов, что вероятно позволит в дальнейшем разработать методику их дистанционной диагностики.



**Рис. 3.** Запись флуктуаций атмосферного давления 26–28 июня 2015 г. – верхняя панель. Значения спектральной плотности – средняя панель. Результаты обработки с использованием вейвлета Морле [27–28] – нижняя панель. По горизонтальной оси везде время в часах от начала записи

На рис. 4 представлены графики когерентности (левые панели на рис. 4), суммы фаз (правые панели на рис. 4) до, во время и после прохождения атмосферного фронта над пунктами регистрации.

Из рис. 4 видно, что когерентность между сигналами, регистрируемыми в различных пунктах имеет достаточно высокие значения в области периодов внут-



**Рис. 4.** Значения коэффициента когерентности между записями в ИФА и МГУ для отдельных фрагментов регистраций флуктуаций атмосферного давления для различных интервалов времени (а). Суммарная разность фаз для отдельных фрагментов записей флуктуаций атмосферного давления для различных интервалов времени (б). Верхние панели – до прохождения атмосферного фронта над пунктами регистрации (интервал 4–10 часов после начала регистрации сигнала на рис. 2). Средние панели – во время прохождения атмосферного фронта над пунктами регистрации (интервал 15–21 часов после начала регистрации сигнала на рис. 2). Нижние панели – после прохождения атмосферного фронта над пунктами регистрации (интервал 80–91 часов после начала регистрации сигнала на рис. 2)

ренных гравитационных волн. При этом значения суммы фаз  $\Delta\varphi$  имеют в диапазоне ВГВ величины близкие к нулю, что является свидетельством о регистрации волнового процесса [25–26].

Следует также отметить на рис. 2б и рис. 3 наличие волновых «предвестников» прохождения атмосферного фронта с характерными периодами 15–20 минут. Время регистрации таких «предвестников» на 15 и более часов опережает время прохождения атмосферного фронта над группой микробарографов. Фазовые скорости распространения этих волн около 20 м/сек (рис. 5). Подобные «предвестники» прохождения атмосферного фронта в диапазоне периодов внутренних гравитационных волн впервые были обнаружены в [8–9].

В [8–9] указывалось также на возможность использования данных регистрации внутренних гравитационных волн для заблаговременного (несколько часов) прогноза прохождения атмосферных фронтов.

На рис. 6 представлены графики измеренных азимутов прихода ВГВ до, во время и после прохождения атмосферного фронта. Дополнительно, на рис. 6 представлены фрагменты синоптических карт, рассчитанных по модели COSMO-гу, [20], и атмосферных фронтов, построенных по технологии [21], соответствующих интервалам времени регистрации сигналов группой микробарографов.

Из рис. 6 следует, что азимут прихода сигнала до и во время прохождения фронта соответствует значениям около 310 градусов, т. е. сигнал приходит с север-северо-запада. После прохождения фронта сигнал приходит с юго-востока и азимут составляет около 100 градусов. Такое изменение азимута прихода ВГВ

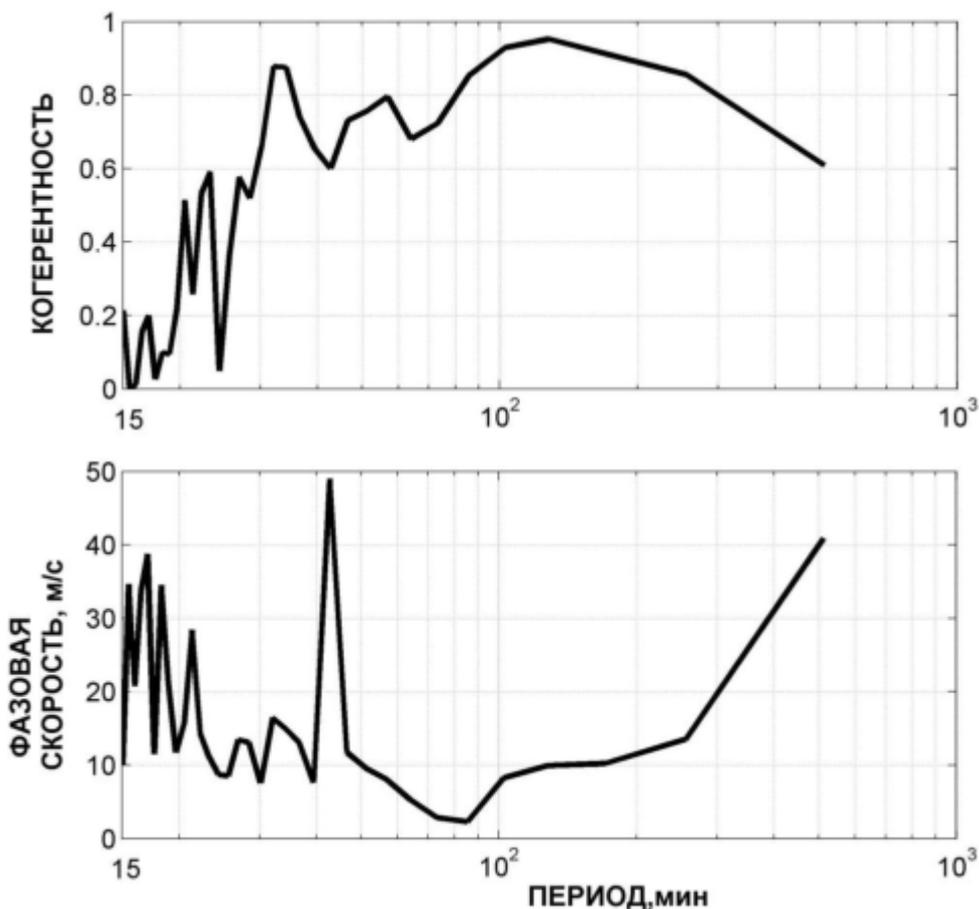


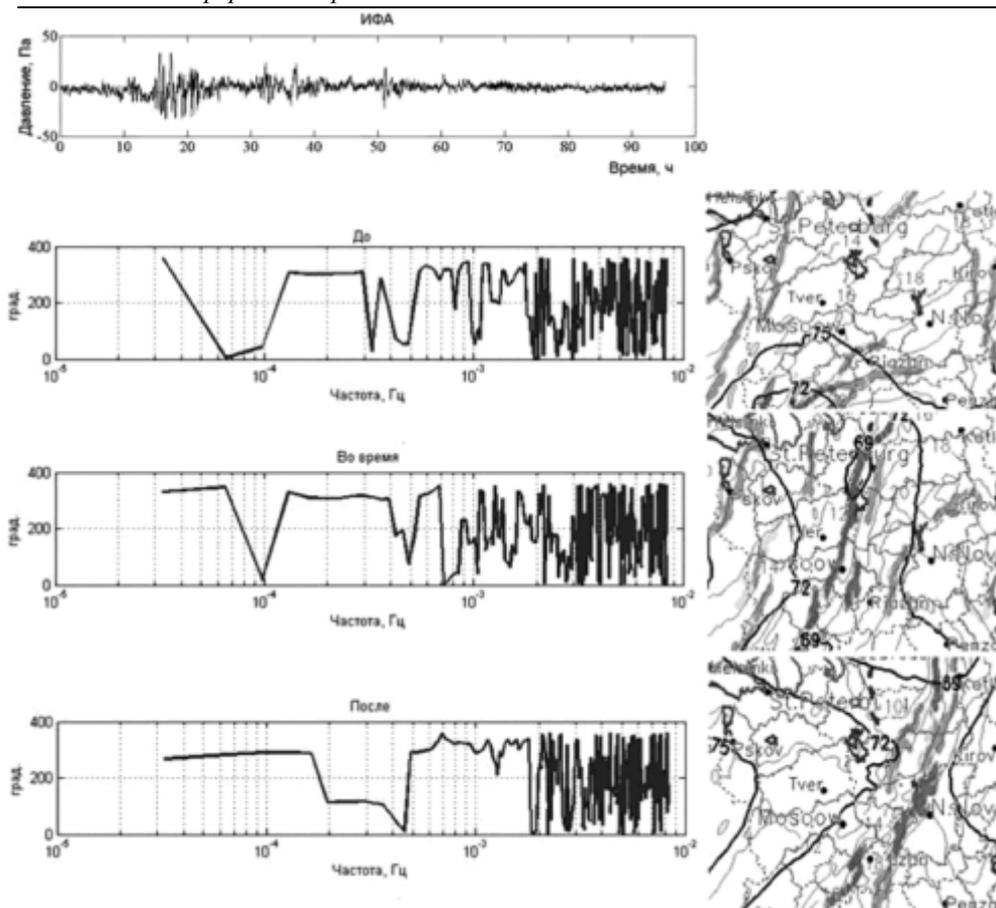
Рис. 5. Значения коэффициента когерентности между записями в ИФА и МГУ (верхняя панель) и фазовых скоростей распространения внутренних гравитационных волн (нижняя панель) для записей на рис. 2

соответствует прохождению атмосферного фронта через район наблюдений (см. рис. 6). Внутренние гравитационные волны генерируются фронтом и в этом случае, но в пункты регистрации они уже приходят с противоположного направления.

Некоторые вариации в изменении азимутов прихода ВГВ на рис. 6 вероятно связаны с тем, что размеры интенсивных фронтальных областей на рис. 6, много больше расстояний от этих областей до пунктов регистрации. Вследствие чего в пункты регистрации с различных азимутальных направлений могут приходить ВГВ, генерируемые отдельными участками фронтов, имеющими большие горизонтальные размеры.

В наших экспериментах одновременно с регистрацией флуктуаций атмосферного давления проводились также измерения скорости ветра с помощью акустического локатора – содара.

На рис. 7 видна взаимосвязь между флуктуациями скорости ветра и флуктуациями атмосферного давления при прохождении атмосферного фронта. Незначительное ограничение амплитуды сигнала флуктуаций атмосферного давления на



**Рис. 6.** Азимуты прихода и синоптические карты, для отдельных фрагментов записей флуктуаций атмосферного давления для различных интервалов времени (первая панель). Вторая панель – до прохождения атмосферного фронта над пунктами регистрации (интервал 4–10 часов после начала регистрации сигнала на рис. 2). Третья панель – во время прохождения атмосферного фронта над пунктами регистрации (интервал 15–21 часов после начала регистрации сигнала на рис. 2). Четвертая панель – после прохождения атмосферного фронта над пунктами регистрации (интервал 80–91 часов после начала регистрации сигнала на рис. 2)

рис. 7 и на отдельных рисунках далее определяется установленной высокой чувствительностью микробарографов, что было необходимым для регистрации предвестников прохождения атмосферных фронтов.

На рисунке 8 показаны результаты вычисления кросс-когерентности (в диапазоне от 15 минут до 3 часов) между вариациями атмосферного давления и горизонтальной скорости ветра на высоте 200 метров.

Из рисунка 8, также, как и из рис. 3, можно сделать вывод о наличии характерных доминантных периодов, на которых все парные кросс-когерентности имеют локальные максимумы, соответствующие волновым структурам. Эти периоды расположены в диапазонах 20–29; 37–47; 62–72 и 100–110 минут. Соответствующие этим доминантным периодам, показанным на рис. 5, фазовые скорости распро-

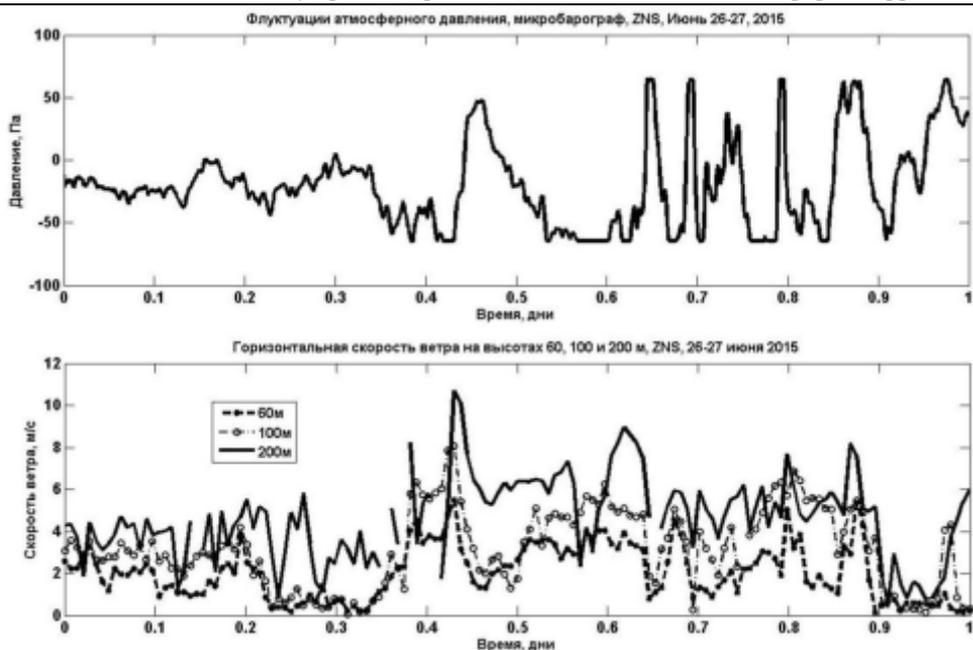


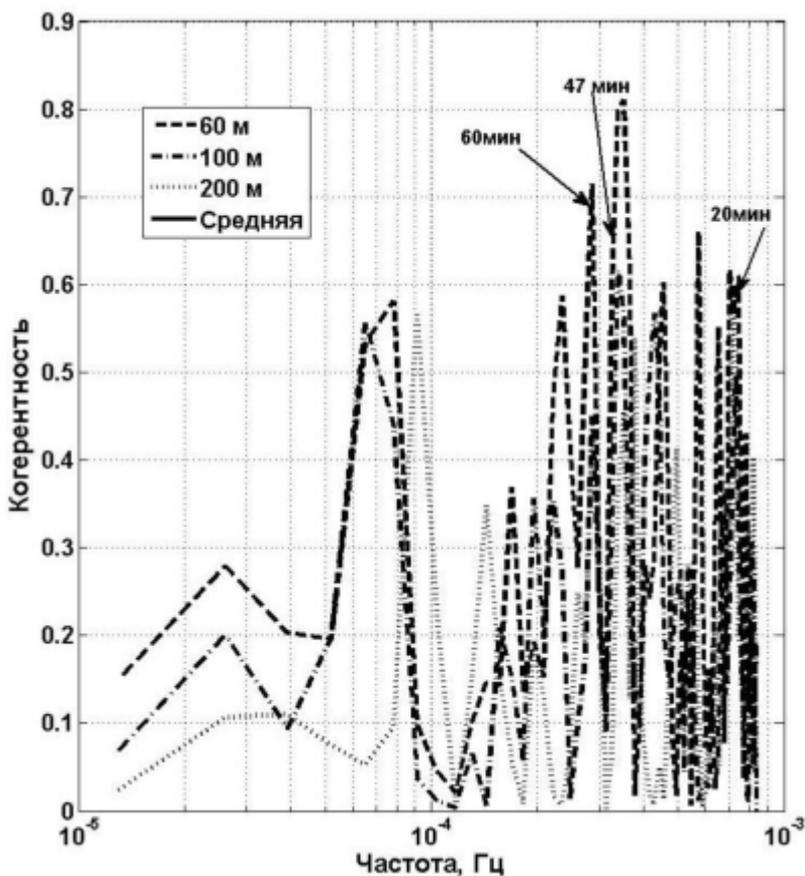
Рис. 7. Флуктуации атмосферного давления в пункте ЗНС на рис. 1 – верхняя панель. Значения горизонтальной скорости ветра на высотах 60, 100 и 200 метров – нижняя панель

странения волновой структуры лежат в интервале 15–25 м/с, а горизонтальные длины волн меняются от 52 км на периоде 35 мин до 99 км на периоде 110 мин.

### 3. Данные регистрации ВГВ при прохождении атмосферного фронта в июле 2015 г.

Результаты регистрации флуктуаций атмосферного давления в период времени 22–29 июля 2015 года на сети микробарографов 1–3 (см. рис. 1) во время прохождения грозового фронта показаны на рис. 9. Время начала записи на рис. 9 соответствует 17 часам 22 минутам Московского времени 22 июля 2015 г.

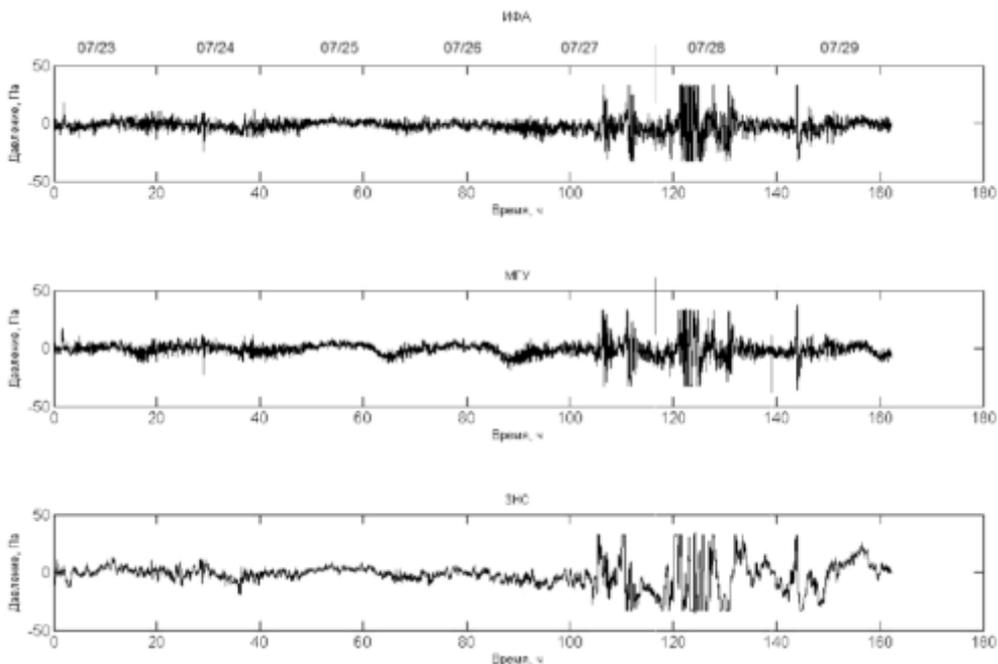
Синоптические карты за этот период времени, построенные по модели COSMO-ru, в нашем распоряжении отсутствуют. Однако, проведенный анализ синоптической обстановки по реальным данным показывает следующую картину динамики атмосферных фронтов в московском регионе. Приближение слабого теплого фронта наблюдалось с запада-юго-запада, начиная с 12 часов 22 июля 2015 года (здесь и далее время московское). Скорость перемещения фронта составляла 25–30 км/час. Затем фронт окклюдировался. Увеличенный фрагмент регистрируемого волнового процесса для этого периода времени показан на рис. 10. Примерно в 00:00 часов 24 июля 2015 года фронт ушел из московского региона. Каких-либо существенных флуктуаций атмосферного давления в диапазоне ВГВ, показанных на рис. 9, в это время не наблюдалось. Однако, как видно из рис. 10, ВГВ незначительной амплитуды регистрировались и в это время. Об эт. свидетельствуют также и результаты обработки, показанные на рис. 11.



**Рис. 8.** Коэффициент кросс-когерентности между вариациями атмосферного давления и горизонтальной скорости ветра на высотах 60, 100 и 200 метров

Характерные периоды волн, наблюдаемых здесь в период времени от 10 до 30 часов от начала записи сигнала на рис. 11, имели значения в диапазоне 50–60 минут. В последующее время примерно до 00:00 часов 27 июля каких-либо интенсивных фронтов в московском регионе не отмечалось. О чем свидетельствуют и записи флуктуаций атмосферного давления на рис. 9, на которых существенных изменений в диапазоне внутренних гравитационных волн не наблюдается. Примерно с 12:00 28 июля 2015 года к московскому региону начинает приближаться теплый фронт с запада. В это время и на записях флуктуаций атмосферного давления на рис. 9 начинают проявляться существенные изменения в диапазоне периодов внутренних гравитационных волн.

На протяжении практически всего периода времени 28 июля московский регион находится в области интенсивного атмосферного фронта, сопровождающегося мощной кучевой облачностью, грозами и ливневыми дождями. На записях флуктуаций атмосферного давления на рис. 9 и в результатах обработки на рис. 11 отчетливо видны существенные колебания в диапазоне частот ВГВ рассматриваемых в настоящей работе ( $3 \times 10^{-3} - 10^{-4}$  Гц). В 12:00 29 июля атмосферный



**Рис. 9.** Результаты регистрации флуктуаций атмосферного давления 22–29 июля 2015 года на сети микробарографов 1–3 (см. рис. 1). Время начала записи соответствует 17 часам 22 минутам 18 секундам Московского времени 22 июля 2015 г. По вертикальной оси – амплитуда давления в Па; по горизонтальной – время в часах от начала записи

фронт ушел на восток от московского региона. Амплитуда колебаний атмосферного давления, как это видно на рис. 8, в это время существенно уменьшилась.

На рис. 12–13 представлены графики когерентности (рис. 12-а), суммы фаз (рис. 12-б), а также азимуты (рис. 13) до, во время и после прохождения фронта над пунктами наблюдений (см. рис. 1).

Из рис. 13 следует, что в области частот, для которых сумма фаз на рис. 12-б близка к нулю, азимут прихода ВГВ до и во время прохождения фронта через район расположения микробарографов соответствует  $270^\circ$  градусам. Сигнал приходит с запада, после же прохождения фронта азимут меняется и становится равным  $140^\circ$  градусов, что соответствует направлению прихода с юг-юго-востока. Изменение азимута на  $130^\circ$  свидетельствует об изменении направления прихода сигнала, вследствие изменения положения фронта относительно пунктов регистрации и подтверждает, что найденный сигнал является именно сигналом от атмосферного фронта.

### Заключение

В настоящей работе приведены результаты исследования внутренних гравитационных волн во время прохождения атмосферных фронтов в московском регионе в июне–июле 2015 года.

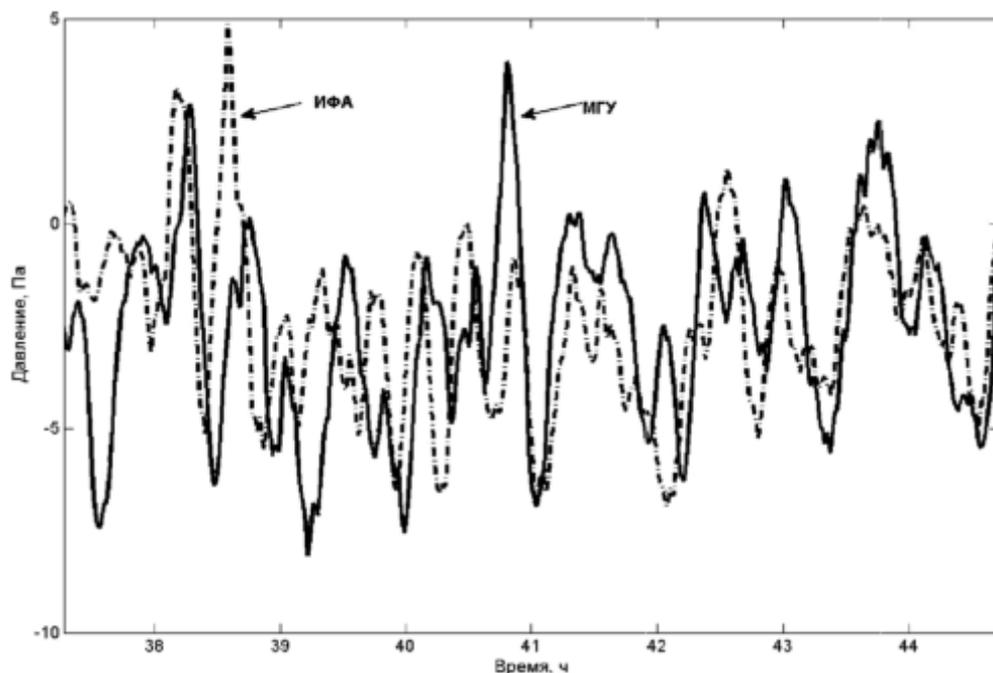


Рис. 10. Фрагмент регистрации в пунктах ИФА и МГУ в интервале времени 35–45 часов для сигнала, показанного на рис. 9

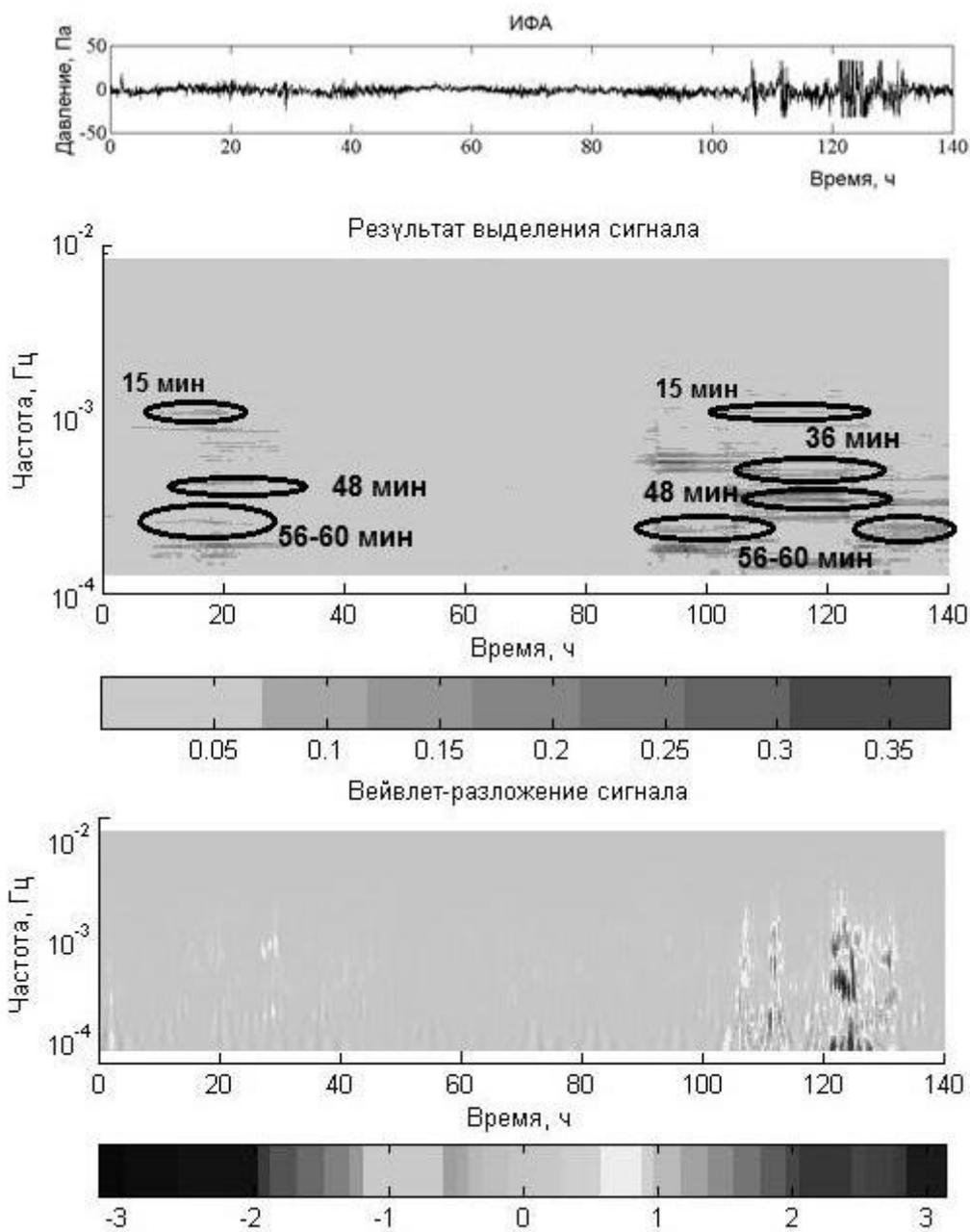
Регистрация ВГВ осуществлялась на группе из микробарографов конструкции ИФА им. А.М. Обухова РАН с расстояниями между ними от 7-ми до 54 километров.

Исследовалась закономерность изменения параметров ВГВ (пространственной когерентности, характерных масштабов, направления и горизонтальной скорости распространения, амплитуды) по мере приближения атмосферного к сети наблюдения, в период его прохождения и последующего периода, когда сеть наблюдения оказывается внутри циклона.

Исследования могут быть полезными в понимании взаимосвязи между проявлениями внутренних гравитационных волн в различных слоях атмосферы.

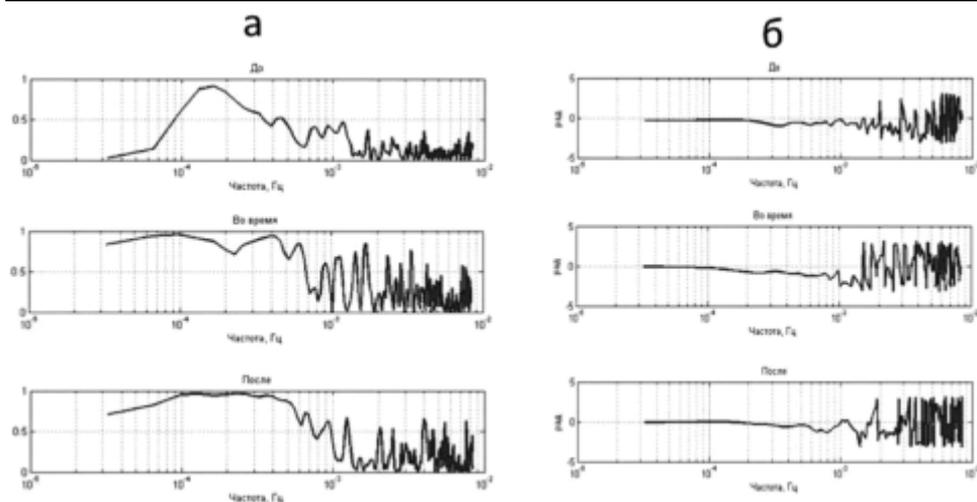
Показано, что в области периодов, превышающих 30 минут, ВГВ являются когерентными между пунктами, разнесенными на горизонтальные удаления около 60 километров. Следовательно, волновые возмущения атмосферного давления, генерируемые фронтами, сохраняют высокую когерентность ( $0.6 \div 0.9$ ) на площадях с горизонтальными размерами в несколько десятков километров.

Показано наличие в записях флуктуаций атмосферного давления волновых «предвестников» прохождения атмосферного фронта с характерными периодами 15–20 минут. Время регистрации таких «предвестников» на 15 и более часов опережает время прохождения атмосферного фронта над группой микробарографов. Фазовые скорости распространения этих волн больше скорости ветра и имеют значения более 20 м/сек. Что указывает на возможность использования данных регистрации внутренних гравитационных волн для заблаговременного в реальном времени прогноза прохождения атмосферных фронтов за несколько часов.



**Рис. 11.** Регистрируемый сигнал 22–29 июля 2015 года – верхняя панель. Значения спектральной плотности – средняя панель

Показано также наличие когерентности между волновыми флуктуациями атмосферного давления и флуктуациями горизонтальной скорости ветра в интервале высот 60–200 метров.



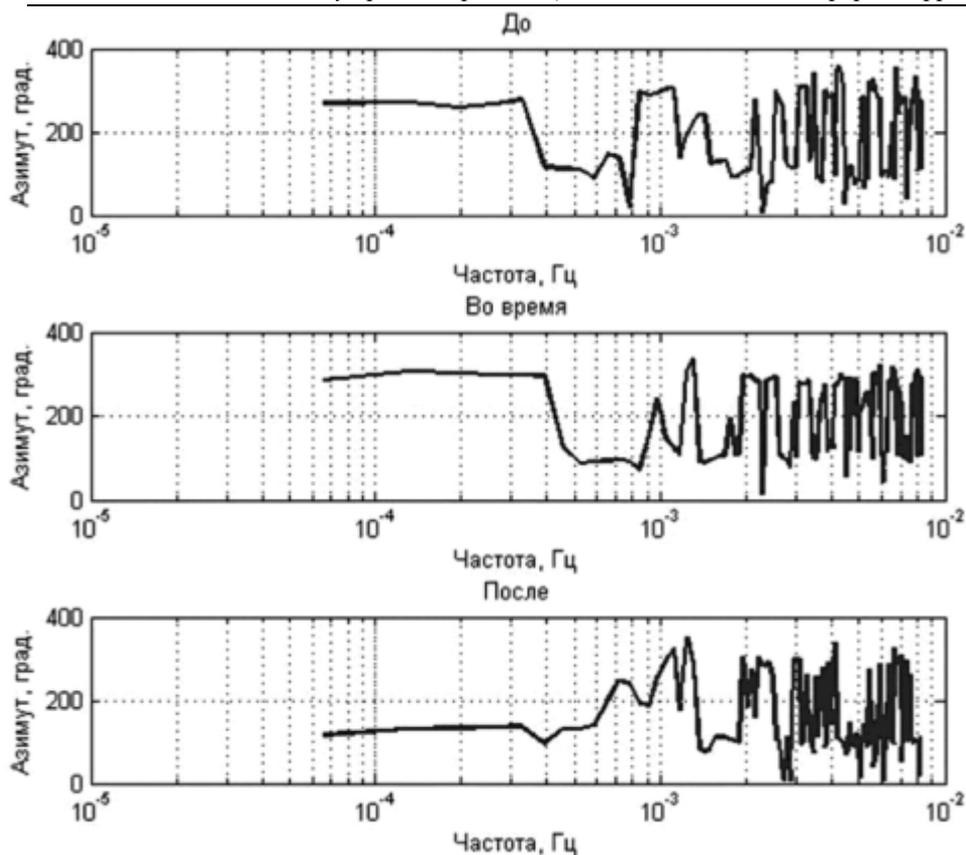
**Рис. 12.** Графики коэффициента когерентности между записями в ИФА и МГУ для сигнала 22–29 июля 2015 (а) и суммы фаз (б) до (60–65 часы после начала регистрации), во время (110–115 часы после начала регистрации) и после (150–155 часы после начала регистрации) прохождения фронта района расположения микробарографов

Совместный анализ данных флуктуаций атмосферного давления и горизонтальной скорости ветра выявил наличие доминантных периодов, на которых все парные кросс-когерентности имеют локальные максимумы. Эти периоды расположены в ориентировочных диапазонах 20–29; 37–47; 62–72; и 100–110 минут. Соответствующие доминантным периодам фазовые скорости распространения ВГВ лежат в интервале 15–25 м/с, а горизонтальные длины волн меняются от 52 км на периоде 35 мин до 99 км на периоде 110 мин.

Выявленные в записях флуктуаций атмосферного давления на группе микробарографов отдельные волновые пакеты и их динамика во времени могут указывать на развитие отдельных структур в области занимаемой атмосферными фронтами, что вероятно позволит в дальнейшем разработать методику их дистанционной диагностики.

## Литература

- [1] Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
- [2] Marty J. Overview of the IMS infrasound network and engineering projects // Proceedings Infrasound Technology Workshop 2014. Vienna 13–16 October 2014. Vienna, Austria. 2014.
- [3] Pierrick Miale. IDC Infrasound technology developments // Proc. Infrasound Technology Workshop. Austria. Vienna. October 12–16, 2015. <http://forum.ctbto.org/display/NDC/ITW2015/>
- [4] Куличков С.Н. Об акустическом зондировании неоднородных структур в средней атмосфере // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1998. Т. 34. №1. С. 5–11.
- [5] Чунчуров И.П., Куличков С.Н., Попов О.Е., Перепелкин В.Г., Васильев А.П., Глушков А.И., Фирстов П.П. Характеристики тонкой вертикальной структуры ветра в



**Рис. 13.** Графики азимутов для сигнала 22–29 июля 2015 до (60–65 часы после начала регистрации), во время (110–115 часы после начала регистрации) и после (150–155 часы после начала регистрации) прохождения фронта района расположения микробарографов

стратосфере и нижней термосфере по инфразвуковым сигналам в области акустической тени // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 1. С. 69–87.

[6] *Калашиник М.В.* Генерация внутренних гравитационных волн вихревыми возмущениями в сдвиговом потоке // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 6. С. 1–10.

[7] *Plougonven R., Zhang F.* Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts. // Rev. Geophys. 2014. V. 52. P. 1–37.

[8] *Грачев А.И., Данилов С.Д., Куличков С.Н., Свертилов А.И.* Основные характеристики внутренних гравитационных волн в нижней атмосфере от конвективных штормов. // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. № 6. С. 759–767.

[9] *Грачев А.И., Куличков С.Н., Чунгузов И.П., Отрезов А.И.* Акустико-гравитационные волны от атмосферных штормов / Под ред. Г.С. Голицына, А.И. Васильева // Гидрометеорологические опасности. М.: Крук, 2001. С. 199–221.

[10] *Кшевещкий С.П., Куличков С.Н.* Влияние внутренних гравитационных волн от конвективных облаков на атмосферное давление и пространственное распределение возмущений температуры // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 1. С. 52–59.

- [11] *Blanc E., Farges T., Le Pichon A., Heinrich P.* Ten year observations of gravity waves from thunderstorms in western Africa // *J. Geophys. Res. Atmos.* 2014. V. 119. P. 6409–6418.
- [12] *Нетреба С.Н.* Инфразвуковые колебания атмосферного давления при интенсивных конвективных возмущениях // IV Всесоюзная научно-техническая конференция "Современные проблемы океанологии". Севастополь, 1989. С. 26–27.
- [13] *Нетреба С.Н., Свиркунов П.Н.* О возможности прогноза интенсивности циклонов по изменчивости амплитуды пульсаций давления // *Метеорология и гидрология.* 1995. № 3. С. 28–36.
- [14] *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. I. General theory // *Proc. Roy. Soc. (London) A.* 1952. V. 211. № 1107. P. 564–587.
- [15] *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // *Proc. Roy. Soc. (London) A.* 1954. V. 222. P. 1–32.
- [16] *Гостинцев Ю.А., Иванов Е.А., Куличков С.Н. и др.* О механизме генерации инфразвуковых волн в атмосфере большими пожарами // *Докл. АН СССР.* 1985. Т. 283. № 3. С. 573–576.
- [17] *Грачев А.И., Куличков С.Н., Матвеев А.К.* Квазипериодические флуктуации атмосферного давления с периодами 20–180 минут // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1988. Т. 25. № 4. С. 339–347.
- [18] *Бовшеев В.М., Грачев А.И., Ломадзе С.О., Матвеев А.К.* Жидкостный микробарограф // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1979. Т. 15. № 2. С. 1215–1217.
- [19] *Куличков С.Н., Буш Г.А., Пережёлкин В.Г., Кузнецов Р.Д., Каллистратова М.А.* Патент на полезную модель № 83625. Малогабаритный барограф ИФА РАН // Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации 10 июня 2009 г.
- [20] *Ривин Г.С., Розинкина И.А., Вильфанд Р.М., Алферов Д.Ю., Астахова Е.Д., Блинов Д.В., Бундель А.Ю., Казакова Е.В., Курсанов А.А., Никитин М.А., Перов В.Л., Суркова Г.В., Ревокатова А.П., Шатунова М.В., Чумаков М.М.* Система COSMO-Ru негидростатического мезомасштабного краткосрочного прогноза погоды Гидрометцентра России: второй этап реализации и развития // *Метеорология и гидрология.* 2015. № 6. С. 58–71.
- [21] *Быков Ф.Л., Гордин В.А.* Трёхмерный объективный анализ структуры атмосферных фронтов // *Изв. АН. Физика атмосферы и океана.* 2012. Т. 48(2). С. 172–188.
- [22] *Быков Ф.Л., Гордин В.А.* О статистической связи атмосферных фронтов и осадков. Труды гидрометеорологического научно-исследовательского центра Российской Федерации. 2012. Вып. 348. С. 184–194.
- [23] *Гордин В.А.* Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 733 с.
- [24] *Daniels R.W.* Approximation Methods for Electronic Filter Design. New York: McGraw-Hill, 1974. 448 с.
- [25] *Грачев А.И., Загоруйко С.В., Матвеев А.К.* Некоторые результаты регистрации атмосферных внутренних волн // *Изв. РАН, Физика атмосферы и океана.* 1978. Т. 14(5). С. 474–483.
- [26] *Cansi Y.* An automated seismic event processing for detection and location: The P.M.C.C. method // *Geophys. Res. Lett.* 1995. V. 22. P. 1021–1024.
- [27] *Welch P.D.* The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms // *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics.* 1967. V. AU-15. P. 70–73.
- [28] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001. 464 с.

## **Глава 3. Взаимодействие атмосферы и океана**



### **3.1. Взаимодействие атмосферы и океана при различных фоновых условиях**

*И.А. Репина, А.Ю. Артамонов*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

#### **Введение**

В настоящее время очевидно, что без учета реальных характеристик взаимодействия атмосферы и океана невозможно успешное развитие как моделирования атмосферной циркуляции, так и создаваемых на его основе методов долгосрочного и сверхсрочного прогноза погоды и климата. Поэтому исследование взаимодействия гидросферы и атмосферы становится все более необходимым для понимания природы процессов, протекающих на нашей планете, и дальнейшего развития наук гидрологии, метеорологии и океанологии.

В 1963 году, когда только намечались основные пути изучения взаимодействия океана и атмосферы, группа ведущих американских геофизиков констатировала [1]: «Мы начали туманно представлять себе, что атмосфера и океан, которые вместе составляют подвижную оболочку Земли, в действительности функционируют как гигантская механическая и термодинамическая система. Проблема изучения взаимодействия атмосферы и океана должна стать одним из важнейших объектов геофизики в ближайшее десятилетие». С тех пор прошло более 50 лет. Наука о взаимодействии атмосферы и океана превратилась в специальную дисциплину, целью которой является объяснение естественной изменчивости взаимно приспособленных полей характеристик атмосферы и океана.

Прогресс достигнут благодаря осуществлению крупных экспериментальных программ, с одной стороны, и внедрению физических моделей взаимодействия атмосферы и океана, с другой. Оба эти подхода являются взаимно-дополняющими: теоретический предполагает использование экспериментальных данных для проверки моделей, экспериментальный – концептуальных идей, подкрепленных результатами модельных исследований.

Развитие дистанционных методов зондирования позволило ввести совершенно новые методы исследований. В частности, создана сеть опрашиваемых со спутников дрейфующих и заякоренных буев [2]. Спутниковые измерения стали основой глобальной системы непрерывной регистрации радиационных потоков, облачности, температуры поверхности океана, скорости ветра, параметров волнения и уровня океана. Последние пол века ознаменовались и беспрецедентным ростом активности в области математического моделирования взаимодействия океана и атмосферы с построением целой иерархии моделей системы океан–атмосфера: от глобальных до мезомасштабных и вихреразрешающих.

В общей проблеме энергообмена между океаном и атмосферой мелкомасштабное взаимодействие занимает особое место, являясь определяющим в обмене теплом, количеством движения и влагой непосредственно через границу раздела взаимодействующих сред [3, 4]. Теоретическое описание и расчет такого взаимодействия затруднен из-за чрезвычайной сложности рассматриваемых физических процессов. Пригодность закономерностей и теоретических положений, полученных в основном для течений в аэродинамических трубах и для присте-

ночной турбулентности, в условиях подвижной поверхности раздела море–атмосфера нуждается в тщательной проверке.

Теоретическое исследование взаимодействия атмосферы и океана усложняется тем, что мы имеем две взаимодействующих турбулизированных среды очень разной плотности, и само состояние морской поверхности зависит от структуры ветрового потока над ней. Над морем турбулентный поток воздуха может передавать поверхности не только импульс, но и механическую энергию, которая идет на увеличение волнения. Шероховатость моря, определяемая геометрией поверхности, оказывается зависимой от волнения, т.е., в конечном счете, от характеристик самого ветрового потока и некоторых внешних параметров. Таким образом, для того, чтобы применить теорию приземного слоя воздуха к атмосфере над морем, необходимо знать от каких факторов зависит шероховатость морской поверхности и определить вид этой зависимости. Особенность жидкой подстилающей поверхности заключается также в том, что элементы шероховатости волны не являются неподвижными образованиями, а перемещаются с различными фазовыми скоростями, зависящими от длины волны. В результате, волны одинаковой длины и конфигурации в зависимости от угла между направлением волн и скоростью ветра будут оказывать различное тормозящее действие на ветровой поток.

В случае морской поверхности возникает связанное с наличием волнения нарушение условий подобия в нижнем слое воздуха, толщина которого определяется характерными размерами волн. Кроме того, при определении направления касательного напряжения (над сушей совпадающего с направлением ветра) необходимо учитывать эффект нижнего вращения ветра, обусловленного наличием поверхностного течения. Оба указанных эффекта – волнения и поверхностного течения – накладывают ограничение на выбор нижнего уровня градиентных измерений, который должен располагаться не ниже утроенной высоты волн. Еще сложнее обстоит дело при наличии поверхностных неоднородностей различных масштабов, которые также нарушают условие стационарности воздушного потока.

Использование теории подобия Монина-Обухова может быть оправдано в условиях открытого моря, если отклонения от теории случайны и не влияют на оценки средних величин при большом объеме данных. В прибрежных районах при береговых ветрах над морем формируются внутренние пограничные слои, связанные с неоднородностью геометрических и термических свойств поверхности. Профили средней скорости ветра и интенсивность турбулентности в этом случае существенно отличаются от характеристик пограничного слоя, типичного для условий открытого моря, что накладывает определенные ограничения на применения теории МО [5].

В настоящее время литература о турбулентности в атмосфере очень обширна и содержит, в частности, много экспериментальных данных о характеристиках турбулентного обмена в приземном и приводном слое. Но даже значительные эксперименты последних лет и многочисленные лабораторные исследования так и не дали ответа на вопрос в чем же причина расхождения модельных и экспериментальных данных в определении турбулентных потоков [6, 7].

Для решения этой проблемы необходимо непосредственное измерение турбулентных потоков в пограничном приводном слое в различных внешних условиях и последующая их параметризация внешними условиями. Информация, накоп-

ленная в результате таких экспериментов, служит основой для построения схемы расчета характеристик локального тепло- и массообмена на основе стандартных гидрометеорологических измерений. С другой стороны, она позволяет лучше понять природу взаимодействия и исследовать вклад явлений различных масштабов. В данной работе для анализа используются данные специализированных экспериментов, проводимых в разнообразных фоновых условиях, в том числе и когда применение стандартных методов расчета составляющих турбулентного энергообмена затруднено.

### 1. Методы определения турбулентных потоков

При численном моделировании пограничного слоя для расчетов осредненных потоков скрытого и явного тепла, а также импульса по измерениям метеопараметров используются так называемые аэродинамические балк-формулы (от английского bulk – объем) [8]:

$$\tau = \rho C_D U_z^2, \quad (1)$$

$$H = \rho c_p C_H U_z (T_s - T_z) \quad (2)$$

$$L_E = L_s C_E U_z (q_s - q_z). \quad (3)$$

$C_D$ ,  $C_H$ ,  $C_E$  – безразмерные коэффициенты обмена (коэффициент сопротивления, число Стентона и число Дальтона соответственно);  $c_p$  и  $\rho$  – теплоемкость и плотность воздуха,  $L_s$  – удельная теплота испарения,  $\tau$ ,  $H$  и  $L_E$  – турбулентные потоки импульса, тепла и влаги соответственно;  $U_z$ ,  $T_z$  и  $q_z$  – скорость ветра, температура и влажность на высоте  $z$ ;  $T_s$  и  $q_s$  – температура и влажность у поверхности. Для использования балк-формул важно определение коэффициентов над различными поверхностями и исследование их зависимости от метеоусловий. Коэффициенты, как правило, относятся к стандартной высоте измерений  $z = 10$  метров и к условиям нейтральной стратификации.

Этот метод очень привлекателен, так как позволяет использовать данные стандартных судовых метеорологических измерений. Основная трудность заключается в определении коэффициентов обмена.

Из уравнений теории подобия Монино-Обухова можно получить выражения:

$$C_D = \frac{\kappa^2}{\left[ \ln \frac{z}{z_0} - \Psi_u \left( \frac{z}{L} \right) \right]^2}, \quad (4)$$

$$C_H = \alpha_T C_D \frac{\left[ \ln \frac{z}{z_0} - \Psi_u \left( \frac{z}{L} \right) \right]}{\left[ \ln \frac{z}{z_T} - \Psi_T \left( \frac{z}{L} \right) \right]}, \quad (5)$$

$$C_E = \alpha_q C_D \frac{\left[ \ln \frac{z}{z_0} - \Psi_u \left( \frac{z}{L} \right) \right]}{\left[ \ln \frac{z}{z_q} - \Psi_q \left( \frac{z}{L} \right) \right]}, \quad (6)$$

где  $\alpha_T = K_T / K_m$  и  $\alpha_q = K_q / K_m$  – отношения турбулентных коэффициентов теплопроводности и диффузии к вязкости или обратные турбулентные числа Прандтля и Шмидта соответственно.  $z_T$  и  $z_q$  – параметры шероховатости для температуры и удельной влажности, то есть высоты, на которых температура и влажность достигают приземных значений.  $z_T$ , как правило, равно  $z_q$ .

Из анализа выражений (4–6) можно сделать следующие выводы: 1) наличие параметров  $z_0$ ,  $z_T$  и  $z_q$  указывает, что коэффициенты обмена зависят от скорости ветра и параметров спектра поверхностных волн, например, среднеквадратичной высоты волн, фазовой скорости и длины преобладающих волн; 2) коэффициенты обмена зависят от стратификации.

Естественно, что прямые расчеты по формулам (4–6) требуют дополнительных громоздких измерений и с использованием стандартных метеорологических данных просто невозможны.

Рассмотрим способы определения параметра шероховатости морской поверхности. Шероховатость водной поверхности вызывается действием прилегающего к ней движущегося слоя воздуха и поддерживается, в основном, за счет передачи потока импульса и энергии к поверхности. Элементы шероховатости вносят наибольший вклад в сопротивление воздушному потоку, обтекающему водную поверхность, а их вертикальный размер пропорционален некоторому масштабу длины, известному как параметр шероховатости  $z_0$ . Мелкомасштабные шероховатости морской поверхности представляют собой сложную совокупность гравитационных волн и капиллярной ряби, происхождение и структура которых зависят не только от ветра, но и от течений, внутренних волн в море и атмосфере, глубины водоема, рельефа дна, воздействия движущихся и стационарных объектов, антропогенных поверхностных загрязнений и других факторов [9, 10].

В общем случае параметр шероховатости  $z_{ou}$  определяется как высота, на которой логарифмический профиль ветра становится равным нулю.

$$U(z) = \frac{u_*}{k} \left[ \ln \frac{z}{z_{ou}} - \Psi_u \left( \frac{z}{L} \right) \right] \quad (7)$$

Аналогично для  $z_{oT}$  и  $z_{oq}$

$$T(z) = T_s - \frac{T_*}{k_T} \left[ \ln \frac{z}{z_{oT}} - \Psi_\theta \left( \frac{z}{L} \right) \right] = T_o - \frac{T_*}{k_T} \left[ \ln \frac{z}{z_{ou}} - \Psi_\theta \left( \frac{z}{L} \right) \right], \quad (8)$$

где  $T_* = \frac{H}{u_*}$ ,  $T_o$  – аэродинамическая температура: температура воздуха на высоте шероховатости.

Из формул (3) и (7) параметр шероховатости определяется как:

$$z_0 = z \exp \left( - \frac{\kappa}{\sqrt{C_{Dn}}} \right), \quad (9)$$

где

$$C_D = \left( \frac{u_*}{U} \right)^2. \quad (10)$$

Профиль скорости ветра (7) с поправкой на стратификацию атмосферы используется в следующем виде:

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \Psi_u \left( \frac{z}{L} \right) + \Psi_u \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]. \quad (11)$$

Введем обозначение:  $\zeta = \frac{z}{L}$ ,  $\Psi_u = \int_0^{\zeta} \frac{1 - \varphi_u(\xi)}{\xi} d\xi$ , где  $\varphi_u(\xi)$  – универсальная функция, описывающая профиль ветра. Из (11) следует:

$$C_{Dn}^{-1/2} = C_D^{-1/2} + \frac{\Psi_u(\zeta)}{\kappa}. \quad (12)$$

Рассмотрим расчет универсальных функций для различных стратификаций.

*Неустойчивая стратификация*  $\frac{z}{L} < -0.05$  [11]:

$$\Psi_u(\zeta) = \frac{\Psi_{kanzas} + \zeta^2 \Psi_{convectiv}}{1 + \zeta^2}, \quad (13)$$

$$\Psi_{kanzas} = 2 \ln \left( \frac{1+x}{2} \right) + \ln \left( \frac{1+x^2}{2} \right) - 2 \arctan x + \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

$$\Psi_{convectiv} = \frac{3}{2} \ln \frac{y^2 + y + 1}{3} - \sqrt{3} \arctan \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad (15)$$

где  $x = (1 - 16\zeta)^{1/4}$ ,  $y = (1 - 13\zeta)^{1/3}$ .

*Нейтральная стратификация*:  $-0.05 < \frac{z}{L} < 0.05$ :

$$\Psi_u(\zeta) = 0, \quad C_{Dn} = C_D. \quad (16)$$

*Устойчивая стратификация*  $\frac{z}{L} > 0.05$  [12]:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= 1 + a_1 \xi + (1 + c_1 - d_1 \xi) \xi b_1 \exp(-d_1 \xi), \\ \Psi_m &= -b_1 c_1 / d_1 - a_1 \xi - b_1 (\xi - c_1 / d_1) \exp(-d_1 \xi) \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $C_D$  – коэффициент сопротивления,  $z_0$  – параметр шероховатости,  $U$  – скорость ветра м/с,  $C_{Dn}$  – коэффициент сопротивления для нейтральных условий,  $z$  – высота измерений,  $u_*$  – динамическая скорость ветра,  $L$  – масштаб Монина-Обухова,  $\zeta = z/L$  – параметр устойчивости.

Так как вид универсальных функций задается параметрически, этот метод не дает точной информации о значении параметра шероховатости. При наличии профильных измерений заманчиво использовать определение логарифмического

профиля ветра  $\frac{U(z)}{u_*} = \kappa^{-2} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right)$ . В этом случае параметр шероховатости

легко определить по измерениям на двух уровнях как:

$$\ln z_0 = \frac{\ln z_2 - \frac{u_2}{u_1} \ln z_1}{1 - \frac{u_2}{u_1}} \quad (18)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – верхний и нижний уровень, на которых определяется скорость  $u_1$  и  $u_2$ .

Если учитывать тот факт, что при взаимодействии атмосферы с шероховатой поверхностью существует некая глубина смещения (displacement)  $D$ , на которую взаимодействие не распространяется [13], формулы для логарифмического профиля ветра и (18) должны быть переписаны в виде:

$$\frac{U(z)}{u_*} = \kappa^{-2} \ln\left(\frac{z - D}{z_0}\right) \quad (19)$$

$$z_0 = (z - D) \exp\left(\frac{-\kappa U(z)}{u_*}\right) = (z_2 - z_1) \left[ \exp\left(\frac{-\kappa U_2}{u_*}\right) - \exp\left(\frac{-\kappa U_1}{u_*}\right) \right] \quad (20)$$

$$D = z_1 - (z_2 - z_1) \left[ \exp\left(\frac{-\kappa(U_2 - U_1)}{u_*}\right) - 1 \right]$$

Формула (20) требует дополнительной информации о динамической скорости. Но величина  $D$  морской поверхности по данным измерений незначительна, особенно при слабых и умеренных ветрах.

Вычисление параметра шероховатости из формулы (18) в реальных морских условиях может приводить к ошибкам из-за несоответствия реального профиля скорости ветра логарифмическому закону. Также использование профильного метода правомерно, если брать небольшие высоты измерений. Другое дело, что применим он только при измерениях с неподвижных оснований. При судовых измерениях точное определение профилей невозможно.

В настоящее время в моделях взаимодействия атмосферы и океана для параметризации условий шероховатости на границе раздела вода-воздух часто используется формула Чарнока [14]:

$$z_0 = \delta \cdot u_*^2 / g, \quad (21)$$

где  $\delta$  – эмпирический коэффициент, называемый параметром Чарнока. Экспериментальные данные [15] показали, что, в зависимости от условий, значения коэффициента Чарнока могут различаться более чем на порядок и существенно зависят от степени развития волнения и глубины водоема. Предпринимались различные попытки связать параметр шероховатости с параметрами морского волнения. На основании многочисленных лабораторных и натуральных экспериментов, а также теоретических расчетов, в качестве параметра, определяющего шероховатость морской поверхности, выбран возраст волн, определяемый как

$\left(\frac{c_{ph}}{u_*}\right)$

или  $\left(\frac{c_{ph}}{u_z}\right)$ , где  $c_{ph}$  – фазовая скорость волн. В качестве дополнительных пара-

метров используются частота спектрального пика ветрового волнения [16], высота волн.

Согласно одному из предположений, соотношение между параметром шероховатости  $z_0$  и параметром возраста волн  $\mu = c_{ph} / u_*$  имеет вид [16]

$$z_0 = 0.48\mu^{-1} (u_*^2 / g) = 0.48\omega_p^* (u_*^2 / g), \quad (22)$$

где  $\omega_p^*$  – безразмерная частота пика спектра ветровых волн, нормированная на скорость трения.

В работе [17] предложена обобщающая зависимость коэффициента шероховатости от параметра возраста волн, которая включает также известную формулу Чарнока, в виде:

$$\frac{z_0 g}{u_*^2} = f(c_{ph} / u_*). \quad (23)$$

Для случая формулы Чарнока  $f(c_{ph} / u_*) = 0,0123$  в работе [18] предложена зависимость:

$$\frac{z_0 g}{u_*^2} = 0.020(c_{ph} / u_*)^{0.5}, \quad (24)$$

а эксперименты в Северном море по проекту HEXOS дали зависимость

$$\frac{z_0 g}{u_*^2} = 0.48(c_{ph} / u_*). \quad (25)$$

Зависимость для различных режимов сопротивления морской поверхности на разных стадиях развития спектра волн была получена в работе [19] на основе новых экспериментальных данных:

$$\frac{z_0 g}{u_*^2} = 0.068(c_{ph} / u_*)^{3/2} \exp(-\kappa c_{ph} / u_*), \quad (26)$$

При слабых ветрах водная поверхность может вести себя как гладкая твердая стенка, над которой вязкий подслоем отделяет пристеночный поток. [4] Преобладание вязкого механизма формирования параметра шероховатости морской поверхности наблюдается при скоростях ветра ниже 5 м/с.

С учетом вязкости формулу Чарнока можно переписать в виде:

$$z_0 = 0.11 \frac{\nu}{u_*} + c \frac{u_*^2}{g}, \quad (27)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость воздуха, а  $c$  – параметр Чарнока, зависящий от скорости ветра [20].

Вопрос о свойствах параметра шероховатости поверхности мелководных акваторий остается во многом открытым, несмотря на многочисленные исследования [15, 21]. Основным критерием для определения ветрового волнения на мелководье выбирается критерий  $H \leq \lambda / 2$ , где  $H$  – глубина водоема, а  $\lambda$  – характерная длина волн [22]. Для условий глубокой воды наибольшее сопротивление ветру оказывают высокочастотные составляющие, поскольку их фазовые скорости намного меньше фазовых скоростей составляющих в окрестности спектрального максимума  $\omega_0$ , а следовательно, и скорости воздушного потока. Длинные и пологие волны, соответствующие максимуму спектра и имеющие фазовые скорости, близкие к скорости ветра, не оказывают заметного тангенциального сопротивления воздушному потоку, но могут вносить волновое сопротивление. Мелковод-

ные волны имеют сравнительно небольшие фазовые скорости из-за ограничивающего влияния глубины при относительно большой крутизне, которая связана с нелинейными взаимодействиями длинных и коротких волн. По этой причине вклад составляющих вблизи максимума спектра по частоте  $\omega_0$  в общее сопротивление водной поверхности оказывается соизмеримым с вкладом высокочастотных составляющих и даже преобладающим. Эффект усиливается с уменьшением глубины водоема. Значение параметра шероховатости растет с увеличением скорости ветра или с уменьшением глубины.

Для предельного развития волн на мелководных водоемах, когда характеристики поверхностной шероховатости перестают зависеть от разгона, а также при трансформации волн, проходящих со стороны открытого моря (большие разгоны), получаем [21]:

$$\hat{z}_0 = F(\hat{H}), \quad (28)$$

где  $\hat{z}_0 = \frac{gz_0}{u_*^2}$  – безразмерный параметр шероховатости,  $\hat{H} = \frac{gh}{u_*^2}$ ,  $h$  – глубина водоема,  $g$  – ускорение свободного падения, равное  $9,8 \text{ м/с}^2$ . Зависимость (28) можно аппроксимировать формулой:

$$\hat{z}_0 = m_1 \hat{H}^{-1}, \quad (29)$$

откуда

$$z_0 = m_1 \frac{u_*^4}{g^2 h}. \quad (30)$$

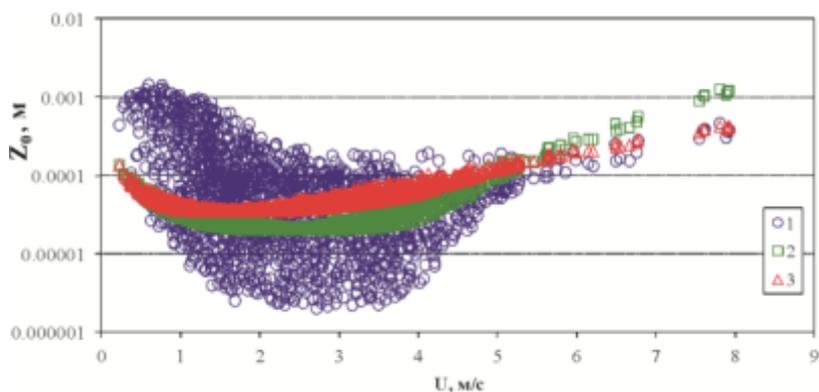
Значения коэффициента  $m_1$  изменяется от 25 до 50 в зависимости от глубины водоема и близости берега.

В качестве примера использования различных параметризаций для параметра шероховатости использованы измерения на озере Большой Виллой. Средняя глубина озера – 4 м. Направление ветра во время измерений обеспечивало достаточную длину разгона волн и позволило не учитывать влияние берегов. Измерительный комплекс располагался на середине озера на заякоренном плавучем основании. Расчеты проводились по формуле (9), где из измерений использовались динамическая скорость  $u_*$  и параметр устойчивости  $\zeta = \frac{z}{L}$ , по формуле (27), где

параметр Чарнока принимался равным  $c = 0.03$ , что соответствует значению для мелководных водоемов [15, 23] и формуле (30). В формулах (27) и (30) значения  $u_*$  брались из измерений.

Результаты расчетов представлены на рис. 1.

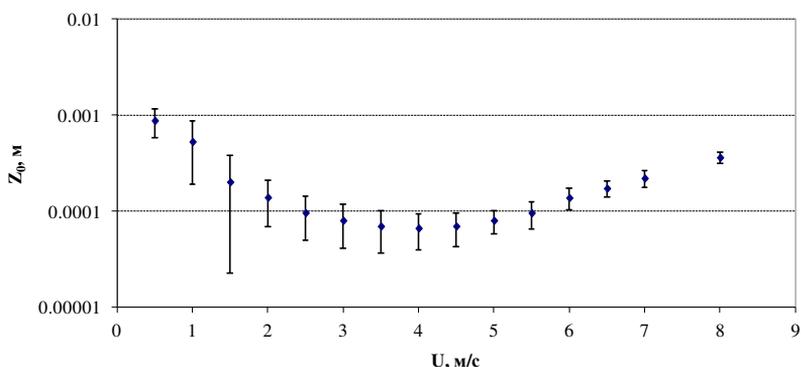
Расчеты подтверждают преобладание вязкого механизма формирования шероховатости при ветрах ниже 4 м/с. Большой разброс экспериментальных данных при слабых ветрах может быть связан с эффектами стратификации, нестационарностью поля ветра, влиянием направления ветра и прочими эффектами, характерными для малых скоростей ветра [24]. При средних скоростях ветра расчеты по формуле Чарнока хорошо совпадают с результатами наблюдений. Завышенные значения расчетов по формуле (30), вероятно, связаны с тем, что данная параметризация разрабатывалась для прибрежных районов при трансформации волн,



**Рис. 1.** Зависимость параметра шероховатости от скорости ветра на высоте измерений (1) – по формуле (9) с использованием результатов наблюдений, (2) – по формуле (30), (3) – по формуле Чарнока с учетом вязкого механизма формирования шероховатости при слабых ветрах (27)

приходящих со стороны открытого моря. Значения параметра шероховатости при отсутствии ветра ( $z_0 = 0.001$  м) соответствуют модельным расчетам для режима свободной конвекции, полученным в работе [25].

На рис. 2 показаны средние значения параметра шероховатости по данным измерений для различных скоростей ветра. На рисунке 3 – полученные значения параметра Чарнока в зависимости от скорости ветра. В целом, параметр шероховатости менялся от 0.00007 до 0.0009 м. Параметр Чарнока для скоростей ветра больше 5 м/с соответствовал значению 0.03, что согласуется с предыдущими данными.



**Рис. 2.** Средние значения измеренного параметра шероховатости для различных скоростей ветра на высоте 2 м со средним разбросом данных

## 2. Коэффициенты обмена

Одной из основных характеристик взаимодействия атмосферы и океана, входящей в модели прогноза ветрового волнения и ветра над морем, является коэффициент сопротивления морской поверхности. Коэффициент сопротивления определяется как:

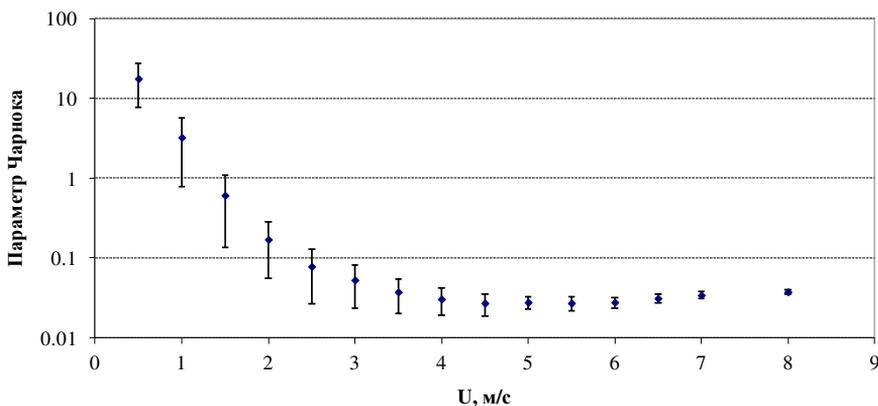


Рис. 3. Средние значения измеренного параметра Чарнока для различных скоростей ветра на высоте 2 м со средним разбросом данных

$$C_D = \frac{\tau_{turb}}{\rho_a U_{10}^2} = \frac{u_*^2}{U_{10}^2}. \quad (31)$$

Здесь  $U_{10}$  – скорость ветра на стандартной высоте  $H_{10} = 10$  м,  $\tau_{turb}(\eta) = \rho_a u_*^2$  – касательное турбулентное напряжение или поток импульса,  $\rho_a$  – плотность воздуха,  $u_*$  – динамическая скорость.

Для определения коэффициента аэродинамического сопротивления поверхности моря  $C_D$  используют либо балк-формулы, связывающие его с  $U_{10}$ , либо численные модели.

Мнения разных авторов о характере зависимости коэффициента сопротивления  $C_D$  от средней скорости ветра сильно отличаются друг от друга. Как правило, эта зависимость представляется в двух видах:  $C_D = a + bu_{10}$ , или  $C_D = cu_{10}^k$ , причем, значения коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $k$  в разных работах существенно отличаются.

В качестве примеров можно привести зависимости:

$$C_D = 10^{-3}(0.75 + 0.067U_{10}) \quad [23]$$

$$C_D = 10^{-3} \begin{cases} 1.2 & 4\text{ м/с} < U_{10} < 11\text{ м/с} \\ (0.49 + 0.065U_{10}) & 11\text{ м/с} < U_{10} < 25\text{ м/с} \end{cases} \quad [26]$$

$$C_D = 10^{-3}(0.87 + 0.0752U_{10} - 0.000661U_{10}^2). \quad [27]$$

Значение коэффициента сопротивления определяется не только скоростью ветра, но и многими другими параметрами (стратификацией, возрастом морского волнения, направлением ветра в прибрежных районах, глубиной моря, наличием осадков, влажностью воздуха и пр.), с чем и связаны столь существенные отличия в параметризациях [21]. Достоверные оценки  $C_D$  при ветрах  $> 5$  м/с и  $< 25$  м/с варьируют от  $1,0 \cdot 10^{-3}$  до  $2,0 \cdot 10^{-3}$ , при этом коэффициент сопротивления увеличивается с увеличением скорости ветра (при скоростях ветра  $< 25$  м/с). Влияние стратификации на значение коэффициента сопротивления особенно заметно при слабых ветрах. Неустойчивая стратификация способствует его увеличению, при-

чем, тем сильнее, чем слабее ветер [24]. При устойчивой стратификации сопротивление поверхности, напротив, уменьшается.

В то же время коэффициент теплоотдачи (Число Стентона)  $C_H$  и коэффициент массообмена (число Дальтона)  $C_E$ , определяющий скорость испарения, практически не зависит от скорости ветра. Экспериментальные величины этих двух последних коэффициентов практически неотличимы. Такое поведение этих коэффициентов связано с тем, что величина  $C_D$  связана в основном с формой поверхности – волнами, образующимися при ветрах. Тепло- и массообмен практически не зависят от формы поверхности, а определяются лишь площадью поверхности, которая слегка растёт при образовании волн, но не более, чем на 10 % даже при очень сильном волнении.

По многочисленным данным коэффициент Стентона  $C_H$  увеличивается примерно от  $1,08 \cdot 10^{-3}$  при скорости ветра 2 м/с до постоянного значения  $1,26 \cdot 10^{-3}$  при скорости ветра больше 8 м/с. Число Дальтона  $C_E$  больше соответствующего коэффициента  $C_H$  и равно  $1,32 \cdot 10^{-3} \pm 0,07 \cdot 10^{-3}$ . Впрочем, данные разных авторов тоже весьма противоречивы. При слабых ветрах значительным становится эффект стратификации.

При сильных ветрах возможна параметризация [28]:

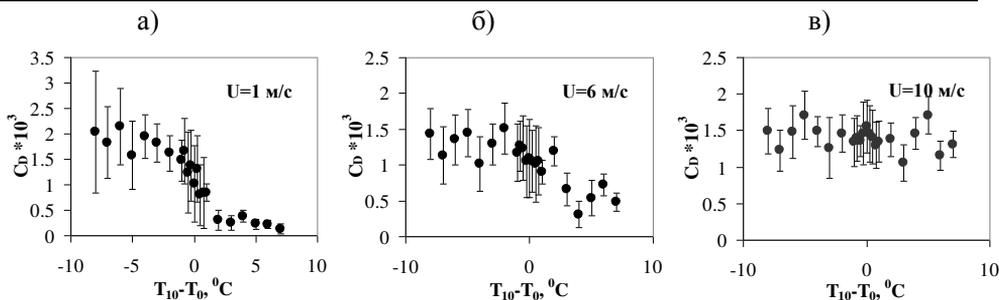
$$C_H = 1,46 \times 10^{-3} - \frac{0,4 \pm 14}{\Delta T u_{10}} \times 10^{-3} \quad (32)$$

Различными авторами предпринимались попытки построения зависимостей чисел Стентона и Дальтона от числа Рейнольдса, скорости ветра, безразмерного параметра стратификации, параметра  $S = 3,55(T_{10} - T_0)/u_{10}^2$ . Однозначной зависимости так и не получено. Как и нет четкого понимания о значении отношения  $C_H / C_E$ . У разных авторов и по различным данным оно меняется от 1,2 до 0,8.

В таблице 1 приведены значения коэффициентов обмена при одновременных измерениях потоков тепла и влаги над морской поверхностью по данным натурных экспериментов, проводимых нами при различных фоновых условиях:

Таблица 1. Значения чисел Стентона и Дальтона по данным специализированных экспериментов над морской поверхностью

Диапазон изменения скорости ветра $u_{10}$ м/с	$C_H \times 10^3$	$C_E \times 10^3$
От 2,5 до 8	1,41±0,18	1,47±0,64
От 4,5 до 11	1,28	1,46
От 3 до 10	1,20±0,30	1,30±0,50
От 2 до 8	1,08±0,03	1,08±0,03( $u_{10}^{-2}$ )
От 1 до 22	$Re^{0,11}$	$Re^{0,11}$
От 3 до 13	1,28	1,4
От 4 до 16	1,2	1,6
От 3,5 до 11	1,42(1-0,455 S)	1,20(1-0,394 S)
От 2 до 8	1,34±0,30	1,10±0,30
От 2 до 21	1,32±0,07	1,32±0,07
От 1 до 12	1,34	1,15
От 1 до 21	1,82±0,07 $u_{10}$	1,82±0,041 $u_{10}$



**Рис. 4.** Экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления морской поверхности от разницы температур воздух–вода при различных скоростях ветра (используются данные, осредненные по  $\Delta T$ )

Дополнительным источником неопределенности в определении коэффициентов обмена для потоков тепла и влаги являются и ошибки измерения температуры поверхности воды. Вместо нее обычно используют температуру верхнего перемешанного слоя, которая, как известно, часто значительно отличается от температуры поверхностной пленки [29].

Иногда применяют и другие способы параметризации, основанные, в частности, на использовании геострофических коэффициентов сопротивления и обмена.

Изложенный выше аэродинамический метод бывает вполне достаточен для описания общих тенденций энергообмена и для описания осредненных по пространству или времени потоков. Но для условий локального энергообмена он пока дает значительные ошибки, связанные, прежде всего, с неопределенностью зависимости коэффициентов обмена от скорости ветра и стратификации.

Для анализа был использован массив данных, полученных нами за период 1999–2014 гг. время измерений на Черном море [24, 30]. Массив данных охватывает измерения, произведенные в различные сезоны как со стационарных прибрежных платформ, так и с судов в открытом море. Диапазон разниц температур вода–воздух составил  $-7+12$  °C, диапазон скоростей ветра  $0-20$  м/с.

Турбулентные потоки тепла, импульса и влаги, как и коэффициенты обмена, включая коэффициент сопротивления морской поверхности, определялись из прямых измерений атмосферной турбулентности с использованием метода турбулентных пульсаций. Сначала рассмотрим, как сопротивление морской поверхности зависит от разницы температур вода–воздух. Для построения зависимостей используется разность температур, а не параметр устойчивости, так как эта величина просто измеряема (рис. 4).

При малых ветрах наблюдается явная зависимость. Уменьшение коэффициента сопротивления с ростом устойчивости может быть представлено и из выводов теории подобия Монина–Обухова.

Кроме зависимости от стратификации при малых ветрах присутствует и зависимость от влажности. Она не столь значительна, но тоже требует учета (рис. 5). Особенно эта зависимость выражена при стратификации, близкой к нейтральной.

В результате, по экспериментальным данным подтвержден теоретический вывод, что при неустойчивой стратификации коэффициент сопротивления при малых ветрах уменьшается с увеличением скорости ветра (рис. 6). В частности,

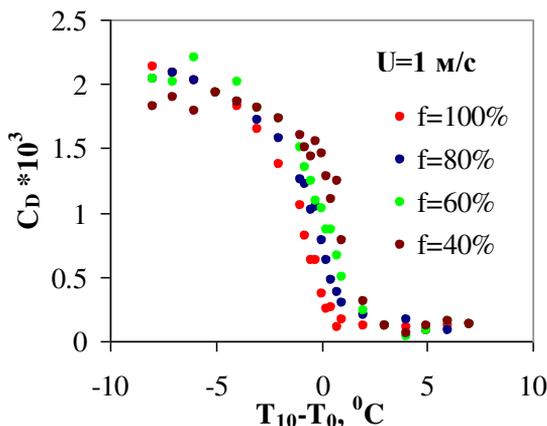


Рис. 5. Зависимость коэффициента сопротивления от влажности атмосферы

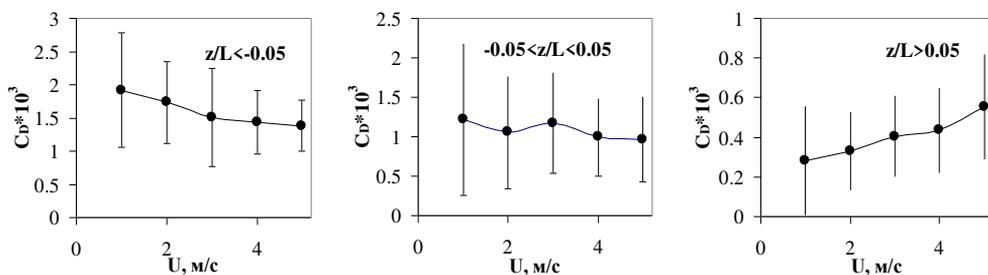


Рис. 6. Зависимость коэффициента сопротивления морской поверхности от скорости ветра при различных стратификациях (используются данные, осредненные по скоростям ветра)

этим объясняется тот факт, что в конвективных условиях при  $U \rightarrow 0$  динамическая скорость  $u_*$  нулю не равна. При нейтральной стратификации  $C_D$  практически не меняется, а при устойчивой стратификации увеличивается.

На основе этих данных разработаны параметризации, представляющие  $C_D$  как функцию влажности, разницы температур и скорости ветра  $C_D = f(U, \Delta T)$ .

$$C_D = \begin{cases} C_{D0}(U) + C_{D1}(U)\Delta T + C_{D2}(U)\Delta T^2 & -8^\circ C \leq \Delta T < -0.75^\circ C \\ C_{D0}(U) + C_{D1}(U)\Delta T & -0.75^\circ C \leq \Delta T \leq 0.75^\circ C \\ C_{D0}(U) + C_{D1}(U)\Delta T + C_{D2}(U)\Delta T^2 & 0.75^\circ C < \Delta T \leq 8^\circ C \end{cases} \quad (33)$$

Используется кубическая параметризация зависимости коэффициента сопротивления от скорости ветра.

$$C_{DN} = a + bU + bU^2 + cU^3 \quad (34)$$

Аналогичная процедура была выполнена и для числа Стентона.

Таблица 2. Коэффициенты для вычисления коэффициента сопротивления

Ветер м/с	$C_{DN}, N=$	$U^n, n=$	$a$	$B$	$c$	$D$
$-8\text{ }^\circ\text{C} \leq \Delta T < -0.75\text{ }^\circ\text{C}$						
$\leq 5$	0	1	1.891	-0.7182	0.1975	-0.0179
	1	-1	-0.0063	-0.30280	0.312	-0.121
	2	-1	0.00044	-0.01769	0.01303	-0.00339
$\geq 5$	0	1	0.6497	0.06993	0.0000354	-0.0000034
	1	-1	0.00383	-0.2756	-1.091	4.946
	2	-1	0.0000483	0.00771	-0.2555	0.7654
$-0.75\text{ }^\circ\text{C} \leq \Delta T \leq 0.75\text{ }^\circ\text{C}$						
$\leq 5$	0	1	0.9874	-0.2566	0.1048	-0.01097
	1	-1	0.2051	-1.903	1.133	-0.26580
$\geq 5$	0	1	0.5438	0.083	-0.00049	0.0000031
	1	-1	-0.01669	0.5438	-12.24	32.53
$0.75\text{ }^\circ\text{C} < \Delta T \leq 8\text{ }^\circ\text{C}$						
$\leq 5$	0	1	-0.06695	0.3133	-0.00147	-0.00406
	1	-1	0.09966	-2.116	4.62600	-2.68
	2	-1	-0.02477	0.2726	-0.5558	0.3139
$\geq 5$	0	1	0.55810	0.08174	-0.00045	0.0000027
	1	-1	-0.00559	0.20960	-8.634	18.630
	2	-1	0.0006	-0.02629	0.2121	0.7755

Таблица 3. Коэффициенты для вычисления числа Стентона

Ветер м/с	$C_{HN}, N=$	$U^n, n=$	$A$	$B$	$c$	$D$
$-8\text{ }^\circ\text{C} \leq \Delta T < -0.75\text{ }^\circ\text{C}$						
$\leq 5$	0	1	2.077	-0.3933	0.03971	
	1	1	-0.22899	0.0735	-0.00627	
	2	1	-0.01954	0.00548	-0.00049	
$\geq 5$	0	1	1.074	0.00558	0.000052	
	1	-1	0.00691	-0.2244	-1.027	
	2	-1	0.00019	-0.00218	-0.101	
$-0.75\text{ }^\circ\text{C} \leq \Delta T \leq 0.75\text{ }^\circ\text{C}$						
$\leq 5$	0	1	0.858	0.09743	-0.01056	
	1	1	-1.927	0.7345	-0.07706	
$\geq 5$	0	1	1.023	0.00961	-0.0000022	
	1	-1	-0.00393	0.2048	-5.048	
$0.75\text{ }^\circ\text{C} < \Delta T \leq 8\text{ }^\circ\text{C}$						
$\leq 5$	0	1	-0.2925	0.5498	-0.05544	
	1	1	0.07372	-0.17400	0.02489	
	2	1	-0.00695	0.01637	-0.00262	
$\geq 5$	0	1	1.023	0.00966	-2.000023	
	1	-1	-0.00267	0.2103	-5.329	
	2	-1	0.00155	-0.06228	0.5094	

Графики полученных зависимостей представлены на рис. 7.

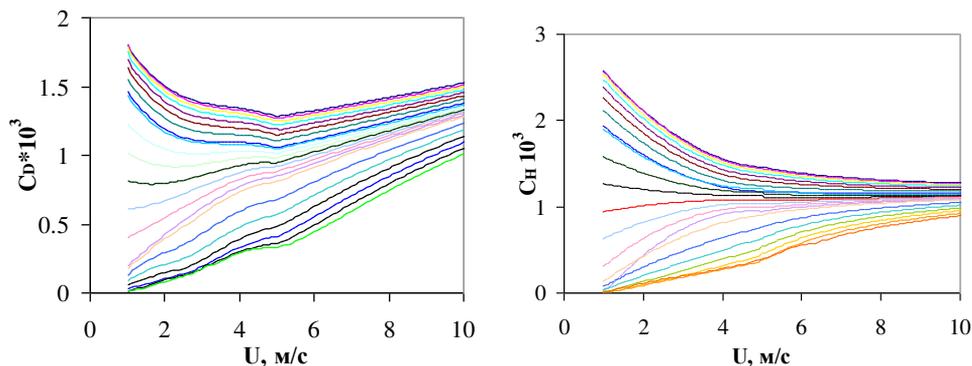


Рис. 7. Зависимость коэффициентов сопротивления и числа Стентона от скорости ветра и стратификации по формулам (33)–(35)

$$C_H = \begin{cases} C_{H0}(U) + C_{H1}(U)\Delta T + C_{H2}(U)\Delta T^2 & -8^{\circ}C \leq \Delta T < -0.75^{\circ}C \\ C_{H0}(U) + C_{H1}(U)\Delta T & -0.75^{\circ}C \leq \Delta T \leq 0.75^{\circ}C \\ C_{H0}(U) + C_{H1}(U)\Delta T + C_{H2}(U)\Delta T^2 & 0.75^{\circ}C < \Delta T \leq 8^{\circ}C \end{cases} \quad (35)$$

Используемые в формулах (33–35) коэффициенты представлены в таблицах 2 и 3.

Следует отметить, что полученные функции не носят универсальный характер, и входящие в них коэффициенты могут изменяться в зависимости от внешних условий.

### 3. Коэффициент сопротивление при штормовых ветрах

Коэффициент аэродинамического сопротивления поверхности моря является критически важным параметром в теории ураганных ветров. Так, согласно модели [31], характеристики тропического циклона главным образом определяются балансом энергии, поступающей в атмосферу из океана, и работой касательных напряжений трения ветра. Традиционные балк-формулы, выведенные на основании обобщения экспериментальных данных, полученных при скоростях ветра менее 30 м/с, дают завышенные значения коэффициента сопротивления морской поверхности при ураганных ветрах. При этом оценки, приведенные в [31], показывают, что диссипация энергии за счет трения оказывается слишком высокой, чтобы объяснить наблюдаемую скорость ураганного ветра при реалистичных источниках энергии.

Проблема объяснения высоких значений скорости ветра при ураганах может быть разрешена, если коэффициент сопротивления морской поверхности не возрастает при увеличении скорости ветра. Эта идея получила подтверждение в экспериментах, в которых измерение скорости ветра внутри тропических циклонов проводилось с помощью падающих GPS-зондов [32]. На основе обобщения результатов этих измерений в работе [33] показано, что коэффициент сопротивления морской поверхности падает, когда скорость ветра превышает 30–35 м/с. Аналогичный эффект наблюдался в лабораторных экспериментах [10], где было обнаружено, что при скоростях ветра, превышающих 25–30 м/с, коэффициент

сопротивления поверхности воды стремится к постоянному значению, приближенно равному 0.0023.

Объяснению этого явления посвящено значительное количество работ. Главный подход связан с учетом влияния брызг, которые образуются при срыве гребней крутых волн ветром. В работе [34] учитывается влияние брызг на обмен импульсом, а в [35–37] развита модель снижения аэродинамического сопротивления морской поверхности за счет уменьшения турбулентных флуктуаций скорости в слое воздуха над водой. В работе [35] расчет параметра шероховатости проводится с учетом эффекта брызг, генерируемых обрушением волн. Показано, что в этом случае коэффициент сопротивления начинает уменьшаться с увеличением скорости ветра. В работе [38] проведен численный эксперимент с использованием совместной ветро-волновой и атмосферной модели. По приведенным в работе расчетам величина коэффициента сопротивления ведет себя аналогично результатам наблюдений.

Подобный механизм усиления ветра в присутствии взвешенных частиц описан в работах [39, 40] для песчаных бурь и [37, 41] для метелей. Эти явления объединяет тот факт, что во всех случаях при усилении скорости ветра у поверхности образуется движущийся слой частиц – водяных капель, частиц песка и почвы, снежинок. То есть поток становится двухфазным. У поверхности, концентрация частиц больше, чем в более верхних слоях. Это означает, что внизу плотность воздушной смеси (воздуха и частиц) больше, чем наверху – то есть дополнительно к температурной стратификации образуется устойчивая стратификация атмосферы по плотности. Чем стратификация устойчивей, тем больше энергии тратят турбулентные вихри на преодоление сил плавучести, а значит, тем меньше у них остается энергии, и интенсивность перемешивания падает.

В работе [42] эффект ускорения воздушного потока объяснен изменением геометрии поверхности: при определенной стадии развития волнения в штормовых условиях волны становятся более пологими. Аналогичный результат был получен в работе [43] с использованием совместной WRF-ветро-волновой модели.

По понятным причинам непосредственных измерений коэффициента сопротивления при штормовых ветрах крайне мало. Существующие оценки, в основном, выполнены в лабораторных условиях. Эксперимент, описанный в работе [32], где измерения проводились с самолетов с помощью падающих GPS зондов, до сих пор остается практически единственным. Поэтому так важны любые экспериментальные подтверждения указанного эффекта. Микрометеорологические измерения в приводном слое атмосферы при штормовых ветрах проводились нами в сентябре–октябре 2007 года в Карском море на борту ГС «Виктор Буйницкий» в рамках российско-американского проекта NABOS-АВЛАП [44]. В период с 1 по 3 октября судно находилось в зоне действия полярного мезоциклона со скоростями ветра 28–30 м/с. [30].

Коэффициент сопротивления рассчитывался по формуле (31) из измерений на высоте 10 м над уровнем моря. Для определения динамической скорости применялся пульсационный метод с использованием микрометеорологических измерений [45]. Пульсации метеопараметров измерялись акустическим анемометром. Динамическая скорость определялась из измерений трех компонент скорости ветра с частотой 10 Гц по формуле:

$$\tau = -\rho_0 \left[ \overline{i u' w'} + \overline{j v' w'} \right] = \rho_0 u_*^2, \quad (36)$$

где  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  – пульсации трех компонент скорости ветра: продольной (вдоль ветра), поперечной и вертикальной соответственно. Перед применением формулы (2) сигналы подвергались первичной обработке и соответствующим коррекциям, необходимым для реализации пульсационного метода (удаление выбросов, удаление тренда, коррекция наклона анемометра, коррекция частотных характеристик и пр.) [46].

Акустический анемометр фирмы МЕТЕК и автоматическая метеорологическая станция фирмы AANDERAA, дающая информацию о средней скорости ветра, располагались на вертикальной мачте на носу судна, что по расчетам [46] является оптимальным местом для проведения микрометеорологических измерений на борту движущегося судна. Высота измерений 10 м. при небольших размерах судна была достаточна для минимизации его влияния. Для фильтрации помех, вносимых в скорость ветра движением судна, использовались данные системы состоящей из датчиков, измеряющих скорости углового вращения по трем осям в плоскости судна и трехкомпонентного акселерометра [47]. В такой системе вектор истинной скорости можно записать как:

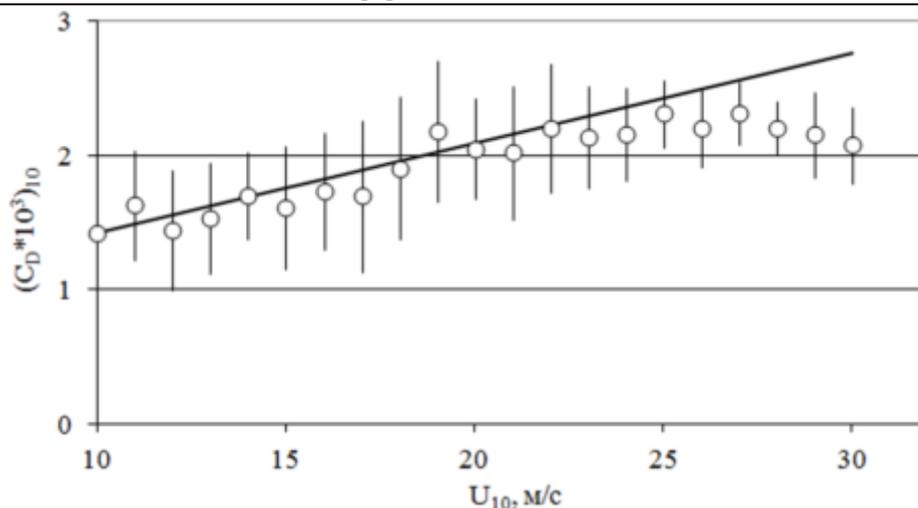
$$\mathbf{U}_{true} = \mathbf{T}(\mathbf{U}_{obs} + \mathbf{\Omega}_{obs} \times \mathbf{R}) + \mathbf{V}_{mot}, \quad (37)$$

где  $\mathbf{\Omega}_{obs}$  – измеренный вектор угловых скоростей,  $\mathbf{T}$  – матрица перехода из системы координат, связанной с судном к истинной системе координат,  $\mathbf{V}_{mot}$  – вектор скорости движения судна относительно воды,  $\mathbf{R}$  – расстояние между анемометром и компенсационной системой.

Инерционно-диссипативный метод [48] является удобным для определения динамической скорости в морских условиях, так как исключает необходимость измерения пульсаций вертикальной скорости ветра и тем самым позволяет использовать подвижные основания. Но в его основе лежит большое количество различных предположений и гипотез (о локальной изотропии, существовании инерционного подинтервала, предположение о малости дивергенции вертикального переноса пульсаций и стационарности внешних условий и т.д.). С одной стороны, при сильных ветрах отпадает необходимость учитывать стратификацию атмосферы при расчете потоков, что делает метод более простым в исполнении. Но при нестационарности штормовых ветров, наличии слоя пены и брызг, дополнительной стратификации по плотности этот метод дает существенные ошибки. Поэтому предпочтение всё же было отдано пульсационному методу.

Анализ качества данных проводился с помощью спектральной обработки сигналов, что позволило отфильтровывать данные, поврежденные в результате внешних воздействий (попадание морской воды на датчики, скачки электричества, обледенение и пр.) В результате было отобрано порядка сорока 20-минутных серий измерений при скоростях ветра от 20 до 30 м/с.

На рис. 8 представлена полученная после обработки данных зависимость коэффициента сопротивления от скорости ветра. Значения коэффициента осреднялись по интервалам скоростей ветра 1 м/с. При скоростях ветра меньше 20 м/с  $C_D$  возрастает практически линейно с ростом скорости ветра. Классическая прямая, параметризующая этот рост [23], представлена на рис. 1. Разброс в значениях  $C_D$  при этих скоростях ветра происходит из-за влияния возраста волн [49, 50] и появления зыби [51, 52]. Зыбь способна как увеличивать, так и уменьшать коэффициент сопротивления, в зависимости от того движется она по направлению ветра или против [53]. Представленные результаты и приведенное на графике квадра-

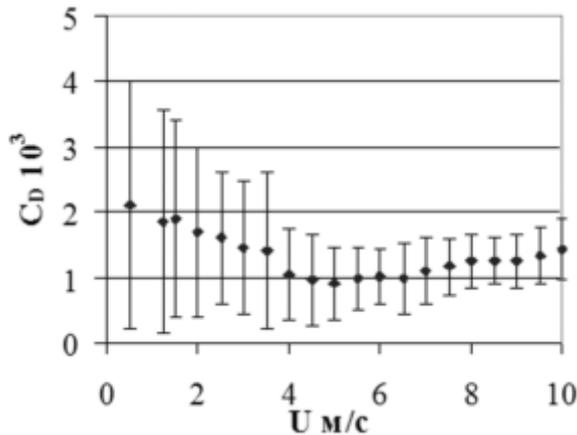


**Рис. 8.** Зависимость коэффициента сопротивления при сильных ветрах от скорости ветра из измерений в Карском море. Для определения коэффициента сопротивления использовался пульсационный метод. Точки показывают средние значения, вертикальные линии – среднеквадратичное отклонение на интервалах 1 м/с. Линия – параметризация из работы [23]

тичное отклонение подтверждают если и не уменьшение, то, по крайней мере, не возрастание коэффициента сопротивления при больших скоростях ветра. В нашем случае коэффициент перестает расти несколько раньше, чем получено в работах [32, 33, 10], но это согласуется с данными работы [54]. К сожалению, измерение параметров волнения в данном эксперименте не проводились, но визуальные наблюдения подтверждают наличие обоих эффектов: и появления слоя брызг, и изменение геометрии волн.

#### 4. Коэффициент сопротивления при слабых ветрах

Особенно сложно теоретическое описание взаимодействия атмосферы и морской поверхности при слабых ветрах [55]. Здесь наблюдается значительный разброс значений коэффициента сопротивления, а характер его зависимости от скорости ветра и параметров морского волнения носит нелинейный характер [56, 57]. При этом именно при слабых ветрах наиболее репрезентативно исследование поверхностных явлений на морской поверхности (пленочных сликов, выходов подводных возмущений, сдвигов течений и пр.) по данным дистанционного зондирования [58]. Кроме того, эмпирические зависимости коротковолновой части спектра поверхностного волнения от скорости ветра являются основой алгоритмов для дистанционного определения скорости ветра [59–61]. В этих алгоритмах используется эмпирическая связь скорости ветра и интенсивности радиоизлучения, рассеянного морской поверхностью, которое, в свою очередь, определяется интенсивностью волнения на поверхности воды. Но при малых ветрах эффекты нестационарности морского волнения проявляются наиболее значимо. Известно [62–64], что неоднородное распределение ветра в приводном слое вызывает неоднородное распределение поверхностного волнения. В то же время неоднородное распределение волнения на поверхности моря может быть вызвано процесс-



**Рис. 9.** Зависимость полученного из прямых измерений коэффициента сопротивления от скорости ветра по данным измерений на Черном море

сами в толще океана, которые создают неоднородные течения на поверхности воды [65, 66]. Кроме того, неоднородности интенсивности поверхностного волнения могут быть вызваны присутствием пленок ПАВ [67], которые также переносятся в поле неоднородных течений и могут служить индикаторами их присутствия. Нестационарность приводного ветра может быть вызвана и наличием сликов, приводящих к увеличению скорости ветра [68]. Сложные процессы ветроволнового взаимодействия при слабых ветрах, с одной стороны, препятствуют разработке достаточно надежных алгоритмов, с другой – могут давать дополнительную информацию о процессах на поверхности и в толще океана.

На рисунке 9 представлена экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления от скорости ветра. Видно, что диапазон разброса коэффициента сопротивления при малых ветрах достаточно велик.

Согласно Чарноку [14] профиль скорости ветра над взволнованной поверхностью подчиняется закону:

$$\frac{U(z)}{u_*} = \kappa^{-1} \ln\left(\frac{gz}{u_*^2}\right) + C, \quad (38)$$

где  $C$  – константа.

Одной из причин разброса значений  $\frac{U}{u_*}$  становится уменьшение значимости закона Чарнока и появление других факторов, влияющих на эти значения. Введем безразмерный параметр  $K = \frac{u_*^3}{g\nu}$ , который является отношением масштаба взволнованности поверхности  $\frac{u_*^2}{g}$  к масштабу вязкости  $\frac{\nu}{u_*}$ . Здесь  $\nu$  – вязкость воздуха. При достижении  $K = K_{крит}$  на поверхности моря появляются короткие волны с хорошо различимыми гребнями.  $K_{крит}$  примерно равно 100, что соответствует скорости ветра около 6 м/с. Эта скорость ветра – нижний предел для условий, когда закон Чарнока является определяющим для формирования профиля

ветра. При более слабых ветрах поверхность моря может вести себя как гладкая твердая стенка, над которой вязкий подслоя отделяет пристеночный поток. Вне вязкого подслоя профиль скорости ветра можно представить как [4]:

$$\frac{U(z)}{u_*} = \kappa^{-1} \ln\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) + C. \quad (39)$$

Но при этом жидкая поверхность отличается от твердой существованием горизонтальных течений. И турбулентные вихри, контактируя с такой поверхностью, могут испытывать возмущения под влиянием изменения поверхностного натяжения, что искажает вязкий механизм переноса импульса.

Преобладание вязкого механизма формирования параметра шероховатости морской поверхности иллюстрирует зависимость от скорости ветра составляющих формулы (27) для определения параметра шероховатости морской поверхности (рис. 10). Видно, что при скоростях ветра ниже 5 м/с начинает преобладать вязкий механизм формирования параметра шероховатости.

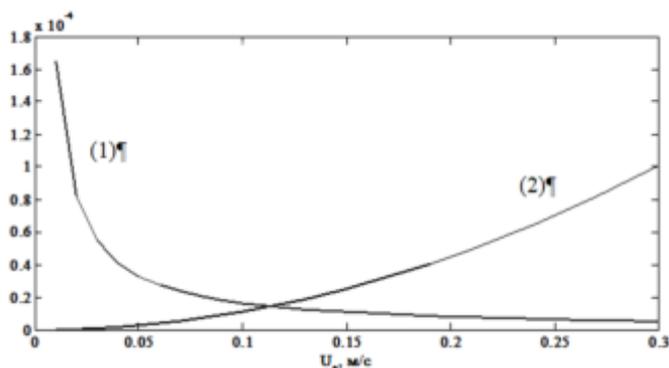


Рис. 10. Зависимость от динамической скорости составляющих формулы

$$z_0 = 0.11 \frac{\nu}{u_*} + c \frac{u_*^2}{g}. \quad (1) \quad 0.11 \frac{\nu}{u_*}, \quad (2) \quad 0.01 \frac{u_*^2}{g}$$

Другой причиной вариаций сопротивления при малых ветрах являются эффекты стратификации, которые при ветрах < 5 м/с особенно сильны [24]. Рис. 11 демонстрирует как эффекты стратификации проявляются при различных метеорологических условиях. В качестве меры стратификации использован аналог объемного числа Ричардсона  $S = (T_0 - T_{10})/u_{10}^2$ . Видно, что при ветрах больше 10 м/с эффекты стратификации практически исчезают.

Одновременные пульсационные и профильные измерения на платформе Кацивели, в том числе и во время апвеллинга, приводящего к сильному выхолаживанию морской поверхности [56, 69], позволили исследовать зависимость коэффициента сопротивления от числа Ричардсона

$$Ri = \frac{g}{T} \frac{\partial \theta / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2},$$

характеризующего стратификацию атмосферы (рис. 12). Таким образом, подтверждается тео-

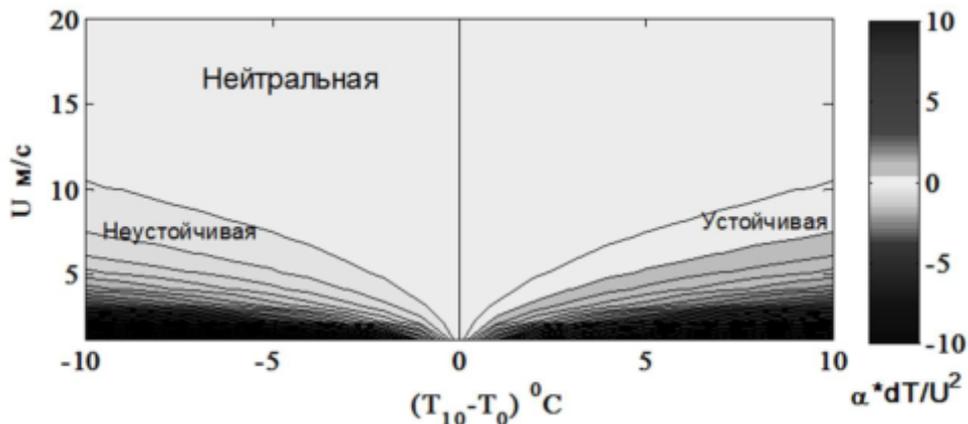


Рис. 11. Зависимость параметра стратификации атмосферы от метеорологических условий

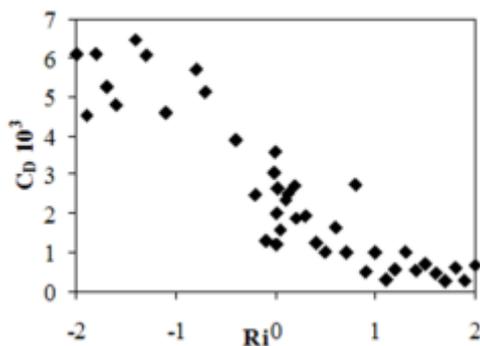


Рис. 12. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Ричардсона из экспериментальных данных

ретически предсказанная зависимость коэффициента сопротивления и связанного с ним параметра шероховатости от стратификации атмосферы [13].

Широко обсуждаемой проблемой является существование турбулентности при числах Ричардсона выше критического  $R_{крит} \approx 0.25$  [70], т.е. при сильно устойчивой стратификации. Теоретически этот факт обоснован в работах С.С. Зилитинкевича [71, 13, 72, 73]. Данные натурных наблюдений также подтверждают, что турбулентность может существовать и при числах Ричардсона выше критического. При параметризации турбулентного обмена в приземном слое эта проблема решается выбором универсальных функций, не допускающих уменьшения до нулевых значений коэффициентов обмена, т.е. позволяющих турбулентности существовать при сильно устойчивой стратификации. Другая проблема состоит в том, что сильно устойчивая стратификация характеризуется уменьшением высоты приземного слоя ниже высоты нижнего модельного уровня, что делает неправомерным использование метеовеличин, полученных на этом уровне, для расчета турбулентных потоков в приземном слое. Уменьшение шероховатости поверхности при устойчивой стратификации подтверждает визуально наблюдаемый факт выглаживания морской поверхности при апвеллингах.

Результаты расчетов [74–76] также подтвердили наличие турбулентности в динамико-конвективном слое при низких скоростях, что не противоречит современным представлениям о конвективном перемешивании в приводном слое атмосферы, и квадратичное падение температуры при увеличении скорости ветра.

Анализ экспериментальных данных показывает наличие сложной динамической структуры под логарифмическим подслоем. Одной из областей применения получаемых результатов является расчет потока импульса между атмосферой и океаном при сильной неустойчивости приводного слоя атмосферы, возникающей при малых скоростях ветра, когда морскую поверхность можно считать аэродинамически гладкой. Так же полученные результаты помогут объяснить наблюдаемый в натурных и лабораторных экспериментах эффект «холодной» пленки.

Как показывают расчеты, при отсутствии ветра потоки тепла и влаги становятся равными нулю. Но даже при полном штиле, возникает крупномасштабная конвекция (механическая), которая может создавать локальный сдвиг скорости. Как правило, стратификация приводного слоя воздуха неустойчивая, и при слабых ветрах турбулентный обмен осуществляется механизмом свободной конвекции. Идея этого подхода заключается в том, что, даже в отсутствии ветра, масштабные конвективные ячейки случайным образом участвуют в образовании локального сдвига скорости и, следовательно, в возникновении скорости трения.

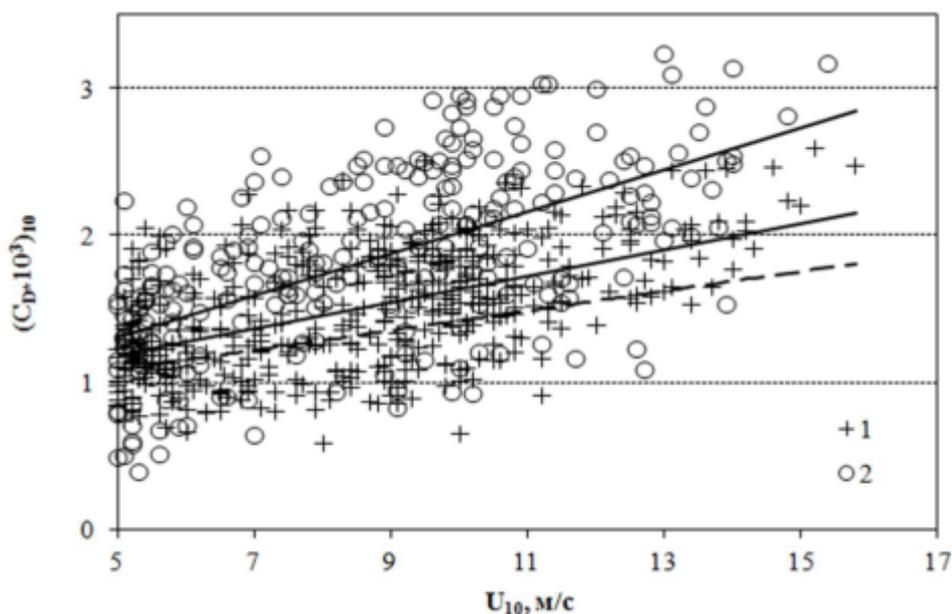
Анализ экспериментальных данных позволяет говорить о сложной динамической структуре режима свободной конвекции при слабых ветрах, существовании крупномасштабной механической конвекции и как следствии возникновения значительных турбулентных потоков тепла и влаги [77].

## 5. Коэффициент сопротивления в прибрежной зоне

Измерения, проведенные со стационарной платформы в прибрежной зоне (на базе ЭО МГИ НАНУ в п. Кацевели), показали, что полученные значения коэффициента сопротивления имеют большой разброс и зависят от направления ветра – при береговых ветрах коэффициент сопротивления возрастает (рис. 13). Измерительные кампании проводились в весенний (2005, 2007, 2012 гг.) и осенний (2009, 2011, 2012 гг.) периоды, что позволило собрать значительный массив данных при различных фоновых условиях.

Для анализа использовались измерения при восточных ветрах, когда разгон волн можно считать достаточным, а влияние платформы минимизировано. Сильные ветра наблюдались, в основном, с северного (береговые ветра) и восточного направлений. Измерения пульсаций метеопараметров проводились на высоте 4 м над уровнем моря на 6-метровом выносе на восточном углу, что позволяет минимизировать влияние платформы при рабочих ветрах. Средняя скорость ветра изменялась на высоте 10 метров.

Структура пограничного слоя в прибрежной зоне моря при ветре с берега зависит от нескольких факторов: рельефа и элементов шероховатости поверхности прибрежного района суши, скорости ветра, расстояния от берега, стратификации и динамических процессов в верхней части пограничного слоя атмосферы [78, 15, 79]. При таких ветрах над морем формируются переходные внутренние пограничные слои, связанные с неоднородностью геометрических и термических свойств поверхности [80, 81]. Профили средней скорости ветра и интенсивность



**Рис. 13.** Зависимость коэффициента сопротивления морской поверхности от скорости ветра в прибрежной зоне по данным пульсационных измерений. 1 – ветер с моря; 2 – береговой ветер. Штрих-линия – параметризация из [23] для открытого моря

турбулентности в этом случае существенно отличаются от характеристик пограничного слоя, типичного для условий открытого моря или прибрежных зон с ровным рельефом береговой линии, и применение теории подобия Монина-Обухова затруднительно. Т.е. само понятие динамической скорости, входящей в расчет коэффициента сопротивления, становится неопределенным, а значение динамической скорости изменяется с высотой [82]. Также причиной завышения значения коэффициента сопротивления является порывистость сильных береговых ветров, связанная со значительной турбулизацией потока.

Значения коэффициента сопротивления при ветрах со стороны моря завышены по отношению к данным, полученным в открытом море, причем, с усилением скорости ветра различие возрастает. Этот факт отмечался и ранее, например, при измерениях над озером Онтарио в Канаде при переходе волн от глубокой к мелкой воде и при скоростях ветра около 14 м/с [83], а также при обработке массива данных для прибрежных районов, подверженных влиянию ураганных ветров [84].

Основная причина увеличения коэффициента сопротивления в прибрежной зоне заключается в различных характеристиках морского волнения в глубоком море и на мелководье. Влияние возраста волн на увеличение коэффициента сопротивления особенно ощутимо при малых разгонах, типичных для прибрежных районов и замкнутых морей [50]. Зависимость коэффициента сопротивления от возраста волн может быть вызвана двумя причинами: 1) развивающиеся волны движутся с меньшей фазовой скоростью по отношению к ветру и, таким образом, способствуют некоторому затормаживанию процессов взаимодействия и 2) развивающиеся волны круче, что приводит к отрыву потока от волновых гребней и увеличению сопротивления. Развитие молодых волн может быть связано как с

изменением скорости или направления ветрового потока, так и с их ограниченным разгоном. Крутизна волн также возрастает при выходе на мелководье. Хорошо известен и другой аспект влияния донной топографии на структуру взволнованной поверхности – в прибрежных районах при выходе волн на мелководье увеличивается частота их обрушений [85–88]. В лабораторных исследованиях [89, 90] было обнаружено почти двукратное увеличение турбулентного напряжения ветра над зоной сильных обрушений по сравнению с взволнованной поверхностью, обрушение на которой только начинается. Кроме того, волны, проходя свал глубин и выходя на мелководье, испытывают рефракцию, что может привести к увеличению параметра шероховатости в прибрежной зоне и движению волн в различных направлениях [91].

Итак, среди причин увеличения коэффициента сопротивления в прибрежной (мелководной) части моря можно указать следующие: (1) уменьшение фазовой скорости волн; (2) увеличение их крутизны; (3) быстро изменяющееся волновое поле; (4) направление волн в прибрежной зоне может не совпадать с направлением среднего ветра. Все эти факты необходимо учитывать при разработке параметризаций взаимодействия атмосферы и морской поверхности в прибрежных зонах, особенно при прогнозировании штормовых явлений [92].

### 6. Балансовый метод определения турбулентных потоков

В 1926 году Боуэн [93] показал, что диффузия водяного пара с поверхности воды в атмосферу такая же, как и диффузия тепла с этой поверхности. Этот вывод он представил в форме отношения теплотер за счет теплопроводности к потерям за счет испарения, которое известно как отношение Боуэна. В настоящее время это отношение широко используется для определения потоков с различных поверхностей и лежит в основе балансового метода [94]. В случае океана уравнение теплового баланса можно записать как:

$$H + L_E + R = 0 \quad (40)$$

где  $R$  – радиационный баланс.

Для приводного (приземного) слоя атмосферы можно считать справедливым соотношение:

$$\frac{H}{L_E} = \frac{c_p(T_1 - T_0)}{L_s(q_1 - q_0)} = Bo \quad (41)$$

где  $T_1$ ,  $q_1$  – температура и удельная влажность воздуха на высоте  $z$ . Отсюда

$$H = -Bo \frac{R}{1 + Bo}, \quad L_E = -\frac{R}{1 + Bo} \quad (42)$$

В этих формулах через  $Bo$  обозначено отношение Боуэна, выраженное через потоки и через разности температур ( $\Delta t$ ) и влажностей ( $\Delta e$ ) на двух уровнях наблюдений в предположении, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта равны.

Несмотря на простоту, метод теплового баланса имеет существенные недостатки. Во-первых, он не применим, когда радиационный баланс близок к нулю. Во-вторых, он теряет точность, когда разности температуры или влажности между уровнями оказываются меньше  $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$  или  $0,3 \text{ гПа}$ , а в океане эти значения ча-

сто имеют тот же порядок, что и ошибки измерений температуры и абсолютной влажности. Также при выводе соотношения Боуэна использовалось предположение, что коэффициенты турбулентного обмена для потоков явного и скрытого тепла равны между собой. Кроме того, не учитывается эффект водяных брызг и обмен лучистым теплом в ламинарном слое, граничащем с морской поверхностью. А при скоростях ветра, превышающих 15 м/с, испарение морских брызг вносит существенный вклад в потоки скрытого тепла [95].

Но балансировый метод применим в случае определения турбулентных потоков над покрытой льдом морской поверхностью. Теплообмен между атмосферой и океаном при наличии ледяного покрова формируется под воздействием большого числа факторов. Уравнение теплового баланса можно записать в следующем виде:

$$H + L_E + R = EH, \quad (43)$$

где  $R$  – радиационный баланс, складывающийся из баланса коротковолновой и длинноволновой радиации. (В условиях полярной ночи остается только длинноволновая радиация.)  $H$  – турбулентный поток явного тепла.  $L_E$  – турбулентный поток скрытого тепла (поток тепла за счет испарения и конденсации на подстилающей поверхности).  $EH$  – поток тепла от нижележащих слоев к поверхности льда (снега), который, в свою очередь, складывается из турбулентного потока тепла из океана; потока тепла кристаллизации при нарастании или таянии льда; выделения тепла при фазовых переходах внутри льда и притока тепла за счет изменения влагосодержания снега [96].

В этом случае из соотношения Боуэна (41):

$$H = Bo \frac{EH - R}{1 + Bo}, \quad LE = \frac{EH - R}{1 + Bo} \quad (44)$$

Поток тепла через лед просто оценить на основе предположения о линейности профиля температуры в ледяном и снежном покровах. Он рассчитывается по формуле:

$$EH = -\lambda_1 \frac{T_0 - T_2}{h_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} h_2}, \quad [97] \quad (45)$$

$T_2$  – температура нижней границы ледяного покрова;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности льда и снега,  $h_1$  и  $h_2$  – толщины ледяного и снежного покрова. Теплопроводность льда хорошо известна [98].

Определение теплопроводности снега затруднено в связи с особенностью арктического снежного покрова. Если в умеренных широтах отдельные снежные зерна не связаны между собой (снег сыпучий), то в Арктике они срастаются и снег представляет собой пористую структуру с твердым скелетом и теплопроводность его получается больше, чем теплопроводность сыпучего снега, особенно весной и осенью. Поэтому формулы  $\lambda_2(\rho)$ , используемые в умеренных широтах, в Арктике дают заниженные значения.

### Выводы

Недостаточное знание структуры приводного слоя атмосферы и его обмена импульсом, теплом и влагой с взволнованной водной поверхностью при различ-

ных фоновых условиях является в настоящее время основным препятствием для правильного функционирования оперативных, глобальных и региональных моделей прогноза погоды и экспертных моделей изменения климата.

Перенос импульса между атмосферой и океаном во многом определяется шероховатостью морской поверхности. Кроме того, на поток импульса влияют скорость ветра, атмосферная стратификация, размер, крутизна и фазовая скорость ветровых волн и зыби. В прибрежной зоне к этим параметрам добавляются донная топография, направление ветра и формирование внутреннего пограничного слоя при ветрах, направленных с берега.

В данной работе экспериментально подтверждено, что при сильных ветрах коэффициент сопротивления уменьшается с ростом ветра. Это явление можно объяснить на основании теории двухфазного потока, а также с учетом изменения геометрии ветрового волнения. В прибрежной зоне при сильных береговых ветрах наблюдаются более высокие значения коэффициента сопротивления, что связано с особенностями структуры атмосферного пограничного слоя (формированием внутренних пограничных слоев) в прибрежной зоне и с порывистостью береговых ветров.

При слабых ветрах и в штиль взаимодействие атмосферы и океана довольно плохо параметризовано, и имеющиеся на сегодняшний день модели не дают удовлетворительного согласия расчетов и натурных данных. Прямые измерения потоков тепла и импульса над морем позволили уточнить зависимость коэффициента сопротивления от средней скорости ветра при малых ветрах. На основании большого массива экспериментальных данных проанализированы зависимости параметрических коэффициентов от метеорологических параметров, предложены новые параметризации. В частности, установлено, что при неустойчивой стратификации при слабых ветрах основным механизмом переноса тепла является крупномасштабная механическая конвекция. При устойчивой стратификации турбулентные движения возможны и при числах Ричардсона, больших, чем критическое. В общем случае при неустойчивой стратификации коэффициент сопротивления при малых ветрах уменьшается с увеличением скорости ветра. В частности, этим объясняется тот факт, что в конвективных условиях при скорости ветра, стремящейся к нулю, динамическая скорость нулю не равна. При нейтральной стратификации коэффициент сопротивления практически не меняется, а при устойчивой стратификации увеличивается.

### Литература

[1] *Benton G.S. et al.* Interaction between the atmosphere and the oceans // Bull. Amer. Meteor. Soc. 1963. V. 44. N 1. P. 4–17.

[2] *Graber H.C., Donelan M.A., Drennan W.M.* ASIS – The Air-Sea Interaction Spar Buoy / Measuring and Analysing the directional spectrum of ocean waves (Eds: D. Hauser, K. Kahma, H.E. Krogstad, S. Lehner, J.A.J. Monbaliu and L.R. Wyatt). COST Action 714, EUR21367, Luxembourg, 2005. P. 100–105.

[3] Процессы переноса вблизи поверхности раздела океан–атмосфера. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 238 с.

[4] *Csanady G.T.* Air-sea interaction: Laws and mechanisms. Cambridge University Press, 2001. 239 pp.

- [5] Garratt J.R. Internal boundary layer – a review // *Bound.-Layer Meteorol.* 1990. V. 50. P. 171–203.
- [6] Beesley J.A., Bretherton C.S., Jakob C., Andreas E.L., Intrieri J.L., Uttal T.A. A comparison of the cloud and boundary layer variables in the ECMWF forecast model with observations at SHEBA ice camp // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 105. N 12. P. 337–12349.
- [7] Chaudhuri A.H., Ponte R.M., Nguyen A.T. A comparison of atmospheric reanalysis products for the Arctic Ocean and implications for uncertainties in air–sea fluxes // *Journal of Climate.* 2014. V. 27 (14). P. 5411–5421.
- [8] Fairall C.W., Bradley E.F., Hare J.E., Grachev A.A., Edson J.B. Bulk parameterization of air–sea fluxes: updates and verification for the COARE algorithm // *Journal of Climate.* 2003. V. 16. № 4. P. 571–591.
- [9] Fairall C.W., Grachev A.A., Bedars A., Nishiyama R. Wind, wave, stress and surface roughness relationships from turbulence measurements made on R/P FLIP in the SCORE experiment. Report NOAA/ERL/ETL, 1995. P. 1–28.
- [10] Donelan M.A., Haus B.K., Reul N., Plant W.J., Stiassnie M., Graber H.C., Brown O.B., Saltzman E.S. On the limiting aerodynamic roughness of the ocean in very strong winds // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L18306.
- [11] Grachev A.A., Fairall C.W., Larsen S.E. On the determination of the neutral drag coefficient in the convective boundary layer // *Boundary-Layer Meteorol.* 1998. V. 86. P. 257–278.
- [12] Rutgerson A., Smedman A.-S. in A Omstedt: Measured and simulated latent and sensible heatfluxes at two sites in the Baltic Sea // *Boundary-Layer Meteorol.* 2001. V. 99. P. 53–84.
- [13] Zilitinkevich S.S., Mammarella I., Baklanov A.A., Joffre S.M. The effect of stratification on the roughness length and displacement height // *Boundary-Layer Meteorology.* 2008. V. 129. P. 179–190.
- [14] Charnock H. Wind stress on water surface // *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 1955. V. 81. P. 639–640.
- [15] Artamonov A.Yu., Buchnev I.A., Repina I.A., Skirta A.Yu., Smirniyov A.S., Tolpygin L.I. Turbulent Fluxes of Heat and Momentum and Statistical Characteristics of Turbulence in the Near-Surface Air in Near-Shore and Deep-Water Zones of the Black Sea // *Oceanology.* 2005. V. 45. Suppl. 1. P. S27–S38.
- [16] Toba Y., Koga M. A parameter describing overall conditions of wave breaking, whitecapping, sea-spray production and wind stress // *Oceanic whitecaps.* Springer Netherlands, 1986. P. 37–47.
- [17] Moat B.I., Yelland M.J., Pascal R.W. Quantifying the airflow distortion over merchant ships. Part 1: Validation of a CFD model // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 2006. V. 23. P. 341–350.
- [18] Smith S.D. et al. Sea surface wind stress and drag coefficients: HEXOS Results // *Boundary Layer Meteorol.* 1995. V. 73. P. 145–158.
- [19] Kitaigorodskii S.S., Volkov Yu.A., Grachev A.A. A note on the analogy between momentum transfer across a rough solid surface and the air-sea interface // *Boundary-Layer Meteorology.* 1995. V. 74. P. 1–17.
- [20] Makin V.K., Kudryavtsev V.N. Coupled sea surface-atmosphere model. Pt. 1 Wind over waves coupling // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104. No C4. P. 7613–7623.
- [21] Репина И.А. Исследование динамических характеристик и температурного режима водной поверхности в Каспийском море // *Метеорология и Гидрология.* 2000. № 10. С. 15–27.
- [22] Кривицкий С.В., Стекалов С.С. О параметре шероховатости поверхности мелководных водоемов // *Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана.* 1988. Т.24. №1. С. 103–106.

- [23] Garratt J.R. Review of Drag Coefficients over Oceans and Continents // *Mon. Weather Rev.* 1977. V. 105. P. 915–929.
- [24] Repina I., Artamonov A., Chukharev A., Esau I., Goryachkin Y., Kuzmin A., Pospelov M., Sadovsky I., Smirnov M. Air-sea interaction under low and moderate winds in the black sea coastal // *Estonian Journal of Engineering*. 2012. V. 18. № 2. P. 89–101.
- [25] Huang C.H. Modification of the Charnock Wind Stress Formula to Include the Effects of Free Convection and Swell, *Advanced Methods for Practical Applications in Fluid Mechanics*, Prof. Steven Jones (Ed.), 2012. P. 47–69.
- [26] Large W.G., Pond S. Open ocean momentum flux measurements in moderate to strong winds // *J. Phys. Oceanogr.* 1981. № 11. P. 324–336.
- [27] Taylor P.K., Yelland M.J. The dependence of sea surface roughness on the height and steepness of the waves // *J. Phys. Oceanogr.* 2001. V. 31. № 2. P. 572–590.
- [28] Буш К. Потоки в приземном слое над морем // *Моделирование и прогноз верхних слоев океана / Под ред. Крауса*. Л.: Гидрометеиздат, 1979. С. 91–113.
- [29] Федоров К.Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 281 с.
- [30] Репина И.А., Артамонов А.Ю., Варенцов М.И., Козырев А.В. Экспериментальное исследование коэффициента сопротивления морской поверхности при сильных ветрах // *Морской гидрофизический журнал*. 2015. №1. С. 53–63.
- [31] Emanuel K.A. Sensitivity of tropical cyclones to surface exchange coefficients and a revised steady-state model incorporating eye dynamics // *J. Atmos. Sci.* 1995. V. 52. P. 3969–3976.
- [32] Black P.G., D’Asaro E.A., Drennan E.A., French J.R., Niiler P.P., Sanford T.B., Terrill E.J., Walsh E.J., Zhang G.A. Air–Sea Exchange in Hurricanes. Synthesis of Observations from the Coupled Boundary Layer Air–Sea Transfer Experiment // *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 2007. № 3. P. 357–374.
- [33] Powell M.D., Vickery P.J. and Reinhold T.A. Reduced drag coefficient for high wind speeds in tropical cyclones // *Nature*. 2003. V. 422. P. 279–283.
- [34] Andreas E.L. Spray stress revised // *J. Phys. Oceanogr.* 2004. V. 34. P. 1429–1440.
- [35] Makin V.K. A note on drag of the sea surface at hurricane winds // *Boundary Layer Meteorol.* 2005. V. 115. № 1. P. 169–176.
- [36] Kudryavtsev V.N. On the effect of sea drops on the atmospheric boundary layer // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111. C07020.
- [37] Бютнер Э.К. Динамика приповерхностного слоя воздуха. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 156 с.
- [38] Moon I.-J., Ginis I., Hara T. Effect of surface waves on air–sea momentum exchange. Part II: Behavior of drag coefficient under tropical cyclones // *J. Atmos. Sci.* 2004. V. 61. P. 2334–2348.
- [39] Семёнов О.Е. Об ускорении потока во время сильных песчаных и пылевых бурь // *Гидрометеорология и экология*. 2000. № 3–4. С. 15–27.
- [40] Barenblat G.I., Golitsyn G.S. Local structure of mature dust storms // *J. Atmos. Sci.* 1974. V. 3. №7. P. 1917–1933.
- [41] Lykossov V.N. Numerical modelling of interaction between the atmospheric boundary layer and the Antarctic ice shelf // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2001. V. 16. P. 315–330.
- [42] Троицкая Ю.И., Рыбушкина Г.В. Квазилинейная модель взаимодействия поверхностных волн с сильными и ураганными ветрами // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2008. V. 44. № 5. С. 670–694.
- [43] Miyamoto Y., Ishikawa H., Takemi T. Modelling the air-sea-wave interaction under typhoon conditions: model development and a preliminary result for typhoon IOKE // *Proceeding at the 8-th WRF users workshop*. 2006. P. 1–13.

- [44] Polyakov I.V. et al. Observational program tracks Arctic Ocean transition to a warmer state // *Eos, Transactions, American Geophysical Union*. 2007. V. 88. P. 398–399.
- [45] Foken T. *Micrometeorology*. Springer, 2008. 308 p.
- [46] Burba G. *Eddy Covariance Method for Scientific, Industrial, Agricultural, and Regulatory Applications: A Field Book on Measuring Ecosystem Gas Exchange and Areal Emission Rates*. LI-COR Biosciences, Lincoln, NE, USA. 2013. 31 p.
- [47] Edson J.B., Hinton A.A., Prada K.E., Hare J.E., Fairall C.W. Direct Covariance Flux Estimates from Mobile Platforms at sea // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 1998. V. 15. P. 547–562.
- [48] Fairall C.W., Larsen S.E. Inertial-dissipation method and turbulent fluxes at the air-ocean interface // *Boundary-Layer Meteorol.* 1986. V. 34. P. 287–301.
- [49] Кутайгородский С.А., Волков Ю.А. О параметре шероховатости морской поверхности и расчете турбулентных потоков количества движения в приводном слое атмосферы // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1965. V. 1. № 9. С. 973–988.
- [50] Drennan W.M., Graber H.C., Hauser D., Quentin C. On the wave age dependence of wind stress over pure wind seas // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 108. P. 8062.
- [51] Волков Ю.А. Спектры пульсаций скорости и температуры воздушного потока над взволнованной поверхностью моря // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1969. Т. 6. № 12. С. 1251–1265.
- [52] Donnelan M.A., Drennan W.M., Katsaros K. The air-sea momentum flux in conditions of wind sea and swell // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 27. P. 2087–2099.
- [53] Drennan W.M., Kahma K.K., Donelan M.A. On momentum flux and velocity spectra over waves // *Boundary-Layer Meteorology*. 1999. V. 92. № 3. С. 489–515.
- [54] Bye J.A.T., Jenkins A.D. Drag coefficient reduction at very high wind speeds // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111. C03024.
- [55] Edson J. et al. The Coupled Boundary Layers and Air-Sea Transfer Experiment in Low Winds // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 2007. V. 88. P. 341–356.
- [56] Repina I.A., Chukharev A.M., Goryachkin Y.N., Komarova N.Y., Pospelov M.N. Evolution of air-sea interaction parameters during the temperature front passage: The measurements on an oceanographic platform // *Atmospheric Research*. 2009. V. 94. N 1. P. 74–80.
- [57] Баханов В.В., Бозатов Н.А., Волков А.С., Ермошкин А.В., Зуйкова Э.М., Казаков В.И., Кемарская О.Н., Лобанов В.Н., Репина И.А., Титов В.И. Натурные исследования масштабов изменчивости гравитационно-капиллярных поверхностных волн и приводного ветра в шельфовой зоне Черного моря // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2010. Т. 46. № 2. С. 255–262.
- [58] Farrar J.T., Zappa C.J., Weller R.A., Jessup A.T. Sea surface temperature signatures of oceanic internal waves in low winds // *J. Geophys. Res.* 2007. V.112. C6. C06014.
- [59] Беспалова Е.А., Веселов В.М., Гершензон В.Е., Милицкий Ю.А., Мирковский В.Г., Покровская И.В., Раев М.Д., Семин А.Г., Смирнов Н.К., Скачков В.А., Трохимовский Ю.Г., Хатин Ю.Б., Чистяков В.Н., Шарков Е.А., Эткин В.С. Об определении скорости приповерхностного ветра по измерениям поляризационной анизотропии собственного и рассеянного СВЧ-излучения // *Исслед. Земли из космоса*. 1982. № 1. С. 87–94.
- [60] Булатов М.Г., Кравцов Ю.А., Кузьмин А.В., Лаврова О.Ю., Митягина М.И. Микроволновые исследования морской поверхности в прибрежной зоне (Геленджик, 1999–2002 гг.). ООО «Книжный дом Университет», 2004. 136 с.
- [61] Goodberlet M.A., Swift C.T., Wilkerson J.C. Remote sensing of ocean surface winds with the special sensor microwave/imager // *J. Geophys. Res.* 1989. V. 94. C10. P. 14547–14555.
- [62] Wakerman C.C., Rufenach C.L., Schuchman R., Johannessen J.A., Davidson K. Wind Vector Retrieval Using ERS-1 Synthetic Aperture Radar Imagery // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 34. P. 1343–1352.

[63] Басович А.Я., Баханов В.В., Таланов В.И. Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 8–30.

[64] Гориков К.А., Долина И.С., Соустова И.А., Троицкая Ю.И. Трансформация коротких волн в поле неоднородных течений на поверхности океана. Влияние модуляции ветрового инкремента // Известия вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46. № 7. С. 513–536.

[65] Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г. Пленочный механизм воздействия внутренних волн на ветровую рябь // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 31–51.

[66] Burger W.R., Garrett W.D., Mollo-Christensen E.L., Riggles K.W. Effects of an artificial sea slick upon the atmosphere and the ocean // J. Appl. Meteorol. 1970. V. 9. P. 396–400.

[67] Монин А.С., Красицкий В.П. Явления на поверхности моря. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 376 с.

[68] Троицкая Ю.И., Долина И.С., Ермошкин А.В., Баханов В.В., Зуикова Э.М., Репина И.А., Тутов В.И. Отрицательные корреляции изменчивости приводного ветра и поверхностного волнения // Изв. РАН. ФАО. 2008. Т. 4. С. 527–542.

[69] Кузьмин А.В., Горячкин Ю.А., Ермаков Д.М., Ермаков С.А., Комарова Н.Ю., Кузнецов А.С., Репина И.А., Садовский И.Н., Смирнов М.Т., Шарков Е.А., Чухарев А.М. Морская гидрографическая платформа «Кацивели» как подспутниковый полигон на Черном море // Исследование Земли из космоса. 2009. Т. 1. С. 31–44.

[70] Businger J.A., Wyngaard J.C., Bradley E.F. Flux profile relationships in the atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. 1971. V. 28. P. 181–189.

[71] Zilitinkevich S., Esau I., Baklanov A. Further comments on the equilibrium height of neutral and stable planetary boundary layers // Quart. J. Roy. Met. Soc. 2007. V. 133. P. 265–271.

[72] Zilitinkevich S., Esau I. Similarity theory and calculation of turbulent fluxes at the surface for the stably stratified atmospheric boundary layers // Boundary-Layer Meteorol. 2007. V. 125. P. 193–296.

[73] Esau I.N., Zilitinkevich S.S. Universal dependences between turbulent and mean flow parameters in stably and neutrally stratified planetary boundary layers // Nonlinear Processes in Geophysics. 2006. V. 13. P. 135–144.

[74] Зилитинкевич С.С. О турбулентности и диффузии при свободной конвекции // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1971. Т. 7. № 12. С. 1263–1269.

[75] Грачёв А.А., Панин Г.Н. Параметризация явного и скрытого потоков тепла над водной поверхностью в штилевую погоду в естественных условиях // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 5. С. 364–371.

[76] Грачёв А.А. Закон трения в пределе свободной конвекции // Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 11. С. 1143–1155.

[77] Голицын Г.С. Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты. М.: URSS, 2012. 400 с.

[78] Gao Z., Wang Q., Zhou M. Wave-dependence of friction velocity, roughness length, and drag coefficient over coastal and open water surfaces by using three databases // Advances in Atmospheric Sciences. 2009. V. 26. No 5. P. 887–894.

[79] Соловьев Ю.П., Иванов В.А. Предварительные результаты измерений атмосферной турбулентности над морем // Морской гидрофизический журнал. 2007. № 3. С. 42–61.

[80] Соловьев Ю.П. Характеристики внутреннего пограничного слоя над морем при ветре с берега, имеющего горный рельеф // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа: Сб. науч. тр.

«К 30-летию океанографической платформы в Кацивели» / НАН Украины: МГИ, ИГН, ОФ ИнБЮМ. Севастополь, 2010. Т. 21. С. 74–87.

[81] *Soloviev Y.P., Kudryavtsev V.N.* Wind-Speed Undulations Over Swell: Field Experiment and Interpretation // *Boundary Layer Meteorology*. 2010. V. 136. N 3. P. 341–363.

[82] *Иванов В.А., Соловьев Ю.П.* Методика и предварительные результаты измерений атмосферной турбулентности в прибрежной зоне Черного моря // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон*. 2004. Т. 10. С. 78–102.

[83] *Ancil F., Donelan M.A.* Air-water momentum flux observations over shoaling waves // *J. Phys. Oceanogr.* 1996. V. 26. P. 1344–1353.

[84] *Vickery P.J., Skerlj P.F.* Elimination of exposure D along the hurricane coastline in ASCE 7 // *J. Struct. Eng.* 2000. V. 26. P. 545–549.

[85] *Thornton E.B., Guza R.T.* Energy Saturation and Phase Speeds Measured on a Natural Beach // *J. Geophys. Res.* 1982. V. 87. P. 9499–9508.

[86] *Holman R.A., Sallenger A.H.* Setup and swash on a natural beach // *J. Geophys. Res.* 1985. V. 90. P. 945–953.

[87] *Dean R.G., Dalrymple R.A.* Water wave mechanics for engineers and scientists. Singapore: World Scientific, 1991. 353 p.

[88] *Holland K.T., Raubenheimer B., Guza R.T., Holman R.A.* Runup kinematics on a natural beach // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100. P. 4985–4993.

[89] *Banner M.L., Melville W.K.* On the separation of air flow over water waves // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. P. 825–842.

[90] *Kawamura H., Toba Y.* Ordered motion in the turbulent boundary layer over wind waves // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 197. P. 105–138.

[91] *Munk W.H., Traylor M.A.* Refraction of ocean waves: a process linking underwater topography to beach erosion // *J. of Geology*. 1947. V. 55. P. 1–26.

[92] *Westerink J.J., Feyen J.C., Atkinson J. H., Luettich R.A., Dawson C.N., Powell M.D., Dunion J.P., Roberts H.J., Kubatko E.J., Pourtaheri H.* A basin to channel scale unstructured grid hurricane storm surge model applied to southern Louisiana // *Mon. Weather Rev.* 2008. V. 136 (3). P. 833–864.

[93] *Bowen I.S.* The ratio of heat losses by conduction and by evaporation from any water surface // *Physical review*. 1926. V. 27 (6). P. 779.

[94] *Todd R.W., Evett S.R., Howell T.A.* The Bowen ratio-energy balance method for estimating latent heat flux of irrigated alfalfa evaluated in a semi-arid, advective environment // *Agricultural and Forest Meteorology*. 2000. V. 103 (4). P. 335–348.

[95] *Andreas E.L., Edson J.B., Monahan E.C., Rouault M.P., Smith S.D.* The spray contribution to net evaporation from the sea: A review of recent progress // *Boundary-Layer Meteorology*. 1995. V. 72(1–2). P. 3–52.

[96] *Maykut G.A.* The surface heat and mass balance // *The geophysics of sea ice*. Springer US. 1986. P. 395–463.

[97] *Беспалов Д.П.* О теплообмене между атмосферой и океаном в Центральной Арктике // *Тр. Аркт. и антаркт. науч.-исслед. ин-т и Гл. геофиз. Обсерв.* 1959. Т. 226. С. 30–41.

[98] *Лайхтман Д.Л., Серова Н.В., Сметанникова А.В.* Методика определения и некоторые данные теплопроводности и температуропроводности льда и снега // *Тр. Аркт. и антаркт. науч.-исслед. ин-та*, 1959. Т. 226.

### 3.2. Диффузия в поле ветровых волн

*Г.С. Голицын<sup>1</sup>, О.Г. Чхетиани<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Институт космических исследований РАН*

#### 1. Влияние вязкости на горизонтальную диффузию на поверхности моря

В задаче о диффузии примеси на поверхности моря в присутствии ветровых волн показано, что учёт вязкости в поле скорости ветровой волны нарушает потенциальный характер течения. Это даёт возможность, как показывает моделирование, жидкой частице переходить из одной волны в другую, что и обеспечивает диффузию примеси на водной поверхности. Расстояние между соседними жидкими частицами растёт со временем, что также является признаком диффузии. Введение вязкости порядка турбулентной, т.е. в несколько  $\text{см}^2/\text{с}$ , обеспечивает сходимость данных наблюдений к результатам расчётов. Исследование было вызвано тем, что в классической потенциальной теории морского волнения жидкие частицы не выходят за пределы волны, т.е. формально диффузия невозможна.

1. В 1971 г. была опубликована статья Окубо [1], суммирующая результаты наблюдений за ростом размеров 85 пятен примеси на поверхности океана со временем и в пространстве. Наблюдалось расширение пятен по ветру,  $\sigma_x$ , и в поперечном направлении,  $\sigma_y$ . Эти данные относятся к средним широтам Северного полушария. Время наблюдений варьировало от часа (3600 с) до  $10^7$  с, т.е. четырёх месяцев. Поскольку синоптический период порядка нескольких суток, то сила, длительность и направление ветра могли многократно меняться за время жизни пятен. Наблюдения относились к разным морям, океанам и сезонам, поэтому общим механизмом диффузии пятен в такой большой и разнообразной статистике данных могут быть только ветровые волны, хотя в индивидуальных случаях могут влиять течения и их градиенты скорости в поперечном к ним направлениям, циркуляции Лэнгмюра и т.д. Для простоты будем обозначать  $\sigma_x \sigma_y = S(t)$  – площадь пятна. Коэффициент турбулентной диффузии вычислялся в [1] как

$$K(r) = \frac{S(r(t))}{4t}, \quad (1)$$

где  $t$  – время наблюдения за ростом пятна до "среднего" размера  $r$ . Цифра 4 переводит эту формулу в коэффициент горизонтальной диффузии при броуновском движении, когда  $K(r) = 2ND$ , где  $N$  – размерность пространства,  $D$  – коэффициент диффузии. Эти результаты были аппроксимированы на глаз степенными законами:

$$S(t) = 0.0108t^\gamma, \quad \gamma=2.34, \quad (2)$$

$$K(r) = 0.0103r^\beta, \quad \beta=1.15, \quad (3)$$

где длины измеряются в см.

К счастью, в этой же статье были опубликованы таблицы первичных данных, что позволило установить с вероятностью 95 % пределы на эти показатели:  $\gamma = 2.33 \pm 0.10$  и  $\beta = 1.15 \pm 0.05$  с коэффициентами детерминации в обоих случаях, близкими к 0.95. В работе автора [2], исходя из степенных аппроксимаций энер-

гонящей части частотных спектров возвышений, в зависимости от возраста волнений удалось объяснить оба показателя  $n$  и  $m$  с хорошей точностью:  $\gamma = 2.4$  и  $\beta = 7/6 \approx 1.166\dots$  Для этого были использованы значения показателей спектра возвышений

$$S(\omega) \approx a\omega^{-n}, \quad (4)$$

с  $n = 11/3$  для волн с возрастом  $\Omega$ , близким к насыщению  $0.83 < \Omega < 1.2$  и  $n = 13/3$  для молодых волн с  $\Omega = U_{10} / c_\phi > 2$ . Здесь  $U_{10}$  – скорость ветра на высоте 10 м,  $c_\phi = \omega_p / g$  – фазовая скорость пика в спектре волнения. В полосе частот до 3–4 от частоты спектрального пика  $\omega_p$  содержится до 90 % энергии, поэтому использование показателей степени, определённых вне этого интервала, лишь слегка увеличивает энергию волнения. В этой полосе, согласно обширным расчётам [3] прослежена эволюция спектра в связи с изменением обратного возраста (и разгона) волнения  $\Omega = U_{10} / c_\phi$ . Известно, что с увеличением длины волн, т.е. с уменьшением обратного возраста волны, они становятся менее крутыми. Расчёты [3] показывают, что для  $\Omega > 2$  показатель степени  $n \approx 13/3$ , для  $1.2 < \Omega < 2$ ,  $n \approx 4$ , а для волн близких к насыщению,  $\Omega < 1.2$ ,  $n \approx 11/3$ .

В [2] были объяснены также результаты наблюдений Ричардсона и Стоммела [4, 5], в 1948 г. определивших для молодых волн  $\beta \approx 4/3$ , что существенно больше 1.15 [1]. Для объяснения результатов Окубо находились частотные спектры вертикальных и горизонтальных скоростей в волне

$$S_w(\omega) = \omega^2 S_z(\omega) = a_1^{-1} S_u(\omega), \quad (5)$$

где  $a_1^{-1}$  – коэффициент, который предлагалось определять из данных наблюдений, чего не было сделано в [2], хотя была объяснена природа показателей степени в (2) и (3). Там же была оценена скорость распространения границы пятен, что может дать дополнительную информацию. Действительно, зная  $S(t) = \pi t^2(t)$ , мы можем оценить

$$u = \frac{dr}{dt} = 0.0686t^{0.17}. \quad (6)$$

Эта скорость медленно растёт со временем от 0.33 см/с для  $t = 10^4$  с  $\approx 3$  часа до 1.06 см/с для  $t = 10^7$  с  $\approx 4$  месяца. Заметим, что скорость 1 см/с = 0.864 км/сутки. Среднегеометрическое значение скорости распространения границы за это время близко к 0.6 см/с.

Предположение (5) было подвергнуто критике на ряде семинаров с результатами [2], где указывалось, что  $a_1 \equiv 0$  для потенциальной теории ветровых волн, когда жидкая частица в волне движется по кругу [6] и фазы вертикальных и горизонтальных скоростей отличаются на  $\pi / 2 = 90^\circ$ , т. е. вертикальные движения поверхности не возбуждают никаких систематических горизонтальных движений. Предполагалось феноменологически, что турбулентность осуществит такую связь, например, с помощью вихревой вязкости. Здесь константа связи  $a_1$  в (5) будет оценена из самих данных [1], а точная её природа остаётся пока вне данного исследования. Как заметил А.Анис (см. [7]), должна быть в волне, пусть малая, но вихревая компонента, приводящая к дополнительной фазе у горизонтальной компоненты скорости частицы. Однако, такая добавка не должна менять дисперсионного соотношения для пика волны.

Вихревой компонентой обладают трохоидальные волны Герстнера [6], но они не имеют прикладного значения. В то же время вихревая компонента в волне воз-

буждается вблизи поверхности при учёте кинематической вязкости  $\nu$ , но эффект мал [8]. Однако, тщательное исследование, описанное ниже, показывает, что оно может дать результатам Окубо [1] и [2] разумное физическое обоснование, пусть феноменологического характера, т. е. с определением численных коэффициентов из сравнения с данными наблюдений с учётом статистических параметров морского волнения. Объясняется также природа показателей степени в формулах (2) и (3) и численных коэффициентов в них.

2. Исходный материал содержится в § 349 книги Г.Лэмба [8]. Решение уравнения Навье-Стокса для волн на воде с учётом вязкости имеет вид

$$u = -\left(ikAe^{kz} + mCe^{mz}\right)e^{ikx+pt}, \quad (7)$$

$$w = -\left(kAe^{kz} - ikCe^{mz}\right)e^{ikx+pt}, \quad (8)$$

$$p = -2\nu k^2 \pm i\omega = -\omega(2\gamma_1 \mp i), \quad \gamma_1 \equiv \nu k^2 / \omega, \quad (9)$$

$$m^2 = k^2 + p / \nu = -k^2 \pm i\omega / \nu, \quad (10)$$

$$\frac{C}{A} = \mp \frac{2\nu k^2}{\omega} = \mp 2\gamma_1, \omega = (gk)^{1/2}. \quad (11)$$

где  $kA = \omega h$ ,  $h$  – амплитуда волны. Для высоты волны имеем

$$\eta = -\frac{k}{p}(A - iC)e^{ikx+pt}$$

Учёт вязкости приводит к образованию в волне вихревой компоненты, которую можно получить, образуя ротор скорости с помощью (7) и (8). Глубина вязкого вихревого слоя (скин-слой) порядка

$$l_\nu : (\nu / \omega)^{1/2}, \quad (12)$$

что много меньше длины волны  $\lambda$ . Величина  $m^2$  комплексная, следовательно, и  $m$  также комплексная.

Учтём, что при  $\beta = 1$  асимптотика  $\arctg(\beta^{-1}) = \frac{\pi}{2} - \beta$ . Тогда выражение (10) с учётом (11) преобразуется к следующему виду

$$m^2 = -k^2(1 \mp i\gamma_1^{-1}) = -k^2(1 + \gamma_1^{-2})e^{i\varphi} \cong \frac{\omega}{\nu}e^{i\varphi},$$

$$\varphi = \arctg(\gamma_1^{-1}) = \frac{\pi}{2} - \gamma_1,$$

откуда после дальнейших преобразований в комплексной плоскости с учётом

того, что  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ , получаем

$$\frac{m}{k} = \frac{\gamma_1}{2\sqrt{2}}(1+i)e^{i\varphi}. \quad (13)$$

Для двух компонент скорости жидкой частицы на комплексной плоскости получаем с точностью до  $\alpha = (2\gamma_1)^{1/2} = 1$

$$u = -kA(\alpha + i)e^{i\theta} = -kA(1 + \gamma_1)^{1/2}e^{i(\theta + \psi_1)} \quad (14)$$

$$\theta = kx \pm \omega t + 2ivk^2 t, \psi_1 = \arctg(\alpha^{-1}) = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad (15)$$

$$w = -kA(1 \mp 2i\gamma_1) e^{i\theta} = -kA(1 + 4\gamma_1)^{1/2} e^{i(\theta + \psi_2)}, \psi_1 = \arctg(2\gamma_1) \cong 2\gamma_1, \quad (16)$$

где  $kA = \omega h$ , произведение частоты на амплитуду волновых колебаний (высоту волны).

Сравнение формул для горизонтальной и вертикальной компонент скорости показывает, что в отсутствие вязкости, когда  $\gamma_1 = 0$ , эти компоненты точно в противофазе, поскольку  $I = e^{i\pi/2}$ , и что вязкость более заметна для горизонтальной скорости, меняя её амплитуду на слагаемое  $2(2\gamma_1)^{1/2}$ , против  $2\gamma_1$  для вертикальной скорости. Дополнительная фаза для  $u$  по сравнению с  $w$  оказывается всего равной  $\alpha = (2\gamma_1)^{1/2}$ . С ростом частоты пика, т.е. с уменьшением длины волны эта дополнительная фаза  $\alpha = (2\gamma_1)^{1/2}$  растёт как  $1.44 \cdot 10^{-4} \omega^{3/2}$  при  $\omega^2 = kg$ , но даже при  $\lambda = 1$  м величина  $\alpha \approx 15'$ .

Средний горизонтальный импульс в волне равен

$$\langle uw \rangle = \langle h^2 \omega^2 \sin(\theta_1 + 2\alpha) \cos(\theta_1) \rangle = \omega^2 h^2 \alpha, \quad (17)$$

поскольку  $\langle \cos^2 \theta_1 \rangle = 1/2$ , а  $2\alpha = 1$ . Отсюда можно заключить, что связь между спектрами вертикальной и горизонтальной скоростей, т.е. величина  $a_1$  в формуле (5) будет определяться величиной  $\alpha = (2\gamma_1)^{1/2}$ .

Переходя в действительную плоскость, используя малость дополнительной фазы  $\alpha = (2\gamma_1)^{1/2}$ , запишем с помощью (15) и (16) уравнения для траектории жидкой частицы:

$$\frac{dx}{dt} = u = h\omega \cos(\theta + \alpha) e^{-\gamma_1 t},$$

$$\frac{dz}{dt} = w = h\omega \sin(\theta) e^{-i\gamma_1 t},$$

$$\theta = kx + \sigma t.$$

Отвлекаясь от вязкого затухания, запишем уравнение для линии тока по правилам дифференциальной геометрии в следующем виде:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w}, \text{ или } \frac{dx}{h\omega \cos(\theta + \alpha)} = \frac{dz}{h\omega \sin(\theta)}.$$

Последнее равенство есть дифференциальное уравнение для линии тока на плоскости  $(x, z)$ . Воспользуемся формулой для косинуса суммы двух углов и малостью фазы  $\alpha$ , сделав замену  $\theta = kx$ , представим наше дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{k^{-1} \sin(\theta) d\theta}{\cos(\theta) - \alpha \sin(\theta)} = dz.$$

Неопределённый интеграл от левой части равен

$$k^{-1} (1 + \alpha^2)^{-1} [-\alpha\theta + \ln |\cos(\theta) - \alpha \sin(\theta)|] \cong k^{-1} [\ln |\cos(\theta) - \alpha \sin(\theta)| - \alpha\theta].$$

Для полного решения надо взять ещё интеграл от правой части. Потенцируя интегралы от правой и левой частей, получаем

$$C e^{-(\alpha kx + kz)} (\cos(kx) + \alpha \sin(kx)) = 1,$$

где постоянная  $C$  определяется начальными условиями. При  $\alpha = 0$  получаем решение, приведённое в [8]. Наше решение даёт малое, но систематическое уменьшение амплитуды линий тока с горизонтальным расстоянием  $x$ , что проявляется и в численных решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \text{Re}(u), \tag{18}$$

$$\frac{dz}{dt} = \text{Re}(w), \tag{19}$$

Здесь  $-\text{Re}(\dots)$  – действительная часть полей скорости (14) – (16).

Приведём характерный пример такого интегрирования для пары частиц. В качестве параметров было выбрано

$$\delta = 0.08, \gamma_1 = 0.0005, \alpha = 0.032,$$

$$X(0) = 0, Z(0) = -0.165, X_1(0) = 1, Z_1(0) = -0.3$$

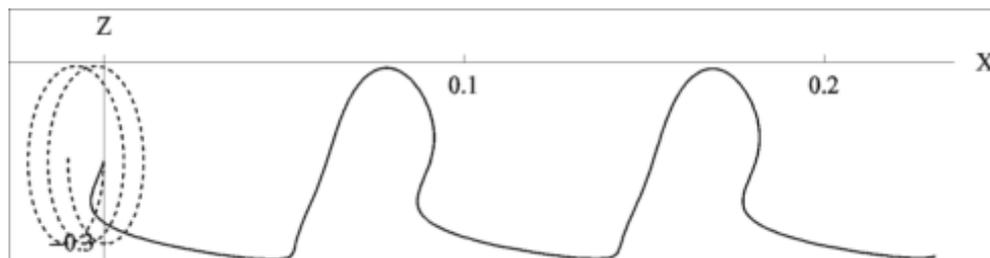
Здесь  $\delta = h / \lambda$  – отношение высоты (амплитуды) волны к ее длине.  $X, Z, T$  – безразмерные переменные

$$x = \lambda X, z = \delta \lambda Z, t = \left( \frac{2\pi\lambda}{g} \right)^{1/2} T \tag{20}$$

Цель численного интегрирования уравнений (18) и (19) – лишь продемонстрировать основные свойства траекторий жидких частиц, поэтому параметр  $\alpha$  взят равным 0.03, на два порядка больше, чем давала бы молекулярная вязкость, что может моделировать турбулентность.

Наши уравнения (18),(19) нелинейны, поэтому и в отсутствие вязкости в них есть дрейф Стокса [9]. То есть частица имеет конечное смещение. Именно в этом приближении проводились расчеты коэффициента вихревого перемешивания [10], которое давала асимптотически конечное значение коэффициента диффузии, соответствующее масштабу пятна порядка ста метров. Учёт конечной вязкости в волне, которая подразумевается турбулентной, даёт смещение частиц существенно большее, в нашем случае на порядок, что наглядно видно на рис. 1.

На рис. 2 представлено движение частицы с начальными координатами  $X(0) = 0, Z(0) = -0.165$  в вертикальной плоскости  $(X, Z)$ . Видно, что траектории жидких



**Рис. 1.** Траектории жидкой частицы с начальными координатами  $X(0) = 0, Z(0) = -0.165$  в вертикальной плоскости  $(X, Z)$ .  $\delta = 0.08, \gamma_1 = 0.0005$ . Пунктиром обозначена движение частицы (стоксов дрейф) с теми же начальными данными при нулевой вязкости. Безразмерное время  $T$  меняется от 0 до 3



Рис. 2. Траектории жидкой частицы с начальными координатами  $X(0) = 0$ ,  $Z(0) = -0.165$  в вертикальной плоскости  $(X, Z)$ . Безразмерное время  $T$  меняется от 0 до 75

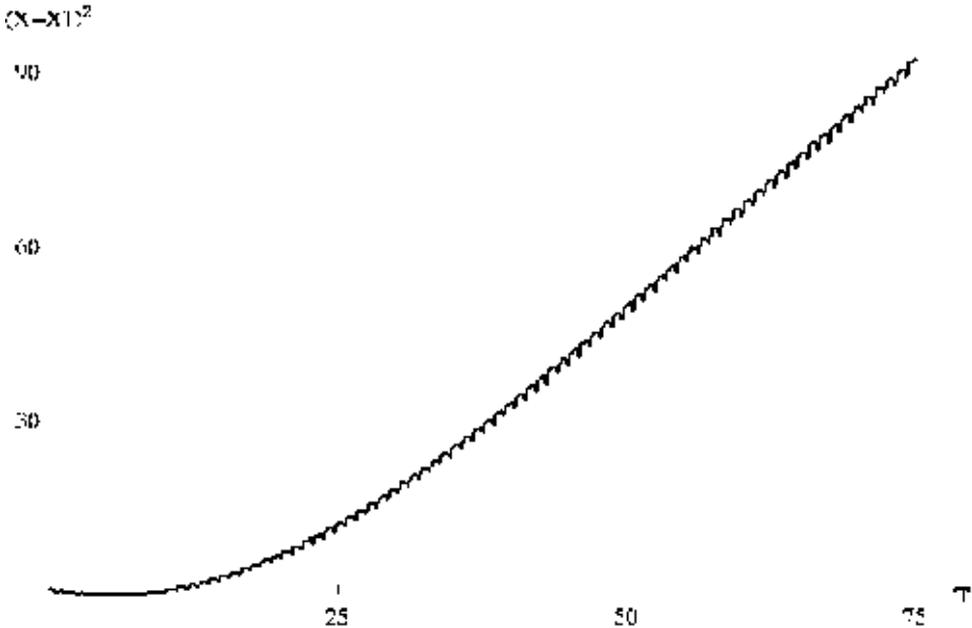


Рис. 3. Зависимость от времени среднего квадрата расстояния между двумя частицами с начальными координатами  $X(0) = 0$ ,  $Z(0) = -0.165$  и  $X_1(0) = 1$ ,  $Z_1(0) = -0.3$ ,  $\delta = 0.08$ ,  $\gamma_1 = 0.0005$

частиц незамкнуты, и частицы, спустя несколько периодов, переходят из волны, где они находились сначала, в соседнюю. Также заметно систематическое уменьшение амплитуды линий тока с горизонтальным расстоянием. Аналогичная картина наблюдается и для частицы с начальными координатами  $X_1(0) = 1$ ,  $Z_1(0) = -0.3$ .

Рис. 3 показывает расхождение со временем среднего квадрата расстояний между двумя частицами, первоначально находившимися в пределах одной волны с начальными координатами  $X(0) = 0$ ,  $Z(0) = -0.165$  и  $X_1(0) = 1$ ,  $Z_1(0) = -0.3$ .

С течением времени этот средний квадрат растёт примерно пропорционально времени, что близко к тому, как это наблюдается в стохастическом случае. Таким образом, численные расчёты демонстрируют, что жидкие частицы не только переходят из одних волн в другие, но и взаимное расстояние между ними растёт со временем приблизительно как корень из времени  $T$ . Все эти свойства решений свидетельствуют о том, что процесс эволюции пятен носит диффузионный характер.

3. Приступим к оценке пока неизвестных нам коэффициентов. Сначала оценим постоянный множитель в формуле Тэйлора (1915) для коэффициента горизонтальной диффузии  $a_2$ , который можно записать в виде [2]:

$$K(r) = a_2 r [D_u(r)]^{1/2}, \quad (21)$$

где  $D_u(r) = \langle [u(x+r) - u(x)]^2 \rangle$  – структурная функция скорости на расстоянии размера пятна примеси  $r$ .

Спектр вертикальных скоростей получается умножением спектра смещений на  $\omega^2$ , а согласно (15) мы принимаем, что амплитуда горизонтальной скорости отличается дополнительным множителем  $\alpha$  от амплитуды вертикальной:

$$S_u(\omega) = (2\gamma_1)^{1/2} S_w(\omega) = \delta S_w(\omega), \quad (22)$$

и сравнение формул (5) и (22) показывает, что искомая величина  $a_1$  в (5) равна  $\delta^{-1}$ , и  $\delta$  есть доля энергии спектра вертикальных смещений, переходящая в горизонтальные смещения.

Переход к пространственному спектру осуществляется при помощи дисперсионного соотношения, которое примем в обычной форме:  $\omega^2 = kg$ . Учитывая, что при переходе к зависимости от  $\omega$  к  $k$  возникает ещё групповая скорость получим следующее общее выражение для спектра горизонтальных скоростей

$$E_u(k) = \frac{1}{2} h \delta g^{\frac{3-n}{2}} k^{-\frac{n-1}{2}}. \quad (23)$$

Структурная функция связана со своим спектром соотношением [12]:

$$D_u(r) = 2 \int_0^{\infty} (1 - \cos(kr)) E_u(k) dk. \quad (24)$$

Если спектр степенной  $E(k) = C / k^{1+\gamma}$ , то преобразование (23) даёт  $D(r) = Ar^\gamma$  где константа  $A$  связана с  $C$  соотношением [12]:

$$A = C \frac{\pi}{\Gamma(1+\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2}}, \text{ где } \gamma = \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}. \quad (25)$$

Для основного случая долгоживущих насыщенных волн  $n = 11/3$ , производя необходимые вычисления, получим при  $\gamma = 1/3$

$$D_u(r) = 3.52 a \delta g^{-1/3} r^{1/3}, \quad (26)$$

откуда с учётом (15) – (24) следует, что

$$K(r) = a_2 r [D_u(r)]^{1/2} = a_2 [3.52 a \delta g^{-1/3} r^{1/3}]^{1/2} r : r^{7/6}. \quad (27)$$

Для типичных средних за год [9] волн с высотой  $h = 270$  см, частотой пика  $\omega = 1.25 \text{ с}^{-1}$ , т.е. с периодом 5 секунд,  $\gamma_1^{1/2} = 2 \cdot 10^{-4}$  получаем, сравнивая (27) с (3) и пренебрегая разностью между 1.15 и 7/6, равной 1/30, в показателях  $\gamma$ , что константа  $a_2 = 5.8 \cdot 10^{-3}$ . При турбулентной вязкости  $\nu_T = 10 \text{ см}^2/\text{с}$  получаем  $a_2 \approx 0.006$ , так как  $K(r) : \nu_T^{1/4}$ .

Напомним, что величина  $h$  получена при среднем для всего океана волнения, да ещё в предположении, что и данные Окубо относятся к тем же условиям. Это, можно думать, для времён порядка недели или даже нескольких месяцев следует считать основной стадией развития волнения, принимаемую за насыщенную. Как подчёркивалось ещё в [10], данные о волнении и метеорологических условиях необходимы для понимания вихревой диффузии на поверхности морей и оке-

анов. Основная зависимость для структурной функции (26) и численного значения  $a_2$  будет определяться силой и временем действия ветра, т. е. возрастом волнения (см. [11]).

Аналогичные действия можно проделать и с результатами Ричардсона и Стоммела. Пересчёт результатов [4], произведённый в [2], даёт  $K(r) = 8.3 \cdot 10^{-2} r^{4/3}$ , а для [5]:  $K(r) = 4.6 \cdot 10^{-2} r^{4/3}$  (в [2] последней зависимости нет, но она может быть получена из рисунка и таблицы там). Отметим, что измерения [4, 5] производились в разных местах недалеко от берега без фиксации волнения и метеорологических условий. Зная, что показатель  $r^{4/3}$  в (16) соответствует молодым волнам с  $n = 13/3$ , можно произвести аналогичные (26) вычисления и получить

$$K(r) = b_1 [2.03 a \alpha g^{-2/3} r^{2/3}]^{1/2} r : r^{4/3}. \quad (28)$$

Не зная характеристик волнения, здесь нельзя оценить множитель перед  $r^{4/3}$ . Просто для примера, возьмём  $h = 50$  см,  $\omega = 2\pi$  (период  $T = 1$  сек). Тогда длина волны будет  $\lambda = 2.43$  м, т. е.  $k = 2\pi / \lambda = 2.6 \text{ м}^{-1}$ ,  $\alpha = (2\gamma)^{1/2} = k \left( \frac{2\nu}{\omega} \right)^{1/2} = 1.4 \cdot 10^{-3}$ .

Тогда  $K(r) = b_1 \cdot 0.125 r^{4/3}$ . С другой стороны,  $K(r) = 4.6 \cdot 10^{-2} r^{4/3}$ . Из сравнения этих двух величин получаем  $b_1 = 0.37$ . Как видно, константа  $a_1$  в формуле ((16)) зависит от возраста волнения вместе с показателем  $\beta$  в зависимости  $K(r) : r^\beta$ . Сравнение  $b_1 = 0.37$  с  $a_2 = 4.3 \cdot 10^{-3}$  даёт различие на два порядка этого предстепенного множителя в формуле (21). Однако учёт турбулентной вязкости  $\nu_T = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$  даёт различие лишь на полпорядка.

Результаты обширных и важных прямых расчётов эволюции спектров морского волнения [3] внесли ясность изменений со временем показателя степени  $n$  в спектре основной энергонесущей части волнения после пика  $\omega_p$  для полупорядка по частотам и порядка по волновым числам. Молодые волны более крутые и для них  $n = -13/3$ , а развитые насыщенные волны более пологи и для них  $n = -11/3$ . В [2] даны аналитические соотношения для оценки физических времён развития волнения в зависимости от скорости ветра. При среднем ветре  $U_{10} = 9$  м/с начальная стадия с  $\Omega = U_{10} / \omega_p > 2$  развивается примерно за 2 часа, промежуточная с  $2 > \Omega > 1.2$  – за 5–6 часов, а стадия насыщения наступает примерно через полсуток [2], (см. также [13]). Ветры над океанами приносят синоптические вихри с размерами порядка  $1000 \text{ км} = 10^6 \text{ м}$ . Такой ветер дует над заданным местом больше суток ( $T = 10^6 \text{ м} / 9 \text{ м/с} = 1.1 \cdot 10^5 \text{ с} : 86400 \text{ с/сутки} = 30 \text{ часов}$ ), что вполне достаточно для насыщения волнения. Это и придаёт смысл результатам Окубо [1].

Остаётся ещё проанализировать в общих чертах зависимость коэффициента диффузии  $K(r)$  от скорости ветра с помощью законов разгона (см. [11] § 2.5): уменьшение частоты пика волнения от безразмерного разгона:  $\omega_p \approx (g / U) F^{-\alpha}$  и квадрата высоты волнения  $h^2 : U^4 g^{-2} F$ , где  $F = xg / U^2$  – безразмерный разгон,  $x$  – линейное расстояние действия ветра, т. е. разгон, например, расстояние от берега, с которого дует ветер. Наиболее популярно значение  $\alpha = 1/3$ . Согласно (26),  $K(r) : a^{1/2} \gamma^{1/4}$ , где согласно ((21))  $a^{1/2} : h_s \omega_p^{4/3}$  при  $n = 11/3$ ,  $\gamma^{1/4} : \omega_p^{-1/4}$ , согласно (10). Собирая все эти зависимости при  $\alpha = 1/3$ , находим, что  $K(r) : h \omega^{13/12}$ , откуда  $K(r) : U^{23/26} g^{2/9} x^{5/36}$ , т. е. зависимость от ветра чуть слабее  $U^{2/3}$ , а от разгона слабее  $x^{1/6}$ . Основное усложнение показателей степени идёт от  $\gamma_1^{1/2} = k(\nu / \omega)^{1/2}$ .

4. Нам остаётся ещё проанализировать зависимость от времени размера пятна  $S(t) : t^\gamma$ , т. е. эмпирическую формулу (2). Используем уравнение диффузии

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} K(r) \frac{\partial S}{\partial r}. \quad (29)$$

Если  $K(r) = ar^\beta$ , то размерность множителя  $a$  равна  $L^{2-\beta}T^{-1}$ , где  $L$  и  $T$  – размерности длины и времени. Поскольку  $a$  – величина постоянная, т.е. не зависит ни от времени, ни от размера  $r$ , то с её помощью можно связать и временную производную слева в (29), введя переменную  $\tau \approx at$  с размерностью  $L^{2-\beta}$ . Отсюда соображения размерности сразу дают для площади  $[S] = L^2$ , что

$$S = r^2 = (at)^{\frac{2}{2-\beta}}, \beta < 2, \text{ д.а. } S(t) = (at)^\gamma, \gamma = \frac{2}{2-\beta}. \quad (30)$$

При  $\beta = 0$ , диффузия с постоянным коэффициентом,  $S(t): t$ , как при броуновском движении. При  $\beta = 4/3$ ,  $S(t): t^3$ , как в атмосфере в случае однородной и изотропной турбулентности [10]. При  $\beta = 1.15$ , как у Окубо [1], величина  $\gamma$  в (30) будет 2.35 вместо 2.34 в [1]. Остаётся лишь удивляться точности глаза у Окубо, который проводил на глаз, как он пишет, прямые в двойных логарифмических координатах. Наша феноменология даёт связь между численными коэффициентами в ((2)) и ((3)):  $0.0108 = c_1(0.0103)^{2.34}$ , откуда следует, что  $c_1 = 482$ .

Итак, в развитие результатов [2] мы обосновали связь между спектрами вертикальных и горизонтальных скоростей в морских ветровых волнах и установили природу численных коэффициентов в зависимости от размера пятна. Найдена связь между ними. Установлена природа основных рассматриваемых физических величин в зависимости от скорости ветра и времени его действия. Для средних по времени и по всему Мировому океану условий оценены необходимые численные коэффициенты.

Отметим, что ещё в 1982 г. в работе [10] задача о диффузии трассера в поле ветровых волн была рассмотрена в простейшем нелинейном приближении: учитывались случайные дрейфовые течения в приповерхностном слое, квадратичные по амплитуде волны. Это позволило объяснить диффузию [1] для пятен с размерами до 100 м. Для больших размеров пятен коэффициент диффузии насыщался, т.е. не рос по величине в противоречии с данными [1]. Авторы [10] отмечают, что для полного объяснения результатов [1] необходимо углубленное понимание физики волн и знание метеорологических условий.

Кроме того, представляется, что дрейфовые течения должны быть более или менее однородными на синоптических масштабах действия ветра в сотни километров и в течение нескольких суток. Их скорости близки к  $u_\alpha = 0.55u^*_{*a}$ , где  $u^*_{*a}$  – скорость трения в атмосфере [14]. При среднем ветре  $U_{10} = 8$  м/с и коэффициенте сопротивления  $c_D = 1.3 \cdot 10^{-3}$  имеем  $u^*_{*a} = 30$  см/с, т.е.  $u_\alpha = 16$  см/с, что более чем на порядок выше, чем получается из формулы ((2)) для скорости движения границы пятна  $u_b$  в интервале времени от  $10^4$  до  $10^7$  секунд, когда  $u_b$  меняется от 0.33 до 1.06 см/с.

Из нашей формулы (7) систематическая компонента горизонтальной скорости в волне оценивается величиной  $h\omega\alpha$ . Для средних по Мировому океану условий при молекулярной вязкости  $\nu = 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с получаем величину порядка 0.07 см/с  $\approx$  1 мм/с. Это на порядок меньше прямой оценки скорости движения границы пятна с помощью формулы (1). По всей видимости это связано со слишком прямолинейным использованием формулы (15) для одиночной гармонической волны с пиковой частотой  $\omega_p$ . На самом деле движение нелинейно с целым спектром час-

тотных компонент, т. е. турбулентно. Для вертикального турбулентного переноса момента, тепла и других субстанций используется турбулентная вязкость [15], которая оценивается величиной порядка  $\nu_t \approx 1 \text{ см}^2/\text{с}$  или больше, на два порядка большей молекулярной. Это увеличивает на порядок величину  $\alpha = (2\nu / \omega k^2)^{1/2}$ , доводя её до величин порядка  $1 \text{ см}/\text{с}$ , т. е. до практически наблюдаемых значений. Такая феноменология приводит к согласию с данными измерений и по скоростям распространения границ пятен трассеров.

При  $\beta = \frac{7}{6}$  получаем  $S : (at)^{2.4}$ , а при  $\beta = \frac{4}{3}$  имеем  $S = (at)^3$ , как в атмосфере в

случае локально изотропной и однородной турбулентности. Как было показано в [2], временной показатель в формуле (29), согласно обработке таблиц Окубо [1], равен  $2.33 \pm 0.10$  против  $2.34$  в [1]. Эти рассуждения указывают на то, что должна быть связь между численными множителями в (1) и (2):

$$0.0108 = c_1(0.0103)^{2.33}. \quad (31)$$

Вычисления дают, что  $c_1 = 461$ . При нашем показателе  $2.4$  величина  $c_1 = 635$ , т. е. в  $1.38$  раза больше, чем при цифрах [1], а при показателе  $2.34$  имеем  $c_1 = 482$ . Следует иметь в виду, что этот показатель стоит и у переменной времени  $t$ . В целом вероятно, что величина  $c_1 : 500$ .

## 2. О задачах обнаружения и распространения диффузионных пятен примеси и времени их жизни

1. Классическая задача о распространении тепла или примеси в однородной среде изучена в мельчайших подробностях. Однако, реальное обнаружение возмущений температуры или диффузионной примеси связано с чувствительностью измерительного прибора, имеющего пороговое значение. С этой точки зрения проанализированы решения для функции Грина (точечного импульсного источника) и для случая постоянного источника возмущений, которые выявляют поведение со временем границ обнаруживаемых приборами пятен и времени их жизни. Решения проанализированы и для случая коэффициентов диффузии, зависящих от координат для одномерного случая и цилиндрической симметрии.

2. Распространение примесей в неоднородных геофизических и других средах приводит к уравнениям с переменным коэффициентом диффузии [2, 4, 5, 15].

Рассмотрим одномерное уравнение диффузии в неоднородной среде. Для коэффициента диффузии будем рассматривать зависимость от координат в виде:

$$D = Ax^m. \quad (32)$$

Сразу отметим, что коэффициент  $A$  имеет размерность  $L^{2-m}T^{-1}$  ( $L$  – масштаб длины,  $T$  – масштаб времени). Само уравнение будет выглядеть как

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial x} \left( x^m \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right). \quad (33)$$

По-видимому, впервые подобное уравнение было рассмотрено в работе [16] (здесь рассматривалась задача о двумерной диффузии в жидкости движущейся со

средней скоростью  $u$  :  $u \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x) \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} \right)$ , где  $A(x)$  меняется как  $x^m$

( $0 < m < 1$ ) и в [17]. Относительно недавно эта задача рассматривалась в [18].

Схожие, но несколько другие уравнения в том числе и для экспоненциальной зависимости от координаты были рассмотрены в [19].

Здесь мы рассмотрим решения уравнения (33) для разных показателей степени  $m$ , в том числе и встречающихся в геофизических приложениях.

3.  $m \neq 2$ . При получении решения используем подход, изложенный, в частности, в [20]. Исходя из вида диффузионного уравнения можно построить автомодельное решение, которое, как можно показать, окажется и функцией Грина данной задачи.

Параметры уравнения дают нам безразмерную комбинацию

$$\xi = \frac{x^{2-m}}{At}. \quad (34)$$

Отсюда видно, что случай  $m = 2$  будет особым и мы его рассмотрим отдельно. Рассматривая решение в виде

$$C(z, t) = t^\alpha f\left(\frac{x^{2-m}}{At}\right)$$

и полагая сохранение постоянства "массы"  $\int_0^\infty C(x, t) dx$  во времени, получим что таким решением будет

$$C(x, t) = t^{-\frac{1}{2-m}} f\left(\frac{x^{2-m}}{At}\right). \quad (35)$$

Далее, полагая  $m = 2 - \delta$ , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $f$ :

$$\delta^2 f_{\xi\xi} + (\delta + \xi) f_\xi + \frac{f}{\delta} = 0 \quad (36)$$

У (36) – два линейно независимых решения

$$f = a_1 e^{-\frac{\xi}{\delta^2}} \delta^{2-\frac{2}{\delta}} + a_2 e^{-\frac{\xi}{\delta^2}} \xi^{1-\frac{1}{\delta}} L_{-1+\frac{1}{\delta}}^{1-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{\xi}{\delta^2}\right), \quad (37)$$

где  $L_{-1+\frac{1}{\delta}}^{1-\frac{1}{\delta}}\left(\frac{\xi}{\delta^2}\right)$  – обобщенные полиномы Лагерра,  $a_1, a_2$  – постоянные коэффициенты. Выбирая решение, ограниченное на бесконечности и, учитывая нормировку  $\int_0^\infty C(x, t) dx = 1$ , получаем для  $C(x, t)$

$$C(x, t) = \frac{\exp(-x^\delta / \delta^2 At)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) (\delta^2 At)^{\frac{1}{\delta}}} = \frac{\exp(-x^{2-m} / (2-m)^2 At)}{\Gamma\left(\frac{3-m}{2-m}\right) ((2-m)^2 At)^{\frac{1}{2-m}}}. \quad (38)$$

Здесь  $\Gamma(\dots)$  – гамма функция.

Полученное решение описывает эволюцию сгустка примеси единичной массы, сосредоточенной в начальный момент времени  $t = 0$  в начале координат  $x = 0$ .

Для квадрата расстояния имеем примерную зависимость  $x^2 : (At)^{\frac{2}{\delta}}$ . При  $\delta > 2$  ( $m < 0$ ) примесь расплывается медленнее линейного диффузионного закона – имеет место *субдиффузия*; при  $\delta < 2$  ( $m > 0$ ) примесь расплывается быстрее – происходит *супердиффузия* [21].

При  $-1 < \delta < 0$  ( $3 > m > 2$ ) нормировочный интеграл расходится (гамма функция с отрицательным аргументом). Само решение при отрицательных значениях  $\delta$  заметно отличается – происходит быстрый прогрев среды до конечной температуры (в случае задачи теплопроводности [19]) или перенос примеси и уже в первые моменты времени функция Грина становится отличной от 0 на бесконечности.

4.  $m = 2$ . Этот случай возникает в двумерной турбулентности, где в [22, 23] было показано, что турбулентная диффузия для масштаба  $l$  в инерциальном интервале каскада энстрофии имеет вид

$$K_l = c_l \varepsilon_\omega^{\frac{1}{3}} l^2. \quad (39)$$

Здесь  $c_l$  – безразмерный коэффициент,  $\varepsilon_\omega$  – диссипация энстрофии. В этом случае размерность коэффициента  $A (= c_l \varepsilon_\omega^{\frac{1}{3}})$  будет  $A : T^{-1}$ . Уравнение (33) может быть обезразмерено по масштабу  $x' = x / \lambda$ . Замена переменной  $\eta = \ln(x')$  приводит к параболическому уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial C(\eta, t)}{\partial t} = A \frac{\partial C(\eta, t)}{\partial \eta} + A \frac{\partial^2 C(\eta, t)}{\partial \eta^2}, \quad (40)$$

которое с подстановкой  $C(\eta, t) = \exp\left(-\frac{At}{4} - \frac{\eta}{2}\right) h(\eta, t)$  [24] приводится к обычному уравнению диффузии с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial h(\eta, t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 h(\eta, t)}{\partial \eta^2}. \quad (41)$$

Отсюда решение уравнения (33) при  $m = 2$  с учетом нормировки будет

$$C(x, t) = \frac{\exp(-At/4 - \ln^2(x/\lambda)/4At)}{(4\pi Axt)^{\frac{1}{2}}}. \quad (42)$$

Решение (42) имеет максимум при  $x_{max}/\lambda = e^{-At}$ , равный  $u(x_{max}, t) = (4\pi At)^{-\frac{1}{2}}$ .

5. Представляет особый интерес двумерное уравнение диффузии в полярных координатах при условиях изотропии коэффициентов турбулентного обмена. В этом случае будет

$$\frac{\partial C(r, t)}{\partial t} = \frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{m+1} \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} \right). \quad (43)$$

Рассматривая решение в виде

$$C(r, t) = t^\alpha g\left(\frac{r^{2-m}}{At}\right)$$

и полагая сохранение постоянства "массы"  $2\pi \int_0^{\infty} C(r,t) r dr$  во времени, получим что таким решением будет

$$C(r,t) = t^{-\frac{2}{2-m}} f\left(\frac{r^{2-m}}{At}\right). \quad (44)$$

Далее, полагая  $m = 2 - \delta$ , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $f$ :

$$\delta^2 \xi g_{\xi\xi} + (2\delta + \xi) g_{\xi} + \frac{2g}{\delta} = 0 \quad (45)$$

Решение (33) будет соответственно:

$$C(r,t) = \frac{\delta}{2\pi \Gamma\left(\frac{2}{\delta}\right)} \frac{\exp(-r^{\delta} / \delta^2 At)}{(\delta^2 At)^{\frac{2}{\delta}}}. \quad (46)$$

Особый случай  $m = 2$  приведет к решению

$$C(r,t) = \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}} r} \frac{\exp(-At - \ln^2(r/\lambda_r) / 4At)}{(At)^{\frac{1}{2}}}. \quad (47)$$

Решение было получено в [23] На рис. 1 приведено поведение (47) при  $A = 1$  в моменты времени  $t = 1, 2, 3$ . Как видно из рисунка – решение представляет собой распределение примеси на единичном кольце в начальный момент времени. Этот вопрос обсуждается в [23, 15]. Коэффициент турбулентной диффузии пропорциональный  $r^2$ , домножается на логарифмический множитель  $[\ln(r_0/r)]^{\frac{2}{3}}$ , получаемый из главного члена разложения спектра двумерной турбулентности.

6.  $m = \frac{4}{3}, \delta = \frac{2}{3}$ . Это случай был рассмотрен Р.В. Озмидовым в 1960 г. [25].

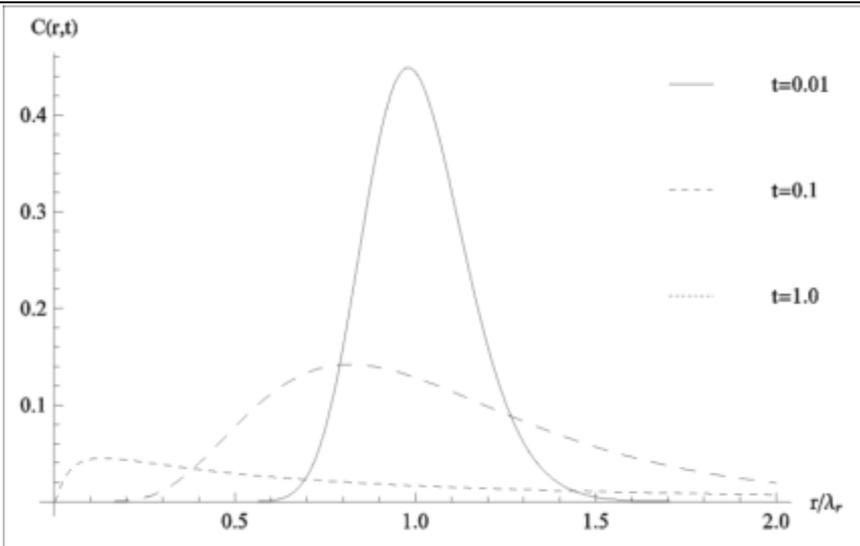
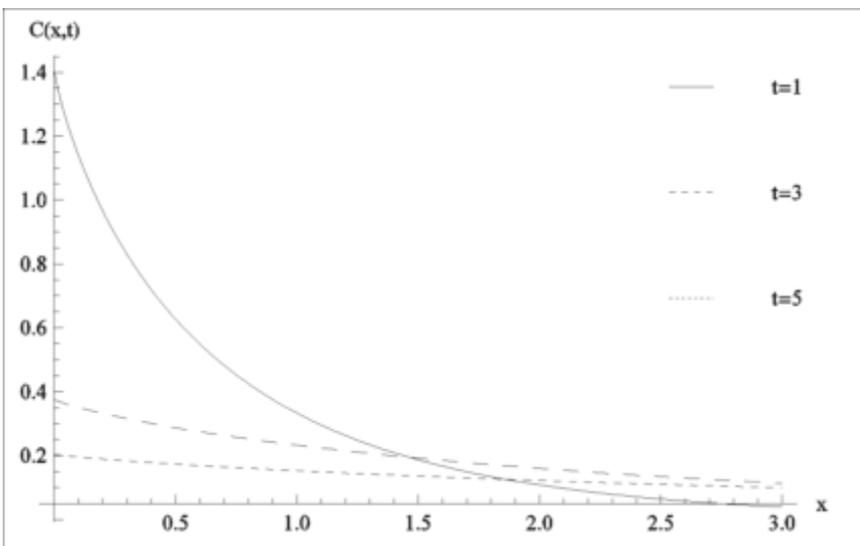
Для диффузии на полупрямой

$$C(x,t) = \frac{\exp\left(-9z^{\frac{2}{3}} / 4At\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}} (At)^{\frac{3}{2}}}. \quad (48)$$

Для двумерной диффузии получим

$$C(r,t) = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \frac{\exp\left(-9r^{\frac{2}{3}} / 4At\right)}{4\pi (At)^3}. \quad (49)$$

7.  $m = \frac{7}{6}, \delta = \frac{5}{6}$ . Для диффузии на полупрямой

Рис. 4. Решение (19) при  $A = 1$  в моменты времени  $t = 1, 2, 3$ Рис. 5. Решение (50) в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ 

$$C(x,t) = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{7}{5}} \exp\left(-36x^{\frac{5}{6}} / 25At\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right) (At)^{\frac{6}{5}}} \quad (50)$$

На рис. 5 приведено поведение (50) при  $A = 1$  в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4, 5$ .  
Для двумерной диффузии получим:

$$C(r, t) = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{19}{5}} \frac{\exp\left(-36r^{\frac{5}{6}} / 25At\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{12}{5}\right) (At)^{\frac{12}{5}}}. \quad (51)$$

8. В связи с дистанционными методами наблюдения за движением границы загрязнений есть понятие уровня обнаружения примеси.

Обозначим уровень обнаружения как  $C_{\text{пор}}$ . Тогда можно определить расстояние, на котором наблюдается пороговое значение примеси от точечного источника в начале координат с интенсивностью  $Q$ . В двумерном случае получим для границы обнаружения примеси:

$$R_{\text{пор}} = \left( -\delta^2 At \ln \left[ 2 / \delta \frac{\pi C_{\text{пор}}}{Q} \Gamma(2 / \delta) (\delta^2 At)^{2 / \delta} \right] \right)^{1 / \delta} \quad (52)$$

Как мы увидим далее граница обнаружения загрязнения сначала растет со временем, достигает максимума, а потом начинает уменьшаться по мере диффузионного расплывания загрязнения. Здесь можно определить характерное время возможности обнаружения примеси из условия

$$\frac{2}{\delta} \frac{\pi C_{\text{пор}}}{Q} \Gamma(2 / \delta) (\delta^2 AT_{\text{пор}})^{2 / \delta} = 1,$$

откуда

$$T_{\text{пор}} = \frac{1}{\delta^2 A} \left( \frac{Q}{C_{\text{пор}}} \frac{\delta}{2\pi \Gamma(2 / \delta)} \right)^{\delta / 2}$$

Используя представление для коэффициента диффузии в виде  $A = a_m L^\delta T^{-1}$ , где  $L$  и  $T$  – характерные пространственные и временные масштабы, а  $a_m$  – безразмерный коэффициент, а также  $t = \tau T_{\text{пор}}$ , получим

$$R_{\text{пор}} = \left( \frac{Q}{C_{\text{пор}}} \right)^{1 / 2} \left( \frac{\delta}{2\pi \Gamma(2 / \delta)} \right)^{1 / 2} \left( \tau \ln(\tau^{-2 / \delta}) \right)^{1 / \delta}, \delta = 2 - m. \quad (53)$$

Динамика радиуса границы обнаружения пороговых значений примеси со временем для различных значений показателя  $m$  приведена на рис. 6. Хорошо видна асимметрия изменения границы со временем.

9. Рассмотрим случай с постоянным источником примеси в начале координат. Для концентрации примеси в двумерном случае получим:

$$\begin{aligned} C(r, t) &= Q \int_0^t \frac{\delta}{2\pi \Gamma(2 / \delta)} \frac{\exp(-r^\delta / \delta^2 A(t-t'))}{(\delta^2 A(t-t'))^{\frac{2}{\delta}}} dt' \\ &= \frac{Q}{2\pi A \delta \Gamma(2 / \delta)} r^{\delta-2} \Gamma(2 / \delta - 1, r^\delta / A \delta^2 t), \end{aligned} \quad (54)$$

где  $\Gamma(\dots, \dots)$  – неполная гамма-функция [26].

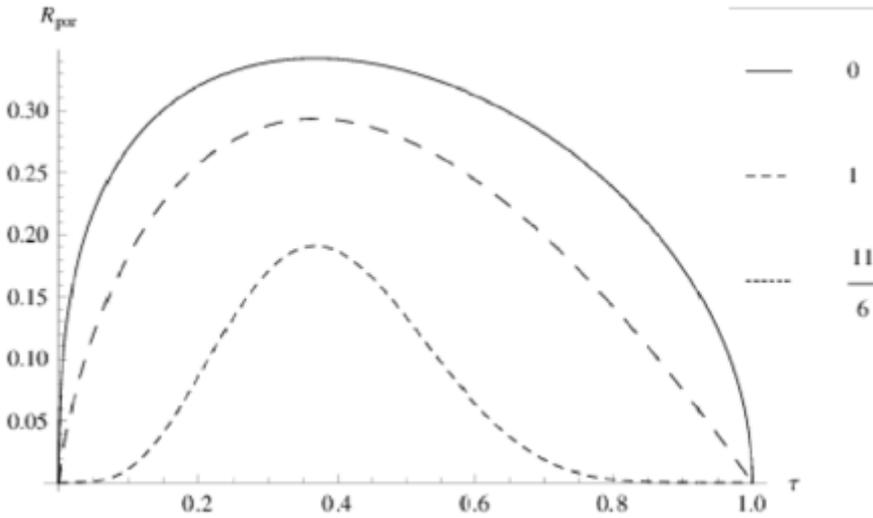


Рис. 6. Временная динамика границы обнаружения пятна загрязнения от точечного источника в начале координат в зависимости от показателя  $m$

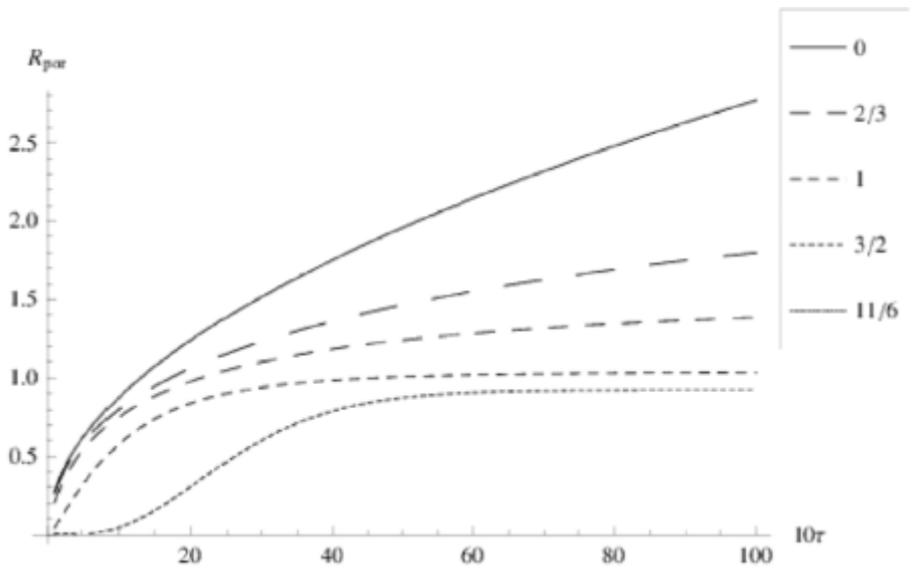


Рис. 7. Рост границы пятна загрязнения со временем при постоянно действующем точечном источнике в начале координат в зависимости от показателя  $m$

Выражение (54) сводится к более простым функциям, в частности при  $m = 0, 2/3, 1, 6/5, 4/3, 3/2, 5/3, 11/6$ . Так при  $m = 0$  граница обнаружения примеси  $R_{\text{пор}}$  и, собственно, размер пятна загрязнения растет как  $t^{1/2}$ . При  $m = 1$  размер пятна загрязнения растет как  $AtW(Q / 2\pi A^2 C_{\text{пор}} t)$ , где  $W(x)$  – функция Ламберта [27].

На рис. 7 приведено численное решение уравнения  $C(R_{\text{пор}}, t) = C_{\text{пор}}$  для различных значений показателя  $m$  (от 0 до  $11/6$ ), имеющее вид в безразмерных переменных  $R_{\text{пор}} = \lambda_{\text{пор}} L$ ,  $t = \tau T / \alpha_m$ ,  $\chi = \alpha_m C_{\text{пор}} L^2 / (QT)$  ( $\chi = 0.1$ ).

$$\lambda_{\text{пор}}^{\delta-2} \Gamma(2/\delta - 1, \lambda_{\text{пор}}^{\delta} / \delta^2 \tau) = 2\pi \delta \Gamma(2/\delta) \chi$$

Как видно, рост границ пятна загрязнения носит степенной характер.

10. Особое поведение – замедление распространения примеси для импульсного точечного источника в начале координат при приближении показателя  $m$  к 2 связаны с соответствующим поведением функции Грина, сосредоточенном при  $m = 2$  в кольцевой области, уже обсуждавшемся выше и рассмотренном также в [19] и [23].

То же возникает и для решения с постоянно действующим источником. Скорость распространения границы пятна примеси замедляется. Так уже для  $m = 1$  при  $t \rightarrow \infty$

$$R_{\text{пор}} \approx Q / (2\pi A C_{\text{пор}}) (1 - Q / (2\pi A^2 C_{\text{пор}} t)).$$

Траектории границы обнаружения с ростом  $m$  также начинают чувствовать близость особого решения при  $m = 2$ .

Отметим нелинейную зависимость размера пятна и других его характеристик от начального объема примеси и характера диффузии, что демонстрируют формулы (53), (54).

### Литература

- [1] Okubo A. Oceanic diffusion diagrams // Deep-Sea Res. 1971. V. 18. С. 789–802.
- [2] Голицын Г.С. Коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии на водной поверхности в зависимости от возраста волнения // Изв. РАН. ФАО. 2011. Т. 47. Вып. 3. С. 426–432.
- [3] Gagnaire-Renou E., Benoit M., Badulin S.I. On weakly turbulent scaling of wind sea in simulations of fetch-limited growth // J. Fluid Mech. 2011. V. 669. P. 178–213.
- [4] Richardson L.F., Stommel H. Note on eddy diffusion in the sea // J. Meteorol. 1948. V. 5. N 5. P. 238–240.
- [5] Stommel H. Horizontal diffusion due to oceanic turbulence // J. Marine Res. 1949. V. 3. N 3. P. 199–225.
- [6] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. 4.1, Гл. 8. М.: ГИТТЛ, 1955.
- [7] Anis A., Moum J. Surface wave turbulence interactions: scaling  $\varepsilon(z)$  near the sea surface // J. Phys. Oceanogr. 1995. V. 25 P. 2025–2045.
- [8] Lamb H. Hydrodynamics. 6th ed. New York: Dover Publications, 1945. Русский перевод: Х. Лэмб. Гидродинамика. М.: ГИТТЛ, 1947. § 349. С. 787–791.
- [9] Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980. 320 с.
- [10] Hertech K., Hasselmann K. The horizontal diffusion of tracers by surface waves // J. Phys. Oceanogr. 1982. V. 12. P. 704–711.
- [11] Голицын Г.С. Энергетический цикл ветровых волн на поверхности океана // Изв. РАН. ФАО. 2010. Т. 46. Вып. 1. С. 10–18.
- [12] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М.: Физматлит, 1967. § 13.
- [13] Голицын Г.С. Статистика и динамика природных процессов и явлений. М.: Изд. КРАСАНД, 2012. 400 с.
- [14] Wu J. Wind induced drift currents // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. N 1. P. 49–70.
- [15] Озмидов Р.В. Диффузия примеси в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1986. 280 с.

- [16] *Sutton W.G.L.* On the Equation of Diffusion in a Turbulent Medium // Proc. Royal Soc. London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1943. V. 182. № 988. P. 48–75.
- [17] *Баренблатт Г.И.* Об одном методе решения уравнения теплопроводности // ДАН. 1950. Т. 72. № 4. С. 667–670.
- [18] *Barenblatt G.I.* Transfer of a passive additive in a turbulent boundary layer at very large Reynolds numbers // Proceedings, US National Academy of Sciences. 2003. V. 100. № 4. P. 1481–1483.
- [19] *Голицын Г.С., Романова Н.Н.* О распространении тепла в разреженных и неоднородных атмосферах // Геомагнетизм и аэронавигация. 1970. Т. 10. № 1. С. 107–113.
- [20] *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. Элементы математической физики М.: Наука, 1973. 351 с.
- [21] *Bouchaud J.-P., Georges A.* Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // Physics Reports. 1990. V. 195. Iss. 4–5. P. 127–293.
- [22] *Lin J.-T.* Relative Dispersion in the Enstrophy-Cascading Inertial Range of Homogeneous Two-Dimensional Turbulence // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. Iss. 2. P. 394–396.
- [23] *Монин А.С., Мирабель А.П.* О статистических закономерностях перемешивания примеси двумерной турбулентностью // Изв. АН СССР. Физика атм. и океана. 1983. Т. 19. № 9. С. 902–919.
- [24] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: Международная программа образования, 1996. 496 с.
- [25] *Озмидов Р.В.* Диффузия примеси в поле однородной изотропной турбулентности // Изв. АН СССР. Сер. Геофиз. 1960. №1. С. 174–175.
- [26] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1108 с.
- [27] *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2006. 160 с.

### 3.3. Процессы в приводном и пограничном слоях атмосферы над морем. Наблюдения инфразвуковых колебаний (голос моря)

*В.Г. Перепелкин, С.Н. Куличков, И.А. Репина*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

#### Введение

Известно, что можно выделить два вида инфразвука, источник которого связан с морским (океанским) волнением – это «микробаромы» и «голос моря».

Микробаромами называется низкочастотный инфразвук с характерными периодами в несколько секунд (обычно 3–10 секунд). Предполагается, что источником микробаром является непосредственно морская поверхность [1–6].

При этом рассматриваются различные механизмы такой генерации. Так один из механизмов генерации микробаром связан с взаимодействием разнонаправленных волн на морской поверхности. Образующаяся в результате этого взаимодействия стоячая волна оказывает давление на морское дно. Вследствие чего возникают смещения морского дна, которые генерируют сейсмические и инфразвуковые волны, распространяющиеся внутрь земной поверхности (микросейсм) и в направлении поверхности моря, а далее в атмосферу (микробаромы). Впервые данный механизм был предложен в 1950-м году в статье [1], где было показано, что генерация микросейсм происходит за счет нелинейного эффекта второго порядка при взаимодействии поверхностных гравитационных волн примерно одинаковой частоты и противоположно направленных друг к другу. В конце 60-х, начале 70-х годов прошлого века в работах [2, 3] описывался аналогичный механизм возникновения инфразвука непосредственно на морской поверхности. Наконец, еще одна модель генерации микробаром была предложена в [4]. Согласно этой модели [4], структуру сигнала микробаром можно представить как сумму двух членов. Первый член описывает 80% излучения и обусловлен пульсациями давления воды вследствие движения волн на морской поверхности. Второй член (20% вклада) обусловлен сжатием воздуха океаническими волнами.

Существенно, что все перечисленные выше модели предполагают в качестве условия возникновения инфразвука образование стоячих волн. Спектр излучаемого инфразвука достаточно узкий и локализован около удвоенной частоты спектра морских волн. Доминантная частота морских волн, как правило, имеет значения около 0,1 Гц. Таким образом, частота генерируемых этими волнами микробаром должна быть примерно около 0,2 Гц, что совпадает с экспериментом.

Ситуация образования областей стоячих морских волн в результате столкновения противоположно направленных волновых систем волн часто возникает в кильватерной зоне океанских тайфунов [5], где поворачивающиеся вместе с циклоническим штормовым вихрем поверхностные волны сталкиваются с существующим фоновым полем поверхностных морских волн. Поэтому регистрация микробаром играет важную роль в прогнозировании перемещения тайфунов. Другой возможной причиной возникновения стоячей волны является столкновение падающей волны и волн, отраженных от скалистых берегов.

Регистрация микробаром на инфразвуковых станциях, как правило, ведется с верхним пределом в частотном диапазоне до 4 Гц и имеет своей целью как обнаружение и прогнозирование распространения океанских тайфунов, так и изучение

сверхдальнего (~1000 км) распространения инфразвуковых волн в атмосфере. В качестве примера такого рода экспериментальных работ можно привести работу [6].

Другим видом инфразвука, связанного с морским волнением является, так называемый, «голос моря» – высокочастотный инфразвук в диапазоне от единиц до десяти и более Герц. Первые документированные экспериментальные исследования такого инфразвука были осуществлены академиком В.В. Шулейкиным [7–8] в 30-х годах XX века. Хотя с «голосом моря» издавна связано много различных мифов и легенд, часть из которых описана в [8] и сообщения о которых периодически появляются на телевидении и в сети Интернет.

В [7] были зарегистрированы инфразвуковые колебания в частотном диапазоне 8–13 Гц. Очевидно, что механизм генерации таких высокочастотных сигналов должен отличаться от механизма генерации микробаром.

Традиционно в качестве механизма возникновения «голоса моря» рассматривается обтекание волн ветровым потоком. Самой первой такой работой была, опубликованная в 1939 году статья академика Н.Н. Андреева [9].

В [9] обтекание ветром гребней волн моделируется обтеканием цилиндра соответствующего диаметра. Полученные, основанные на этом достаточно грубом допущении оценки интенсивности «голоса моря» совпали по порядку величины с экспериментальными данными [7]. В дальнейшем появились и другие работы в которых механизм возникновения инфразвука при обтекании воздушным потоком взволнованной поверхности моря описан с большей степенью тщательности. В качестве примера можно назвать [10], где возникновение инфразвука связывается с обтеканием воздушным потоком трехмерных впадин морской поверхности при сильном шторме.

Отметим также, что все модели данного рода накладывают определенные требования на допустимые скорости ветра и высоту волн. Так, оценки в [9] сделаны для скорости потока 15 м/с и высоте волны 2 м. В [10] отмечается, что «пороговые скорости ветра, при достижении которых ожидается проявление эффекта, лежат выше 25–30 м/с».

В некоторых публикациях наличие «высокочастотного» (в диапазоне единиц и более Гц) инфразвука от морских волнений связывают с акустическим шумом от морских волн, разбивающихся о скалистые берега. Какую-то единую теорию здесь построить достаточно затруднительно, однако имеется несколько экспериментальных работ, где амплитуда инфразвукового шума коррелируется с амплитудой морского волнения вблизи скалистого берега. В качестве примера приведем работу [11], в которой проведено сравнение интенсивности инфразвука с высотой набегающих на скалистый берег волн. Хотя приведенные в [11] результаты выглядят довольно убедительно, отметим, что они были получены для случаев чрезвычайно высоких волн (от 1–7 метров).

Целью настоящей работы является проведение экспериментов по регистрации «голоса моря» в прибрежной зоне Черного моря более современными приборами, чем те, которые использовались в [7] и на современные цифровые носители. Для оценки взаимосвязи регистрируемого высокочастотного инфразвука и наличием морского волнения нами будут использованы данные о ветровой и волновой обстановке (скорость и направление ветра или волн соответственно) в акватории Черного моря, а также данные об интенсивности волнового волнения непосредственно около берега.

## 1. Организация измерений

Работы проводились на базе экспериментального отделения Морского гидрофизического института (МГИ) в районе поселка Качивели (Крым) с 11 по 17-го октября 2011 г. Для регистрации акустических сигналов использовались приемные микрофоны фирмы “Brüel & Kjær” (B&K №№ 4155, 4189) способные регистрировать акустические сигналы в диапазоне частот от 2 Гц до 20 кГц. Чувствительность всего устройства составляла около 4 в/Па, что позволяло регистрировать крайне слабые акустические сигналы. Для определения направления прихода сигналов три микрофона расставлялись по схеме треугольной антенны, как показано на схеме (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема расположения приемных микрофонов вокруг здания гостиницы на территории филиала морского гидрофизического института в Качивели

Для построения карт скорости и направления ветра на акватории Черного моря использовались данные реанализа, адаптированные на сетку  $0,1^\circ$  с применением мезомасштабной модели MM5. [12]. Расчет ветрового волнения на всей акватории Черного моря проводился с использованием европейской ECMWF версии модели ветрового волнения WAM с разрешением  $0,5^\circ$  [13] Для фиксации колебаний взволнованной поверхности использовался струнный резистивный волнограф [14], установленный на океанографической платформе МГИ, на расстоянии около 600 м от берега и 1,5 км от места проведения акустических измерений.

Для интерпретации экспериментальных данных использовалась следующая, разработанная авторами, методика обработки. Измеренные данные разбивались на отрезки длительностью от 1-го до 3-х часов, далее данные приводились к частоте опроса 64 Гц и буферировались на “кадры” длиной 8 сек (512 точек). По каждому, полученному таким образом, временному отрезку рассчитывались задержки прихода сигнала и максимумы парных корреляционных функций между каждой из трех пар микрофонов. Также по показаниям трех микрофонов треугольной антенны рассчитывались значения азимута прихода и фазовой скоро-

сти. Аналогичным образом по каждому временному отрезку рассчитывались спектры сигналов, парные функции когерентности для трех пар микрофонов, по фазовым спектрам сигналов от трех микрофонов были получены спектральные представления азимутов фазовых скоростей прихода сигналов.

Данная методика обработки позволила получить временной ход перечисленных выше параметров и тем самым проследить изменение этих параметров во времени.

Для контроля и сравнения результатов дополнительно использовалась также и стандартная методика обработки инфразвуковых сигналов РМСС, используемая на станциях международной системы мониторинга инфразвука [15].

## 2. Некоторые результаты регистрации «голоса моря»

Ниже будут представлены результаты регистрации «высокочастотного» инфразвука в ночь с 11-го на 12-е октября 2011 года. Именно в этот период были получены основные записи приходов инфразвукового сигнала с южного направления. Кроме того, в это время были зафиксированы ветровые и волновые аномалии в бассейне Черного моря.

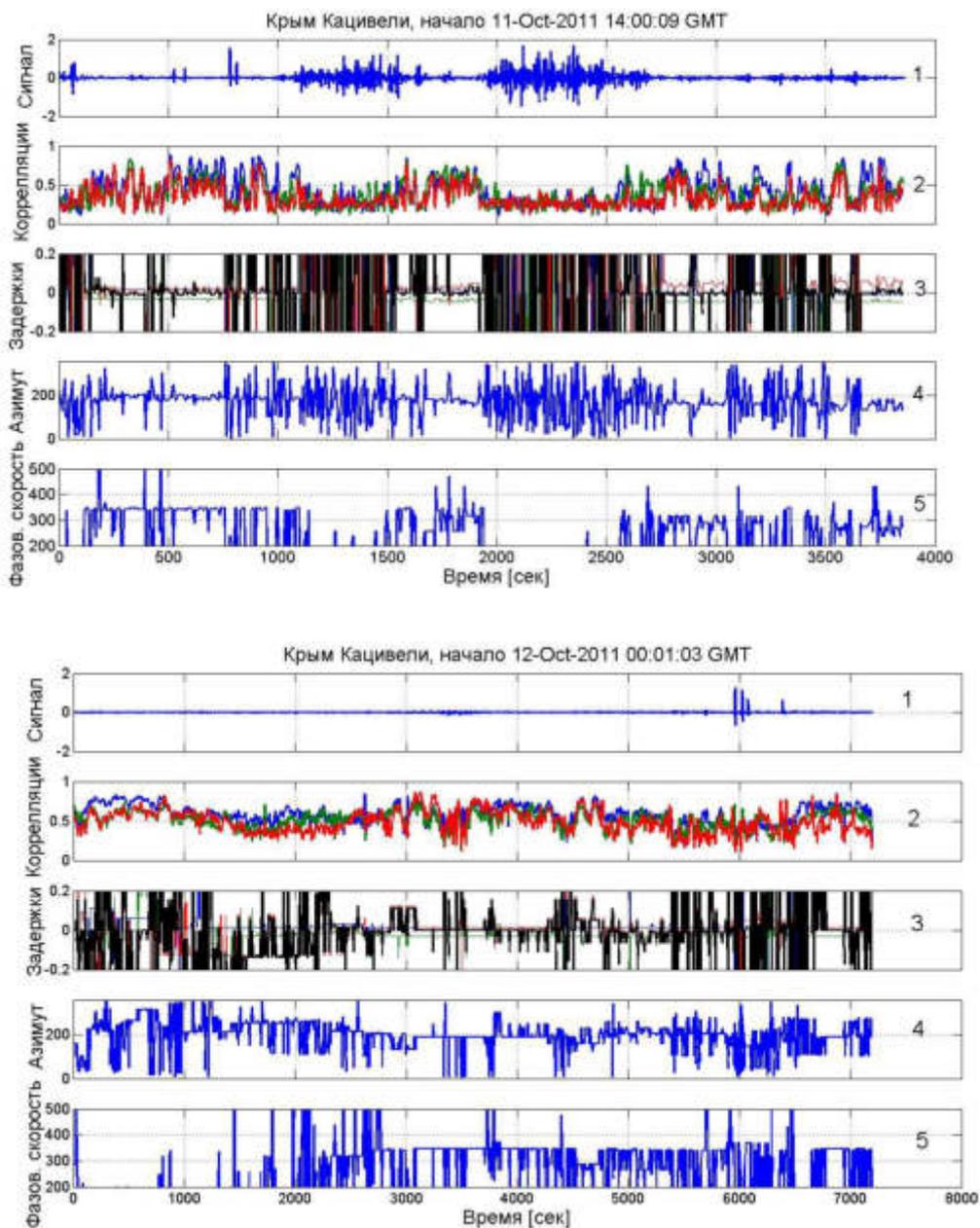
Для совместимости данных регистрации и сопутствующих метеоданных времени на всех графиках соответствует Единому времени UT.

На рис. 2 показаны временные ходы сигналов, максимумов парных корреляционных функций, временных задержек у каждой из трех пар микрофонов, азимутов и фазовых скоростей. На рис. 3 показаны спектры этих параметров, а именно: временной ход спектра сигнала средней по трем парам микрофонов когерентности, спектральное представление азимута и фазовой скорости.

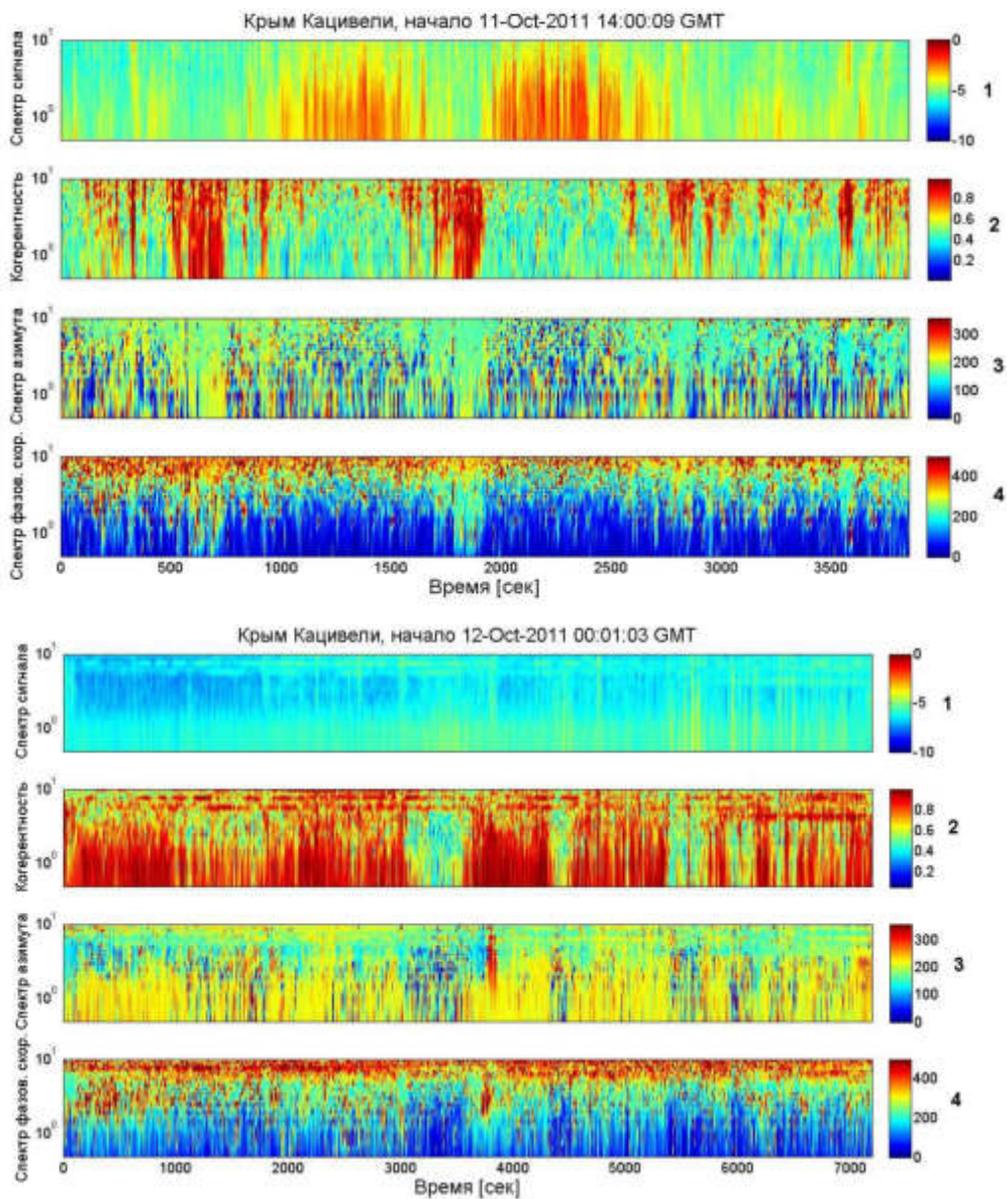
Из множества реализаций мы выбрали два временных отрезка, соответствующих первым появлениям инфразвука в записях сигнала (верхние диаграммы на рис. 2–3 и периоду максимальной интенсивности инфразвуковых приходов (нижние диаграммы на рис. 2–3). Отметим фоновый характер инфразвукового сигнала. Это особенно хорошо видно на верхних диаграммах (рис. 2–3). Даже относительно небольшие акустические или ветровые помехи приводят к исчезновению сигнала. На верхних диаграммах (рис. 2–3) наличие инфразвука хорошо видно на 300-й сек, между 500-й и 700-й сек в районе 3000-й и 3600-й секунд реализации. Что касается нижних диаграмм, то там инфразвуковой сигнал почти непрерывен, и можно говорить лишь о нескольких случаях, когда он перекрывается помехами.

Аналогичные результаты были получены при обработке тех же данных по стандартной методике РМСС [15] (рис. 4–5). Среднее направление прихода сигнала составляет в первом случае  $171,8^\circ$ , во втором –  $185,4^\circ$ , т.е. в обоих случаях сигнал приходит с юга, или с моря.

Приведенные на рис. 3 временные ходы различных спектров сигналов включают в себя сотни индивидуальных спектров, однако непосредственно вид этих спектров, полученных в условиях наличия инфразвукового сигнала, также представляет определенный интерес. Соответствующие примеры спектров, полученных при значимой интенсивности инфразвука, показаны на рис. 6 и на рис. 7. Отметим, что спектральные плотности в диапазоне ниже 2 Гц находятся за пределами частотного диапазона наших измерительных микрофонов и определенные отклонения значений азимутов и фазовых скоростей для этих частот связано,



**Рис. 2.** Инфразвуковой сигнал, зарегистрированный 11–12 октября 2011 г. Верхняя диаграмма – начало регистрации сигнала, нижняя диаграмма – случай наибольшей интенсивности сигнала. На графиках сверху вниз: 1 – временная реализация сигнала, 2 – временной ход максимумов парных корреляционных функций, 3 – временные задержки для каждой из трех пар сигналов (жирная черная кривая – суммарная задержка), 4 – временной ход азимута прихода, 5 – временной ход фазовой скорости



**Рис. 3.** Спектры инфразвукового сигнала, зарегистрированный 11–12 октября 2011 г. Верхняя диаграмма – начало регистрации сигнала, нижняя диаграмма – случай наибольшей интенсивности сигнала. На графиках сверху вниз: 1 – спектр сигнала, 2 – среднее значение трех парных когерентностей, 3 – спектральное представление азимута сигнала, 4 – спектральное представление фазовой скорости

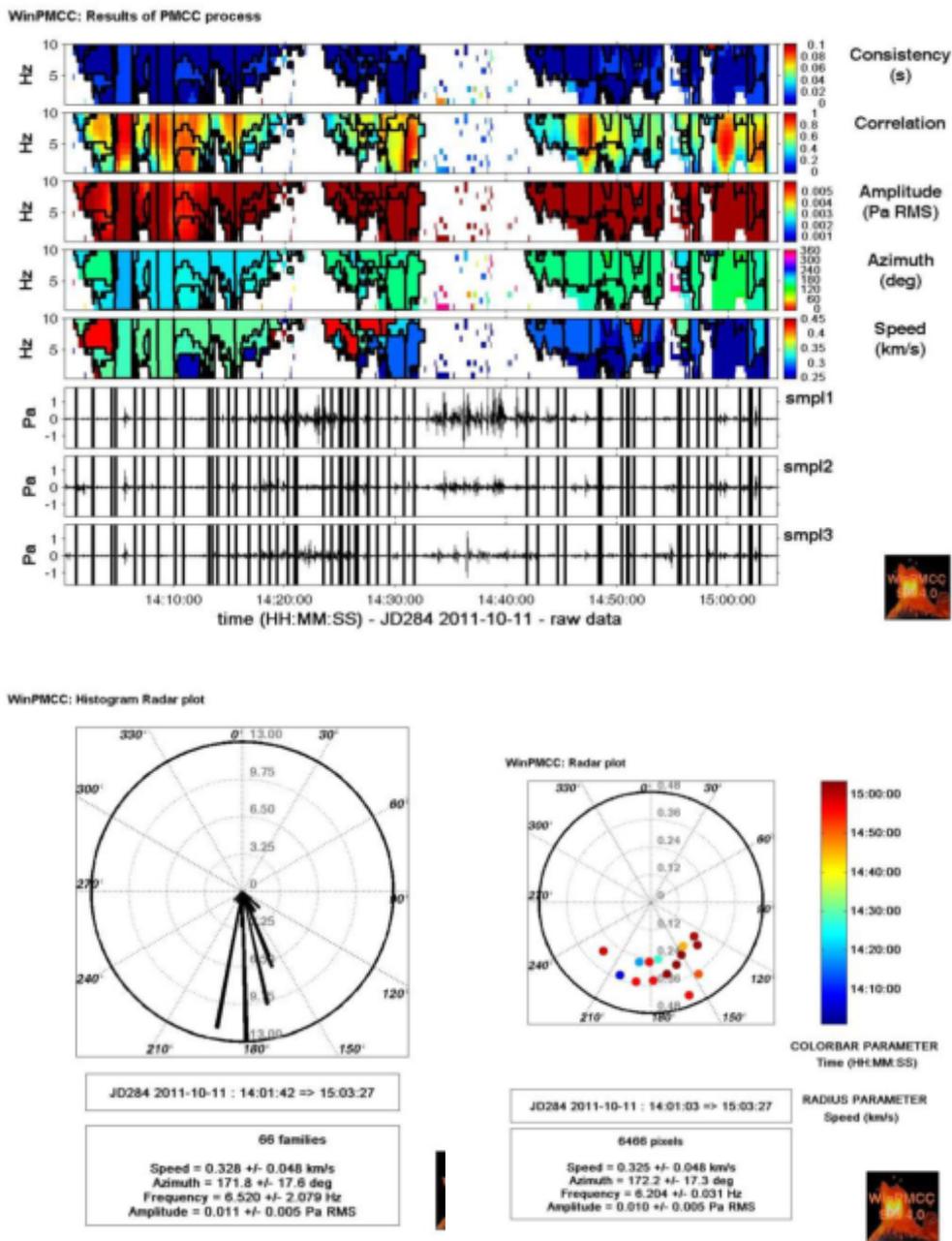


Рис. 4. Результаты обработки реализации, показанной на рис. 2, стандартным методом PMCC [15], на верхней диаграмме показаны (сверху вниз): consistency (средне квадратичная задержка), корреляция, амплитуда, азимут и фазовая скорость, внизу гистограмма и radar plot. Среднее направление прихода сигнала  $171,8^\circ$  (со стороны моря)

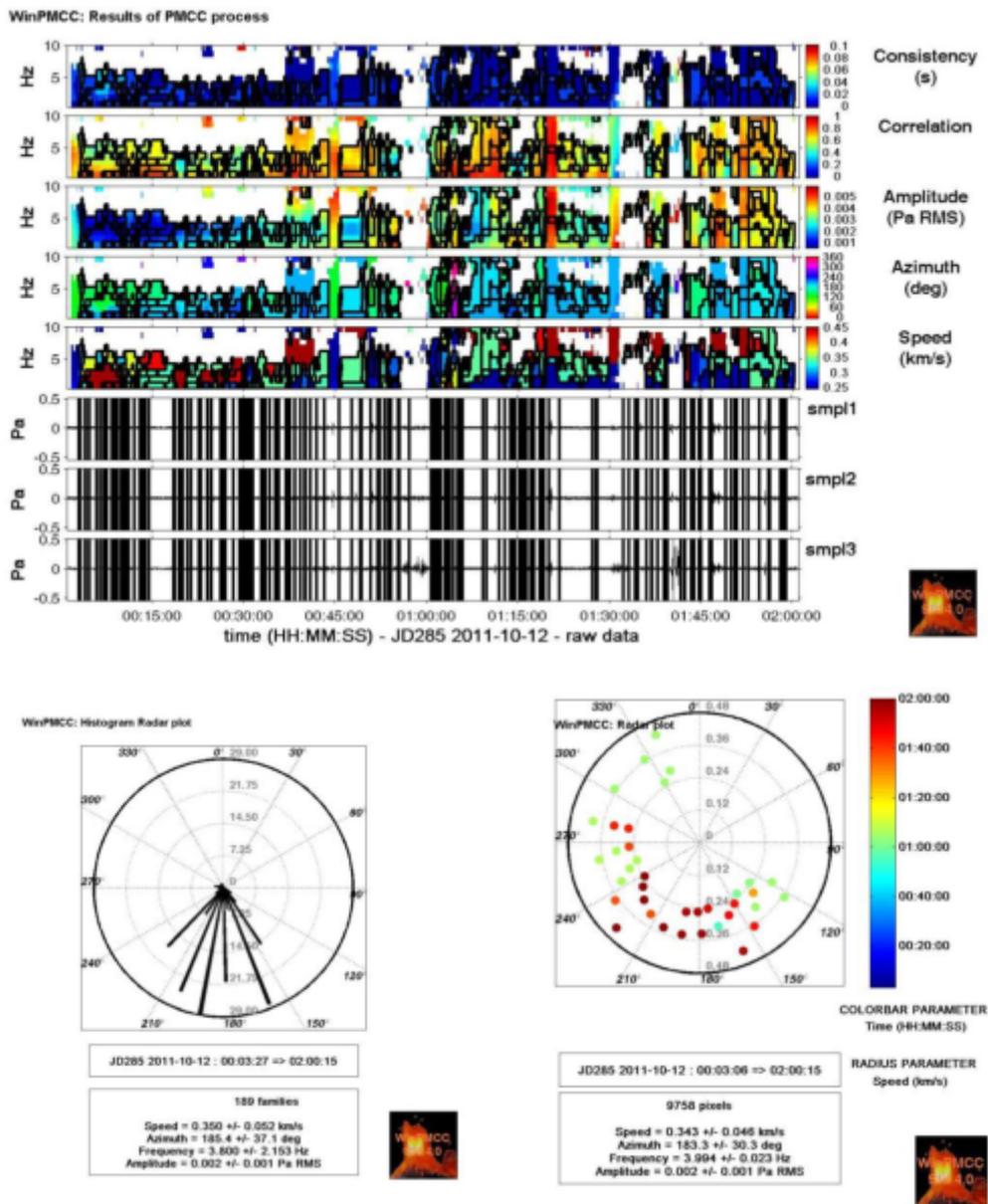
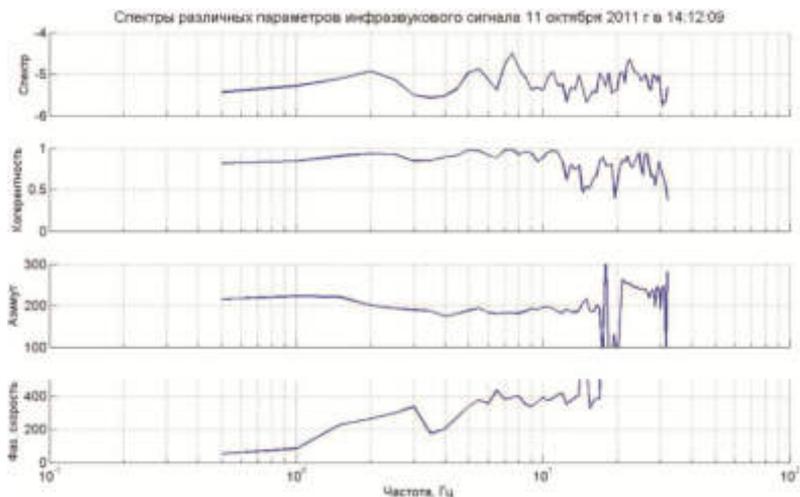
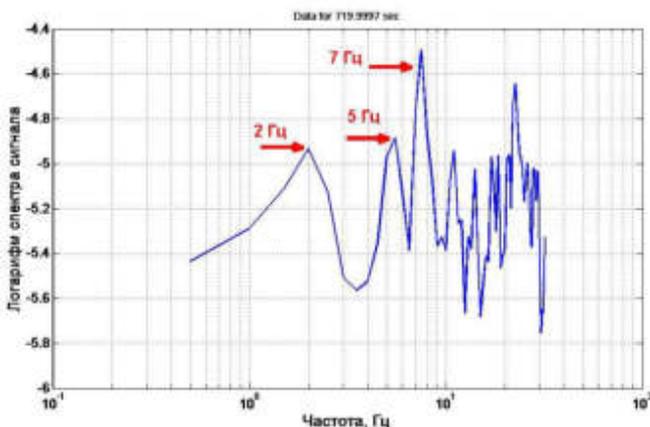


Рис. 5. Результаты обработки реализации, показанной на рис. 3, стандартным методом PMCC [15], на верхней диаграмме показаны (сверху вниз): consistency (средне квадратичная задержка), корреляция, амплитуда, азимут и фазовая скорость, внизу гистограмма и radar plot. Среднее направление прихода сигнала  $185,4^\circ$  (со стороны моря)



**Рис. 6.** Спектры инфразвукового сигнала, зафиксированные 11 октября 2011 г. в 14:12:09 GMT. Сверху вниз: спектральная плотность, спектр когерентности, спектр азимута и спектр фазовой скорости



**Рис. 7.** Фрагмент спектра сигнала, показанного на рис. 6

по-видимому, именно с этим. В целом же спектр когерентности сохраняет весьма высокие значения (более 0,8) вплоть до частоты 11 Гц, спектр азимута на частотах выше 4-х Гц сохраняет стабильные значения 175–200° вплоть до частоты 15 Гц, наконец, спектр сигнала имеет характерные максимумы на частотах 2; 5,5; 7,5 и 11 Гц. Спектр фазовой скорости более неустойчив, тем не менее в диапазоне частот от 5,5 до 12 Гц значения колеблются между 350 и 400 м/с.

Увеличенный фрагмент спектра зарегистрированного инфразвукового сигнала показан на рис. 7. На рис. 7 отчетливо видны спектральные пики на частотах 2, 5, 7 и более Гц, которые традиционно связываются с «голосом моря».

Для того чтобы можно было высказать определенные предположения о физической природе этого сигнала, необходимы дополнительные данные о ветровой и

волновой обстановке вдоль трассы сигнала и о морском волнении в непосредственной близости от места проведения измерений.

Результат анализа полученных данных представлен ниже.

### 3. Ветровая и волновая обстановка в акватории Черного моря 11-го и 12-го октября 2011 г.

Сначала мы проверили гипотезу о местном происхождении зарегистрированных инфразвуковых приходов. Спектральный состав зарегистрированного инфразвука подобен данным в [11]. Как уже отмечалось выше, авторы [11] интерпретировали, полученные ими результаты, как акустический шум от разбивающихся о скалистый берег волн. Однако, здесь имеются весьма существенные отличия. Результаты, показанные в работе [11], получены для случая чрезвычайно высоких волн (до 7-ми метров и во всех случаях не менее 1 метра). Но даже в этих условиях более или менее хорошая корреляция отмечалась, как правило, в периоды максимального волнения.

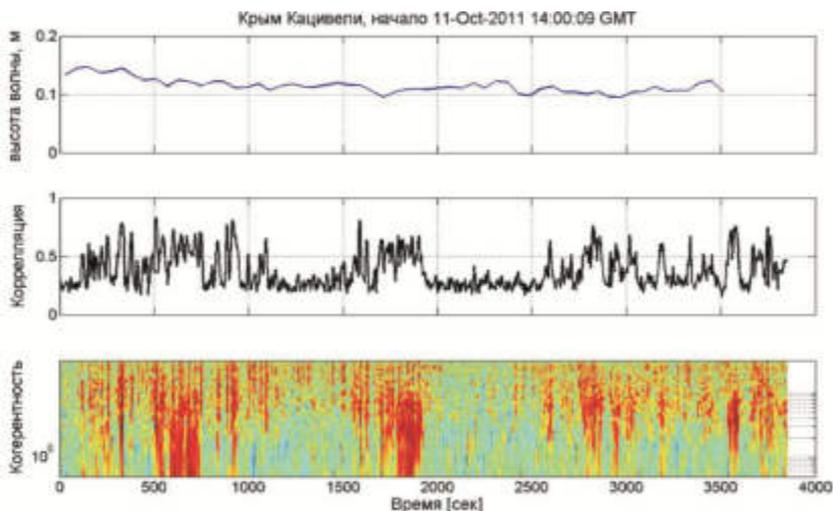
Было проведено сравнение временных ходов интенсивности морского волнения и параметров акустического сигнала (максимумы взаимных корреляционных функция и когерентности), характеризующих наличие инфразвуковых волн. В качестве меры интенсивности морского волнения мы использовали стандартное отклонение уровня моря от его среднего значения. Замеры уровня моря производились с частотой 4 Гц на морской платформе МГИ, на расстоянии около 600 м от берега и 1,5 км от места проведения акустических измерений.

Результаты сравнения показаны на рис. 8. Хорошо видно, что приходы инфразвуковых сигналов (средний и нижний графики) совершенно не коррелируют с интенсивностью морского волнения (верхний график) в регионе регистрации инфразвука. Кроме того, сама интенсивность волнения в этот период относительно мала (0,1–0,15 м) и никак не могла создать значимых акустических шумов.

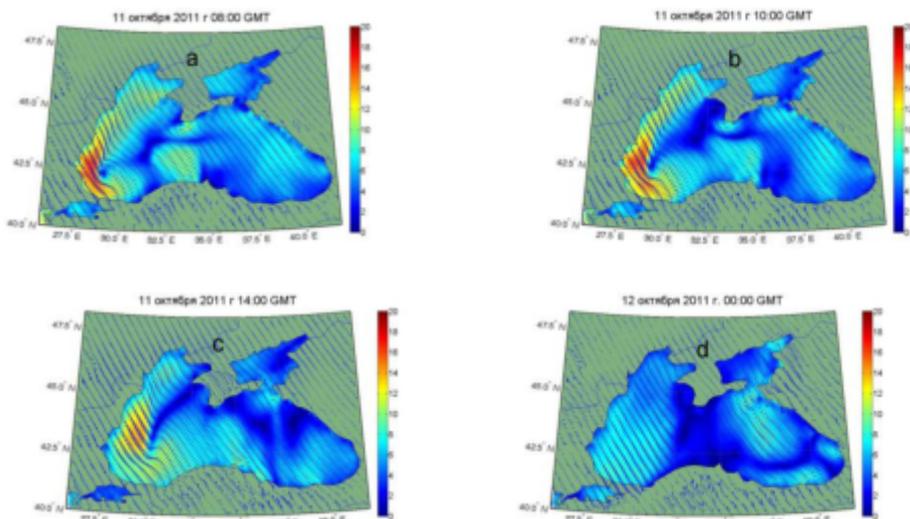
Ветровая обстановка (скорость и направление ветра) в акватории Черного моря показана на рис. 9. Две нижние диаграммы рис. 9 *c–d* соответствуют времени регистрации инфразвуковых приходов, показанных на рис. 2–5. Если скорость ветра в южном направлении на диаграмме с незначительна, т.е. никак не может быть причиной возникновения инфразвука, то диаграмма рис. 9d вообще показывает практически штилевые условия на юге. Однако, нами было отмечена нестандартная ветровая обстановка имевшая место за несколько часов до начала регистрации инфразвука. Так на диаграммах рис. 9 *a–b* отчетливо видно столкновение двух разнонаправленных атмосферных вихрей над морем в непосредственной близости от места проведения акустических измерений. Центр этого столкновения находился как раз на юге.

Конечно, ввиду достаточно длительной временной задержки (4–6 часов) между столкновением вихрей и началом регистрации инфразвука, это событие возможно и не является непосредственной причиной возникновения инфразвука. Тем не менее, разнонаправленные движения ветра вполне могли бы инициировать соответствующие движения волн, которые и явились причиной отмеченных инфразвуковых явлений.

Для проверки этой гипотезы мы использовали карты волновой обстановки в акватории Черного моря. На рис. 10 показана волновая обстановка (высота и направ-

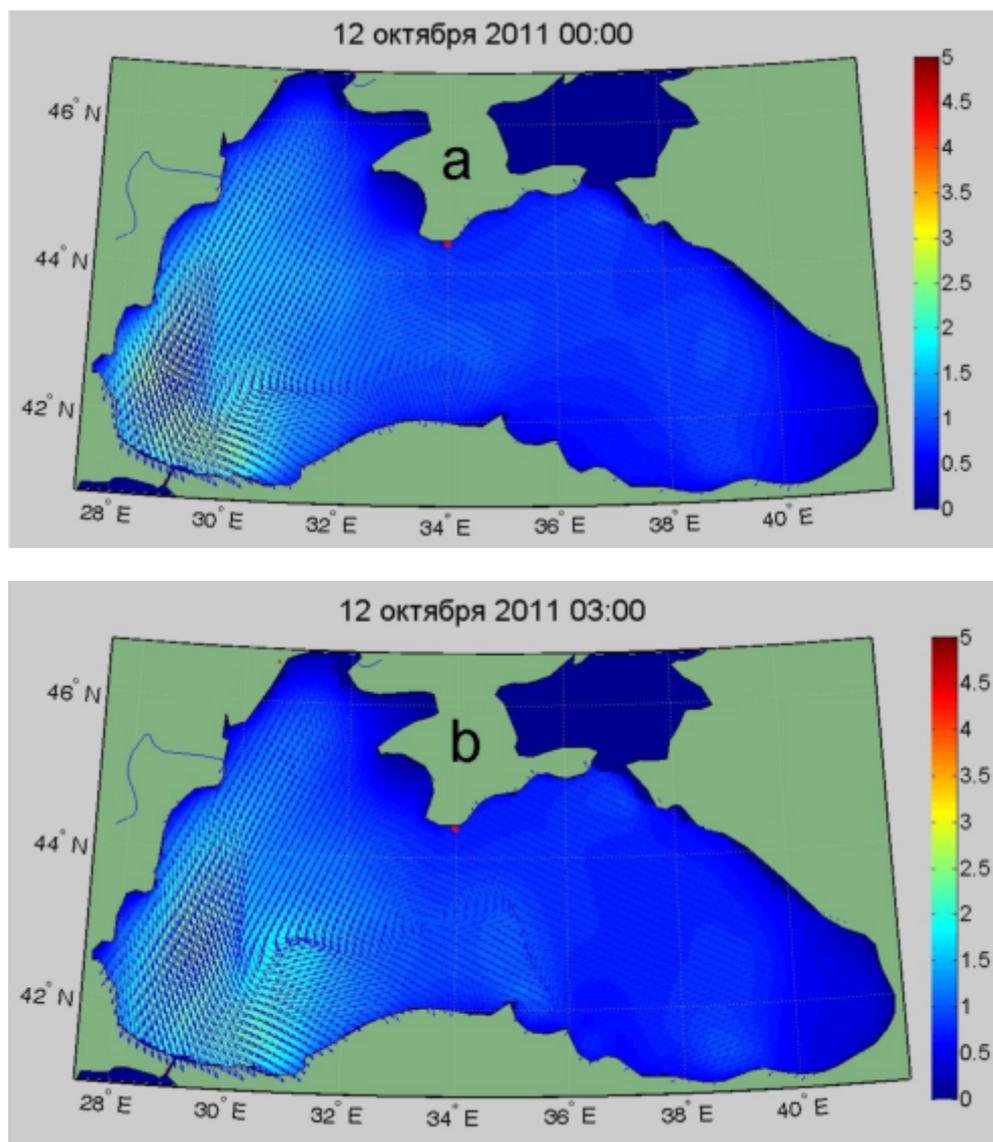


**Рис. 8.** Сравнение волнения моря и приходов инфразвукового акустического сигнала. На верхнем графике стандартное отклонение уровня морской поверхности от среднего значения (данные получены на платформе МГИ), средний график – временной ход среднего максимума трех парных корреляционных функций, нижний график временной ход среднего спектра когерентности



**Рис. 9.** Ветровая обстановка в акватории Черного моря 11–12 октября 2011 г. Значения скорости ветра показаны цветом и размером стрелок, направление ветра показано стрелками. а и b – ветровая обстановка за 6-ть и 4-ре часа до начала регистрации инфразвукового сигнала. с и d – ветровая обстановка во время регистрации (время соответствует времени регистрации инфразвуковых приходов, показанных на рис. 2–5)

ление волн) в акватории Черного моря в 00 часов и в 03 часа 12 октября 2011 г. На обеих картах виден поворот направления волн в южном и юго-западном на-



**Рис. 10.** Волновая обстановка в акватории Черного моря 12 октября 2011 г. в 0:00 часов (а) и в 3:00 (б). Высота волн показана цветом и длиной стрелок, направление волн показано стрелками

правлениях от пункта акустических измерений. Однако, если на верхней карте (рис. 10 а), соответствующей 00 часов, видно лишь изменение направления волн, более отчетливо в юго-западном направлении и менее и менее отчетливо в южном направлении, то на нижней карте (рис. 10 б) можно различить волновой вихрь по центру акватории и в южном направлении от пункта акустических измерений. К сожалению, полученные нами карты волновой обстановки имеют гораздо более грубое разрешение по пространству и по времени, что не позволило

нам получить более точную картину изменения волновой обстановки (разрешение по времени 3 и 6 часов, для сравнения ветровые карты имеют разрешение 1 час).

### Обсуждение результатов

Таким образом, результаты акустических измерений в акватории Черного моря с использованием современных приборов и при регистрации на цифровые носители убедительно показывают наличие высокочастотного инфразвука, в диапазоне частот 2–7 Гц, который традиционно связывается с так называемым «голосом моря».

Для оценки взаимосвязи регистрируемого высокочастотного инфразвука и наличием морского волнения нами были использованы данные о ветровой и волновой обстановке (скорость и направление ветра или волн соответственно) в акватории Черного моря, а также данные об интенсивности волнового волнения непосредственно около берега.

При этом, выявление механизма генерации зарегистрированного инфразвука не являлось целью настоящей работы и требует проведения специальных исследований.

### Литература

- [1] *Longuet-Higgins M.S.* A theory of the origin of microseisms // *Philos. Trans. R. Soc. London.* 1950. V. 243. P. 1–35.
- [2] *Бреховских Л.М.* Об излучении океанскими волнами инфразвука в атмосферу // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1968. Т. 4. №4. С. 444–450.
- [3] *Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Куртенов В.М., Наугольных К.А.* К вопросу об излучении инфразвука в атмосферу поверхностными волнами в океане // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1973. Т. 9. №9. С. 899–907.
- [4] *Waxler R., Gilbert K.E.* The radiation of atmospheric microbaroms by ocean waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. V. 119. P. 2651–2664.
- [5] *Hetzer C.H., Waxler R., Gilbert K.E., Talmadge C.L., Bass H.E.* Infrasound from hurricanes: Dependence on the ambient ocean surface wave field // *Geophys. Res. Lett.* 2008. V. 35. L14609.
- [6] *Walker K.T.* Evaluating the opposing wave interaction hypothesis for the generation of microbaroms in the eastern North Pacific // *J. of Geoph. Res.* 2012. V. 17. C12.
- [7] *Шулейкин В.В.* О голосе моря // *ДАН.* 1935. Т. 3 (8). № 6. С. 259.
- [8] *Шулейкин В.В.* Физика моря. М.: Наука, 1968. 1083 с.
- [9] *Андреев Н.Н.* О голосе моря // *ДАН.* 1939. Т. 23, №7. С. 625.
- [10] *Semenov A.G.* On "Voice of Sea" Generation Mechanism // *Intern. J. Geoscience.* 2013. V. 4. P. 116–128.
- [11] *Garces M., Aucan J., Fee D., Caron P., Merrifield M., Gibson R., Bhattacharyya J., Shah S.* Infrasound from large surf // *Geophys. Res. Lett.* 2006. V. 33. L05611.
- [12] *Dudhia J.* A nonhydrostatic version of the Penn State/NCAR mesoscale model Validation tests and simulation of an Atlantic cyclone and cold front // *Mon. Wea. Rev.* 1993. V. 121. P. 1493–1513.
- [13] *Komen G.J., Cavaleri L., Donelan M., Hasselmann K., Hasselmann S., Janssen P.A.E.M.* Dynamics and Modelling of Ocean Waves. Cambridge Univ. Press, 1994. 532 p.
- [14] *Толокнов Ю.Н., Коровушкин А.И., Козлов К.Г.* Автоматизированный гидрометеорологический комплекс // *Системы контроля окруж. среды.* 1998. С. 12–17.
- [15] *Cansi Y.* An automatic seismic event processing for detection and location: the PMCC method // *Geophys. Res. Lett.* 1995. V. 22. P. 1021–1024.

### 3.4. Полуфеноменологические модели приводного слоя атмосферы

**В.Г. Полников**

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

#### 1. Полуфеноменологическая интегральная модель ПСА – ИМПСА

##### Введение

Данный раздел посвящен описанию идеологии и деталей построения концептуально новой модели динамического приводного слоя атмосферы (ДПСА) по работе [1].

Напомним, что основное назначение полуфеноменологической модели ДПСА состоит в установлении связи характеристик приводного слоя атмосферы (в частности, скорости трения  $u^*$ ) с двумерным пространственным спектром ветровых волн  $S(k_x, k_y)$  (или его частотно-угловым аналогом  $S(\omega, \theta)$ ) и средним ветром на стандартном горизонте  $W$  на основе базовых уравнений динамики вблизи границы раздела сред. В качестве итоговой математической основы такой модели служит уравнение баланса потока импульса вида<sup>1</sup>

$$T_{\text{mod}}(W, u^*, S) = u^{*2}. \quad (1)$$

Физическое содержание левой части (1) должно следовать из фундаментальных уравнений гидродинамики.

Как было показано ранее [2], задача построения физической части модели ДПСА может решаться различными путями: численно, эмпирически и полуфеноменологически. Достоинством полуфеноменологических моделей, построенных на основе уравнения (1), является их физическая обоснованность, базирующаяся на уравнениях гидродинамики, и отсутствие излишне громоздкой аналитической или численной детализации, которая заменяется рядом достаточно простых и ясных феноменологических построений. На основании анализа, выполненного в [2], наиболее перспективными для их дальнейшего развития отмечены модели [3] и [4]. Там же были отмечены и недостатки этих моделей. Их развитие может быть построено на результатах исследования профиля фетра в слое волнения, описанных в работе [5]. Именно такая, концептуально новая модель ДПСА, будет и представлена в данном разделе.

##### 1. Базовые соотношения

Физическую основу всех упомянутых моделей ДПСА составляет тот или иной вариант аналитического представления некоего набора составляющих левой части уравнения (1), который в общем случае имеет вид

$$\tau_w + \tau_v + \tau_t = u_*^2, \quad (2)$$

где в левой части принято выделять волновую  $\tau_w$ , вязкую  $\tau_v$  и турбулентную  $\tau_t$  составляющие полного напряжения. Здесь важно подчеркнуть, что часть потока  $\tau_w$  напрямую связана с передачей энергии от ветра волнам. При этом вязкая  $\tau_v$  и турбулентная части  $\tau_t$  создают лишь тангенциальное напряжение на поверхности,

---

<sup>1</sup> Здесь и далее везде поток импульса к волнам записывается без знака и в нормировке на плотность воздуха  $\rho_a$ .

не влияющее на энергетику волн. Фактически, проблема заключается в нахождении достаточно адекватного аналитического представления для каждой из указанных составляющих.

Следует специально отметить, что уравнение вида (2) традиционно принято приписывать некоторой узкой области атмосферного слоя, расположенной непосредственно на средней поверхности раздела сред воздух–вода  $\eta(\mathbf{x}, t)$ . При этом в оценках тангенциальных составляющих потока импульса к границе раздела сред неявно полагается, что обтекание случайной и нестационарной поверхности  $\eta(\mathbf{x}, t)$  практически аналогично обтеканию твердой поверхности. Стохастичность, предполагающая наличие резких изменений формы границы раздела сред, и ее нестационарность, обусловленная многократными вертикальными волновыми движениями, в таком случае в расчет не принимается.

Напомним, что в полуфеноменологическом подходе для описания волновой части потока импульса  $\tau_w$  общепринято привлекать известную функцию  $IN(S, \mathbf{W})$ , описывающую скорость накачки энергии волн ветром, которая традиционно представляется в виде [2]:

$$IN(S, \mathbf{W}) = \beta(\omega, \theta, W, \theta_w) \omega S(\omega, \theta), \quad (3)$$

где  $\beta(\omega, \theta, W, \theta_w)$  есть так называемый инкремент роста волн, задаваемый обычно в виде полуэмпирической безразмерной функций своих параметров. В таком случае, на условном, среднем уровне поверхности раздела сред,  $z = \langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ , принято считать, что

$$\tau_w(z=0) \equiv \tau_w(0) = \rho_w g \int \frac{k \cos(\theta)}{\omega} IN(S, \mathbf{W}, \omega, \theta) d\omega d\theta. \quad (4)$$

Следовательно, не останавливаясь на техническом вопросе выбора вида  $\beta(\omega, \theta, W, \theta_w)$ , можно полагать, что представление для потока  $\tau_w$  в уравнении (2) уже известно.

В отличие от  $\tau_w$ , относительно процедуры вычисления величин  $\tau_t$  и  $\tau_v$  единство подхода отсутствует, поэтому в каждом из перечисленных ранее вариантов модели ДПСА расчет этих величин существенно различается. Такое различие обусловлено как различием поставок задач (дифференциальная или интегральная, т.е. с расчетом профиля  $W(z)$  или без такого расчета), так и нечеткостью представления о том для какого горизонта в системе воздух–вода записано само уравнение (2). Поэтому, с целью большего понимания причин разделения полного потока на составляющие в уравнении (2), целесообразно воспроизвести его вывод, что и позволит продвинуться в решении вопроса определения его составляющих.

## 2. Вывод уравнения баланса. Введение понятия «зона волнения»

При выводе уравнения баланса импульса (2) будет показано, что для случая подвижной поверхности раздела сред, вид представления левой части (2) определяется не только детальностью учета процессов на стохастической взволнованной границе раздела сред  $\eta(\mathbf{x}, t)$ , но и правилами статистического осреднения<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Основные выкладки данного раздела, взятого из работы [1], были любезно предоставлены автору В.Н. Кудрявцевым в 2010 г.

Для получения уравнения баланса (2), в качестве исходных используются уравнения Навье-Стокса, записанные в тензорном представлении для трехмерного нестационарного турбулентного течения воздуха со средней скоростью  $W(z)$  над поверхностью раздела сред  $\eta(\mathbf{x}, t)$ :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(u_\alpha u_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha i}}{\partial x_i} . \quad (5)$$

Здесь в переменной скорости  $u$  для компонентного индекса  $\alpha$  достаточно ограничиться только значением 1 (если рассматривать только перенос горизонтального импульса), в то время по индексу  $i$  используются все значения 1,2,3, соответствующие  $x, y, z$  компонентам, поскольку по повторяющимся индексам подразумевается выполнение суммирования. Кроме того, в (5)  $p$  есть поле давления, записанное в нормировке на плотность воздуха, а  $\tau_{\alpha i}$  – тензор вязких напряжений (см. пояснения в [1]).

Задача заключается в получении из (5) уравнений для потоков импульса  $\tau_{i,j} = \langle u_i u_j \rangle$ . Для этой цели используется процедура интегрирования уравнения (5) по вертикальной переменной  $z$  от поверхности раздела сред  $\eta(\mathbf{x}, t)$  до некоторого горизонта  $z$ , расположенного далеко от взволнованной поверхности. Для получения результата привлекается формула дифференцирования интеграла по параметру (формула Лейбница)

$$\frac{\partial}{\partial p} \left( \int_{a(p)}^{b(p)} f(x, p) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial p} f(x, p) dx + \left[ f(x, p) \frac{\partial b(p)}{\partial p} \right] \Big|_{x=b} - \left[ f(x, p) \frac{\partial a(p)}{\partial p} \right] \Big|_{x=a} . \quad (6)$$

После прямого интегрирования (5) с использованием формулы (6), при значениях в ней пределов  $a = \eta(\mathbf{x}, t)$  и  $b = z$ , из (5) следует

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\eta}^z u_\alpha dx_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \int_{\eta}^z u_\alpha u_\beta dx_3 \right) - u_\alpha u_3 \Big|_z = \\ & \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \int_{\eta}^z p dx_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \int_{\eta}^z \tau_{\alpha\beta} dx_3 \right) + \left( p \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha} \right) \Big|_{\eta} - \tau_{\alpha 3} \Big|_z + (\tau_{\alpha 3} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta}{\partial x_\beta}) \Big|_{\eta} \end{aligned} \quad (7)$$

где появляющийся индекс  $\beta$  аналогичен выделенному индексу  $\alpha$  (см детали в [6]).

Теперь необходимо провести пространственно-временное осреднение уравнения (7), положив, для простоты, конкретные соотношения для средней горизонтальной скорости  $W(z)$  и ее турбулентных флуктуации, например, вида

$$u_1(x, z) = W(z) + u'(x, z), \quad u_2(x, z) = 0, \quad u_3(x, z) = w'(x, z) . \quad (8)$$

При этом следует помнить, что осреднение (7) должно быть выполнено дважды: как по масштабам турбулентности, так и масштабам изменчивости волнового поля. Первый тип осреднения оставляет интегральные формы (для  $\alpha = 1$ ) практически без изменения, в то время как все слагаемые в обеих частях (7), свободные от знаков интегралов, дают как раз те самые потоки импульса, которые мы ищем.

Для стационарного и однородного потока над твердой и горизонтальной поверхностью раздела сред интегральные слагаемые в (7) обращаются в нуль. Для

подвижной и горизонтально неоднородной поверхности указанные слагаемые также могут быть обнулены, только если перейти к масштабам горизонтально однородного и стационарного описания поля волн, т.е. после выполнения осреднения (7) по ансамблю волн (которое делает поле волн стационарным и однородным по пространству). Заметим, кстати, что именно такое осреднение по ансамблю и позволяет перейти к спектральному представлению для волн, используемому в теории ДПСА.

В результате указанных действий появляется итоговое уравнение вида (2) [6]

$$\langle \langle p \partial \eta / \partial x \rangle + \langle \tau_x \rangle \rangle = \langle - \langle u_x u_z \rangle \rangle = u_*^2. \quad (9)$$

Здесь малые угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по турбулентным масштабам, а крупные  $\langle \dots \rangle$  – по ансамблю поля волн. Существенно, что здесь уже привязка к профилю волны  $\eta(x, t)$  исчезает. В таком случае, вообще говоря, должна иметь место особая трактовка слагаемых уравнения (9), обусловленная нестационарностью и неоднородностью границы  $\eta(x, t)$ . Дадим такую трактовку, предварив ее традиционным рассмотрением.

Традиционно, слагаемое  $\langle p \partial \eta / \partial x \rangle$  в левой части (9) трактуется как поток импульса к поверхности раздела сред, связанный с работой сил давления, а второе слагаемое есть вязкая составляющая потока. Обычно первому слагаемому приписывают смысл  $\tau_w$ , а последнему смысл суммы  $(\tau_v + \tau_l)$ , которое далее уместно называть «тангенциальным» (см. ур. (2)). При этом само уравнение (9) в традиционном подходе трактуют как уравнение на границе раздела сред  $\eta(x, t)$ , (см. трактовку вязких членов в [7]) подразумевая, что осреднение по масштабам волнения происходит путем скольжения по текущей границе раздела сред, схематично изображенной на рис. 1.

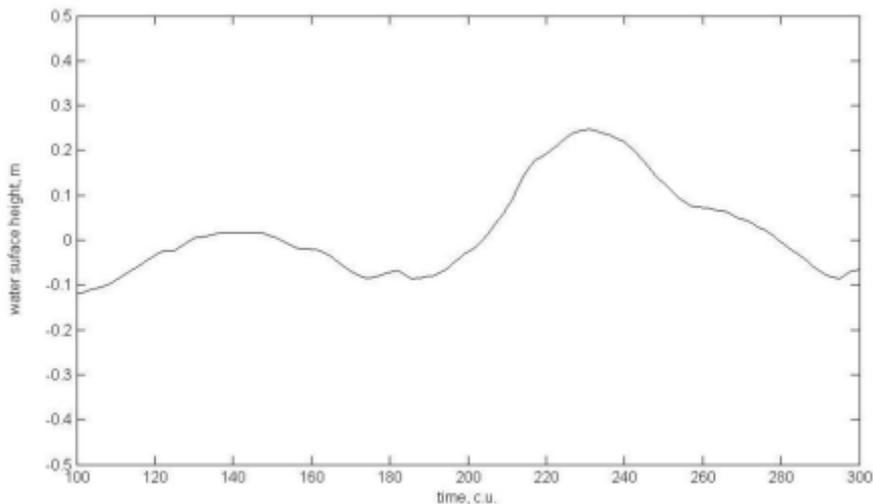
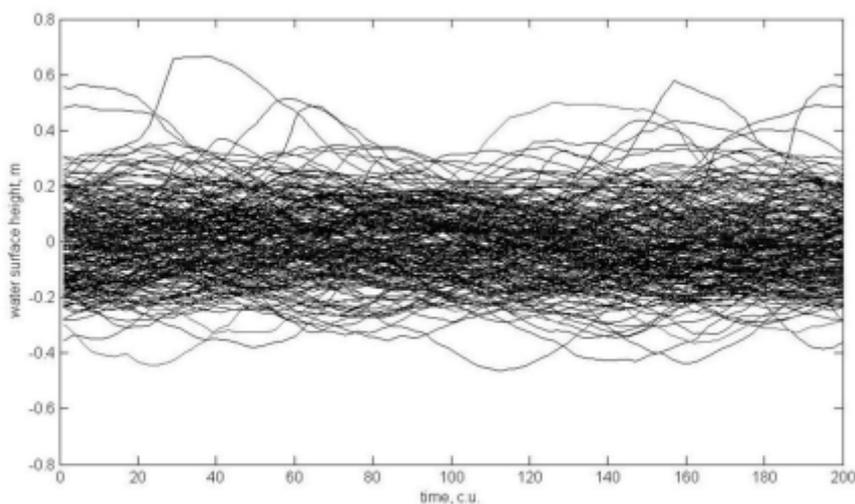


Рис. 1. Элемент реальной волнограммы  $\eta(x, t)$  (шкала времени дана в условных единицах)



**Рис. 2.** Совокупность (ансамбль) двухсот отрезков волнограммы  $\eta(x, t)$  (шкала времени дана в условных единицах)

Традиционно, при таком осреднении неявно предполагается горизонтальная и временная инвариантность вертикальной структуры ПСА, вне зависимости от фазы волны (т.е. единообразие в профиле среднего ветра  $W(z)$  при  $z$ , отсчитанной от текущего положения границы). Однако такой, явно упрощенный подход, вызван лишь стремлением прямого использования указанной выше традиционной трактовки слагаемых. Вместе с тем, и это физически очевидно, что в указанной, «отслеживающей» системе координат косвенно нарушаются положения о стационарности и горизонтальной однородности среднего движения, необходимые для устранения интегральных слагаемых в (7).

На самом же деле, динамика обтекания взволнованной поверхности (а с ней и вертикальная структура ПСА) существенно различается на гребнях, впадинах, наветренной и подветренной сторонах профиля волн. Иными словами, горизонтальная и временная инвариантность вертикальной структуры ПСА при скольжении вдоль профиля волны (см. рис. 1) нарушается. Этот «умозрительный», но достаточно очевидный вывод подтверждается и численными решениями полных уравнений Навье-Стокса (см., например, [8–10]). Поэтому результат осреднения уравнения (7) по ансамблю волн для случая *хаотической взволнованной поверхности*, которое требуется как для устранения нестационарности и горизонтальной неоднородности вертикальной структуры ПСА, так и для перехода к спектральному представлению волнения, дает основания для поиска иной трактовки уравнения (9).

Для решения данного вопроса, более естественной является трактовка осреднения уравнения (7), как осреднения, выполненного по статистическому ансамблю взволнованных поверхностей, условно изображенному на рис. 2. Понятно, что в таком случае уравнение (7) осредняется не на конкретном горизонте. а по всей зоне волнения, расположенной между уровнями подошв и гребней волн и занимающей по вертикали пространство от  $-H$  до  $H$  относительно среднего уровня границы раздела сред.

Согласно [5], величина  $H$  имеет порядок стандартного отклонения  $D$ , заданного соотношением

$$D = \sqrt{\langle (\eta - \langle \eta \rangle)^2 \rangle}. \quad (10)$$

Кроме того, при указанном осреднении, каждое из слагаемых в левой части (9) претерпевает такие изменения, значение которых невозможно определить и трактовать заранее, т.е. вклады слагаемых в левой части (9) в результирующие значения  $\tau_w$  и  $\tau_t$  просто нельзя разделить. На этом основании можно считать, что в левой части итогового уравнения баланса (9) имеются только два типа слагаемых:

- обобщенное волновое напряжение  $\tau_w$  (англоязычное название – form drag), которому соответствует весь перенос энергии от ветра к волнам,
- и обобщенное тангенциальное напряжение  $\tau_t$  (англоязычный аналог – skin drag), не связанное с энергетикой волн.

Таким образом, итоговое уравнение баланса (9) несколько «упрощается» и приобретает вид<sup>3</sup>

$$\tau_w(W, u_*, S, \omega_p) + \tau_t(W, u_*, S, \omega_p) = \tau_{tot}, \quad (11)$$

в котором вклады отдельных слагаемых левой части (9) в величины волновых и тангенциальных напряжений (11) не могут быть детализированы.

Следует отметить, что запись уравнения баланса импульса в виде (11) не является новой и, как уже было упомянуто выше, широко используется [3, 11, 12]. Здесь лишь констатируется следующие принципиально важные заключения:

- 1) Априорная неразличимость вкладов составляющих левой части уравнения (9) в левую часть (11).
- 2) Отсутствие привязки уравнений (9) и (11) к какой-то конкретной вертикальной координате. Эти уравнения применимы во всей зоне волнения (равно как и спектр волн не привязан к конкретной точке уровня волнограммы). Именно здесь проявляется «интегральный» характер рассматриваемой модели ДПСА.

Далее, для величины  $\tau_w$  в (11), как и обычно, полагается, что она может быть определена через функцию накачки по формуле (4) путем выбора адекватного представления для эмпирического инкремента роста  $\beta(\omega, \theta, W, \theta_w)$ . Но формула для вычисления величины суммарного, как мы ее теперь называем, «тангенциального» напряжения  $\tau_t$  заранее не известна.

В таком случае, конкретизация представления функции  $\tau_t(u_*, S)$ , очевидно, должна выполняться методами статистической гидромеханики, т.е. путем ее параметризации через размерные и безразмерные характеристики интерфейса воздух-вода в целом. В этом и состоит специфичность новой трактовки уравнений (2) и (11).

Величина  $\tau_{tot}$ , стоящая справа в (11), имеет смысл среднего по ансамблю волн полного потока импульса от ветра к взволнованной поверхности. Вполне естественно считать, что  $\tau_{tot}$  имеет значение потока импульса, реально измеряемого на некотором горизонте в области ПСА, расположенном на расстоянии, не менее

<sup>3</sup> Отметим, что здесь уместно отказаться от термина «турбулентная часть напряжения», обозначающего слагаемое  $\tau_t$ , а называть его «тангенциальным напряжением», подчёркивая его вклад только в перенос импульса в поверхности раздела сред, не связанного с переносом энергии к волнам.

чем в 3–5 раз превышающем самые большие гребни волн. В таком случае, как и обычно,

$$\tau_{tot} = \langle -u'w' \rangle \Big|_{z \gg H} = u_*^2 = const, \quad (12)$$

где  $u_*$  – скорость трения.

Естественно считать, что обе составляющие полного потока импульса зависят от таких определяющих характеристик системы, как:

- скорость ветра на фиксированном стандартном горизонте (обычно  $z = 10$  м)  $W$  (или его аналог в виде скорости трения  $u_*$ ),
- двумерный спектр волн  $S(k_x, k_y)$  (или его аналог в частотно-угловом представлении  $S(\omega, \theta)$ ),
- а также от таких интегральных характеристик волнения как: частота максимума спектра волн  $\omega_p$ , их высота  $H$ , и ряд безразмерных характеристик системы, типа возраста волн  $A = c_p / W$  и средней крутизны взволнованной поверхности  $\varepsilon = Hk_p$ , где  $c_p$  и  $k_p$  есть фазовая скорость и волновое число доминантных ветровых волн (т.е. компонент, соответствующих частоте пика спектра волн  $\omega_p$ ).

В такой постановке решение проблемы ДПСА сводится к детализации и нахождению решения уравнения (11) относительно неизвестной величины  $u_*$  как функции всех перечисленных выше параметров системы.

### 3. Параметризация $\tau_w$

Как уже отмечено ранее, величина  $\tau_w$  по физической природе принципиально отличается от тангенциальной составляющей  $\tau_t$ . Однако имеется и «техническая» целесообразность выделения потока  $\tau_w$  из полного потока импульса, обусловленная тем, что  $\tau_w$  связано с передачей энергии от ветра к волнам. Такую величину  $\tau_w$ , в определенной мере, можно, как измерить, так и описать теоретически на языке уравнений динамики волн (см. ссылки в [12–16]). Именно такая изученность потока  $\tau_w$  позволяет дать ему аналитическое представление в виде формулы (4) через функцию накачки волн ветром  $IN$ , имеющую общепризнанное теоретическое и эмпирическое обоснование.

Детальное представление  $IN$ , полезное для дальнейшего, можно записать в виде

$$IN(\dots) = (u_* / c_\omega)^2 (\rho_a / \rho_w) \tilde{\beta}(u_* / c_\omega, \theta, \theta_w) \cdot \omega S(\omega, \theta) \propto u_*^2 \propto W^2, \quad (13)$$

где использованы стандартные обозначения, не нуждающиеся в пояснениях (см. ниже). Физическое содержание  $IN$  состоит в задании скорости потока энергии от ветра к волнам (на единицу поверхности). Теоретически хорошо обоснованные элементы функции  $IN(\dots)$ , таковы:

- 1) явная квадратичная зависимость от скорости трения  $u_*$  (или от  $W$ ), специально выделенная в записи правой части (13);
- 2) пропорциональность отношению плотностей воздуха и воды ( $\rho_a / \rho_w$ );
- 3) линейность по спектру волн  $S$ .

Остающаяся, теоретически неопределенная безразмерная функция  $\tilde{\beta}(u_* / c_\omega, \theta, \theta_w)$ , обычно параметризуется на основании различного рода экспериментальных измерений [15] и численных экспериментов [16]. Однако стоит заметить, что в силу упомянутой теоретической неопределенности, аналитическое представле-

ние  $\tilde{\beta}(u^*/c_\omega, \theta, \theta_w)$  далеко не однозначно. Приведем примеры таких представлений.

Так, в области частот  $\omega$  (или волновых чисел  $k$ ), охватывающих энергонесущий интервал гравитационных волн в достаточно широких пределах

$$\omega_p \leq \omega < 5\omega_p, \quad (14)$$

функция  $\tilde{\beta}(u^*/c_\omega, \theta, \theta_w)$  с точностью порядка 50% представима в виде [17]

$$\tilde{\beta}(\dots) = 32\{[1 + 0.136/(u^*/c_\omega) + 0.00137/(u^*/c_\omega)^2]\cos(\theta - \theta_w) - 0.00775(u^*/c_\omega)^2\} \quad (15)$$

Такое представление применяется тогда, когда в формуле (13) используется параметризация функции накачки  $IN$  через скорость трения  $u^*$ . Вместе с тем, существуют также и представления вида  $IN(W)$ , когда параметризации  $IN$  выполняется через локальный ветер на стандартном горизонте  $W$ . Среди таковых уместно привести одну из последних, в которой  $\tilde{\beta}(\dots)$  (с той же точностью) задается в виде [15]

$$\tilde{\beta}(\dots) = G[\varepsilon(k), \theta, \theta_w](1 - c_\omega(k)/W)^2, \quad (16)$$

где  $G[\varepsilon(k), \theta, \theta_w]$  – эмпирическая функция от локальной крутизны волн  $\varepsilon(k)$ , волнового числа  $k$ , направления распространения волн  $\theta$  и направления ветра  $\theta_w$ .

В более широком интервале частот, включающем капиллярный интервал волн вплоть до 100 р/с (где, кстати, набирается наиболее значимая часть потока импульса  $\tau_w$ ), по понятным (техническим) причинам контактные измерения  $\tilde{\beta}(u^*/c_\omega, \theta, \theta_w)$  становятся невозможными. Этот дефицит информации в определенной мере удается компенсировать другими методами.

Так, дистанционные измерения [18, 19] и численные оценки [10] свидетельствуют о том, что в высокочастотном интервале,  $\tilde{\beta}$  имеет вид широкого несимметричного «купола» (рис. 3) с максимум в области частот порядка 3 р/с (соответствующее волновое число порядка  $1 \text{ м}^{-1}$ ). Кроме того, величина  $\tilde{\beta}$  спадает до нуля как в области низких частот, соответствующих условию  $W/c_\omega \ll 1$  (т.е. когда волны существенно обгоняют ветер), так и в области высоких частот, соответствующих области минимума фазовой скорости  $c_\omega$  [18, 19].

Относительно углового распределения функции  $IN(\dots)$  хорошо известно только то, что оно еще менее изучено, чем распределение по частоте [10, 20]. Обычно угловая функция  $IN$  параметризуется через четную функцию угла  $(\theta - \theta_w)$ , где  $\theta_w$  – направление локального ветра (см. детали в ссылках и ниже). Тем не менее, приведенных данных об  $IN$  оказывается достаточно для решения нашей задачи.

Относительно оценки  $\tau_w$  по формуле (4), дополнительно важно отметить, что интеграл в правой части (4) является медленно сходящимся [2, 10]. Именно по этой причине, пределы интегрирования в (4) должны простираться от частоты максимума спектра волн  $\omega_p$ , имеющих порядок (0.5–2) р/с, вплоть до частот порядка 100 р/с ( $k \cong 1000 \text{ р/м}$ ), включающих область существования капиллярных волн, где величина  $\tilde{\beta}$  резко спадает (рис. 3), что и обеспечивает сходимость интеграла в (4).

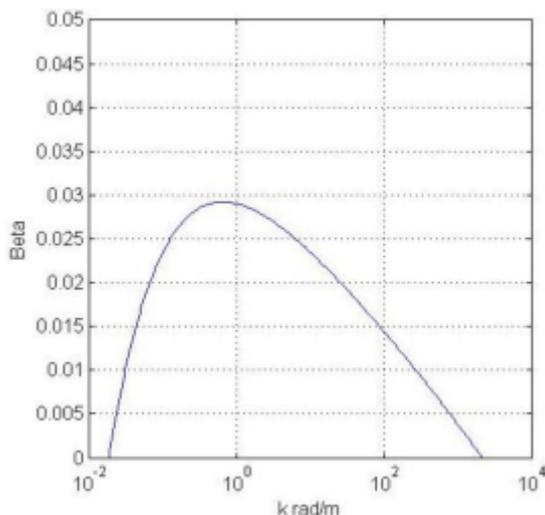


Рис. 3. Общий вид нормированного инкремента роста  $\bar{\beta}(k)$  в широком интервале волновых чисел

Однако сведения о форме и значении спектра волн на таких частотах весьма труднодоступны, как для контактных измерений, так и для регулярных численных расчетов. По этой причине, для достаточно аккуратной оценки потока  $\tau_w$  требуется использование специального технического приема, заключающегося в разделении спектра волн на две принципиально различные части:

- низкочастотный спектр  $S_L$  (НЧ-спектр), реально измеряемый (или рассчитываемый по численной модели) спектр гравитационных волн,

и

- высокочастотный спектр  $S_H$  (ВЧ-спектр), модельное представление которого находится с использованием разнообразных дистанционных измерений и их теоретической интерпретации [18, 19].

Таким образом, дальнейшее продвижение в построении модели ДПСА предполагает использование представление спектра волн  $S(\omega, \theta)$  в виде двух слагаемых, например, в виде, предложенном в [18]:

$$S(\omega, \theta) = S_L \cdot \text{cut} + S_H \cdot (1 - \text{cut}), \quad (17)$$

где  $\text{cut}(A, \omega)$  – известный обрезаяющий множитель. Поскольку нас интересуют интегральные оценки типа (4), то в предлагаемой модели вполне приемлемо представление  $\text{cut}(A, \omega)$  в виде ступенчатой функции, скачком изменяющейся с ростом частоты от 1 до 0 в области частот  $\omega \approx 3\omega_p$ .

Теперь, принимая для фазовой скорости гравитационно-капиллярных волн соотношение

$$c_\omega = \omega(k) / k = [gk(1 + \gamma k^2) \text{th}[kd]]^{1/2} / k, \quad (18)$$

и полагая, что  $\theta_w = 0$ , формулу (4) можно переписать в следующем общем виде, пригодном для волн на мелкой воде:

$$\begin{aligned} \tau_w &= \rho_a u_*^2 \left[ \int_{\Omega_L} \frac{k^2}{\text{th}[kd]} \cos(\theta) \tilde{\beta}(\dots) S_L(\omega, \theta) d\omega d\theta + \right. \\ &+ \left. \int_{\Omega_H} \frac{k^2 \cos(\theta)}{(1 + \gamma k^2) \text{th}[kd]} \tilde{\beta}(\dots) S_H(\omega, \theta) d\omega d\theta \right] = \quad , \quad (19) \\ &= \tau_{wL} + \tau_{wH} \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения воды, деленный на  $g$ , а  $d$  – локальная глубина жидкости, и  $\tau_{wL}$  – вклад в  $\tau_w$  от низкочастотной (относительно легко измеряемой) энергонесущей части спектра волн  $S_L$  (с областью интегрирования  $\Omega_L$ ), а  $\tau_{wH}$  – вклад от высокочастотной части спектра  $S_H$  (область интегрирования  $\Omega_H$ ), для которой необходимо применять модельное представление, основанное на обобщении большого числа дистанционных наблюдений различного рода [18, 19].

Итак, поскольку обе части спектра принципиально представимы в количественной форме, можно считать, что согласно (19) величина волновой части потока  $\tau_w$  полностью известна как функция спектра волн  $S$ , скорости ветра  $W$ , скорости трения  $u_*$ , направления ветра  $\theta_w$ , генерального направления волн  $\theta_p$  и интегральных характеристик волнения: возраста волн  $A$  и их крутизны  $\varepsilon$ . Вводя безразмерные величины  $\hat{\tau}_{wL}$  и  $\hat{\tau}_{wH}$ , можно записать соотношение (19) в новой форме

$$\tau_w = u_*^2 [\hat{\tau}_{wL}(W, u_*, S, A, \varepsilon, \theta_p, \theta_w) + \hat{\tau}_{wH}(u_*, S, A, \varepsilon, \theta_p, \theta_w)], \quad (20)$$

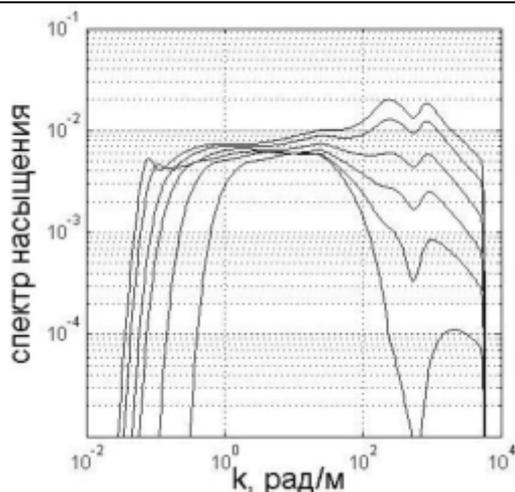
слагаемые которого потенциально известны.

Отметим, что, в слагаемом  $\tau_{wL}$  скорость ветра  $W$  специально сохранена в качестве аргумента, чтобы обеспечить возможность получения зависимости  $u_*(W)$ , как решения уравнения (11) относительно  $u_*$  (в противном случае, такая зависимость не может быть найдена из системы уравнений 11, 20). Кроме того, с целью упрощения процедуры оценки высокочастотной составляющей  $\hat{\tau}_{wH}$ , рассчитав ее однажды на основе уже известных решений относительно формы высокочастотной части спектра волн на воде  $S_H$  по работам [18, 19], предлагается вместо формулы для  $\hat{\tau}_{wH}$  построить и использовать ее численную конкретизация в виде числового массива (см ниже).

#### 4. Численная конкретизация $\hat{\tau}_{wH}$

С целью конкретизации функции  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, A, \dots)$  величина  $\hat{\tau}_{wH}$  была численно рассчитана в [1] как функция скорости трения  $u_*$  и возраста волн  $A$ , определяемого значением волнового числа доминантных волн  $k_p$ . Для этой цели использовались модельные представление ВЧ-спектра  $S_H(k, \theta, \theta_w, u_*)$  по работе [19], в которой этот вопрос раскрыт с максимальной конкретностью.

Поскольку аналитическое представление  $S_H(k, \theta, \theta_w, u_*)$ , согласно [19], крайне громоздко, то автор [1] ограничился лишь графическими иллюстрациями, позволяющими получить визуальное представление о функции  $S_H(k, \theta, \theta_w, u_*)$ , показанное на рис. 4 (совместно с низкочастотной частью  $S_L$ ) в представлении через рас-



**Рис. 4.** Спектр насыщения  $B(k, u^*)$  в ВЧ-области в широкой области волновых чисел  $k$ . Рост уровня  $B(k, u^*)$  отображает его зависимость от скорости трения  $u^*$  при ее изменении от 0.1 до 1 м/с (по работе [1])

считанный модельный одномерный спектр насыщения (или спектр кривизны - curvature spectrum), переделаемый соотношением

$$B(k, u^*) = k^3 S(k, u^*) \quad (21)$$

Набор значений скорости трения  $u^*$  задан в пределах от 0.1 до 1 м/с, перекрывающих все возможные значения  $u^*$ , а полоса волновых чисел покрывает диапазон  $0.01 < k < 10^4$  р/м. При этом, участки с волновым числом  $k < 3$  р/м принадлежат к НЧ-спектру, заданному формулой (5.3) по работе [21]).

Из рис. 4 хорошо видно, что в ВЧ-полосе волновых чисел  $k$ , занимающих диапазон от 100 до 1000 р/м, ВЧ-спектр очень сильно зависит скорости трения  $u^*$ . Однако, в промежуточном диапазоне (10–50 р/м) интенсивность  $B(k, u^*)$  изменяется существенно слабее. Этот численно установленный факт свидетельствует о слабой связи интенсивности высокочастотного спектра  $S_H(k, \theta, u^*)$  с интенсивностью низкочастотного спектра  $S_L(k, \theta, u^*)$ , лежащего в области  $k \leq 3$  р/м. Именно этот факт, по мнению [1], позволяет рассматривать указанные спектры независимо, а значит, и независимо оценивать потоки  $\tau_{wH}$  и  $\tau_{wL}$  как слагаемые (20) для полной волновой части потока  $\hat{\tau}_w$ .

Расчет нормированного на  $u^{*2}$  потока  $\hat{\tau}_{wH}(u^*, k_p)$ , выполненный с использованием представлений ВЧ-спектра  $S_H(k, \theta, u^*)$  и инкремента роста  $\tilde{\beta}(u^* / c_\omega, \theta, \theta_w)$ , заданного формулой (5.8) по работе [19], представлена на рис. 5.

На рис. 5 линии соответствуют различным (фиксированным) значениям волнового числа пика спектра  $k_p$ : верхняя линия соответствует изменениям  $k_p$  в интервале  $0.1 \leq k_p \leq 1$  р/м, а более низко расположенные линии соответствуют увеличению  $k_p$  с шагом 0.2 р/м до 4 р/м (нижняя линия).

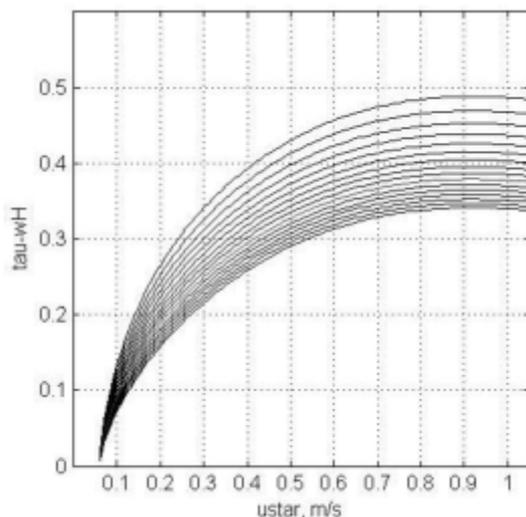


Рис. 5. Оценка  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$ , полученная для модельного ВЧ-спектра, взятого из работы [19] (по работе [1])

Из рис. 5 следует, что поток  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$  при всех  $k_p$  довольно быстро растет с  $u_*$  и, начиная с  $u_* > 0.8$  м/с, выходит на плато, определяющее предельный вклад ВЧ-спектра в полный поток нормированного импульса  $\hat{\tau}_w$ . Как видно, при  $k_p > 1$  р/м уровень этого вклада существенно зависит от значения волнового числа пика спектра  $k_p$ : чем выше  $k_p$ , тем меньше доля вклада ВЧ-спектра  $\tau_w$ . Детальное рассмотрение результатов расчетов показало что, эффект снижения вклада ВЧ-спектра в  $\tau_w$  обусловлен описанным выше поведением инкремента роста  $\tilde{\beta}$  (см. рис. 3). Действительно, по мере увеличения  $k_p$ , нижняя граница области интегрирования  $\Omega_H$  в (19) смещается вверх по волновым числам, где соответствующая величина  $\tilde{\beta}$  начинает уменьшаться, обеспечивая все меньший весовой коэффициент под вторым интегралом в (19), что и приводит к упомянутому результату.

Наблюдаемый численный эффект несколько усложняет задачу решения уравнения (11), т.к. величина  $\hat{\tau}_{wH}$ , казалось бы, должна была определяться преимущественно видом ВЧ-спектра, т.е. зависеть лишь от скорости трения  $u_*$ . Однако, рис. 5 дает понять, что имеется также зависимость  $\hat{\tau}_{wH}$  от  $k_p$ , которая, естественно, определяется подбором обрезывающего множителя  $cut(A, \omega)$  в формуле (17). Следовательно, выбор формы  $cut(A, \omega)$  является одним из элементов настройки предлагаемой модели ДПСА. Однако, в силу интегрального характера зависимости  $\hat{\tau}_{wH}$  от ВЧ-спектра, такой подбор является не принципиальным по физике дела, а лишь техническим элементом модели. Поэтому в численной реализации модели ДПСА вполне приемлем выбор вида  $cut(A, \omega)$ , обеспечивающий скачкообразный переход НЧ-спектра в ВЧ-спектр на волновых числах порядка 1 р/м.

Проведенный анализ позволяет сделать следующую конкретизацию функции  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$ . В виду гладкости этой функции и практической независимости формы  $S_H(k, \theta, u_*)$  от формы  $S_L(k, \theta, u_*)$ , в рабочей версии модели ДПСА нет необходимости каждый раз (т.е. для различных  $u_*$  и  $k_p$ ) пересчитывать величину  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$ . Достаточно однажды просчитать ее значения по указанной выше схеме для практически важного набора величин  $u_*$  и  $k_p$  и просто затабулировать полученные значения  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$  (приведенные на рис. 5), полностью закрыв вопрос ее параметризации. Именно такой подход и был реализован в работе [1].

Теперь для решения уравнения (11) требуется лишь детализация вида  $\tau_t(u_*, A, c_p, \dots)$ .

### 5. Параметризация $\hat{\tau}_t$

В противоположность потоку  $\tau_w$ , величина тангенциального потока  $\tau_t$ , ответственного за передачу импульса от ветра к подстилающей поверхности как целому, в свете сказанного выше об уравнении (11), практически не определена. В этом плане уместно заметить, что в моделях циркуляции океана, игнорирующих существование волнения на поверхности раздела сред, величина  $\tau_t$  полностью ассоциируется с полным напряжением ветра  $\tau_{tot}$ , которое и принимается в качестве напряжения, инициирующего дрейфовые течения [22]. На самом же деле, помимо дрейфовых течений ветер порождает и волны. Поэтому между  $\tau_t$  и полным трением  $\tau_{tot}$ , как уже отмечалось, существует большая и физически принципиальная разница.

По характеру получения уравнения (9) и его представления в виде (11) ясно, что теоретический вывод выражения  $\tau_t$  для реального стохастического поля волн принципиальным образом затруднен, например, уже в силу отсутствия математических алгоритмов выполнения указанного выше осреднения по ансамблю поля волн. Экспериментальное же определение зависимости  $\tau_t(u_*, A, \varepsilon, \dots)$ , возможно, имеет перспективы, если принять во внимание изменяемость полного напряжения  $\tau \sim (u_*)^2$  и использование расчетных значения  $\tau_w(u_*, A, S)$ , полученных для измеренных значений  $u_*$  и синхронных с ними характеристик волнения:  $S(\omega, \theta)$ ,  $A$  и  $\varepsilon$ . Однако оценки зависимостей  $\tau_t(u_*, A, \varepsilon, \dots)$  такого рода нам не известны. Поэтому, далее эта функция будет строиться полуфеноменологически на основе специально проведенного нами анализа профиля ветра в зоне волнения, т.е. в зоне между подошвами и гребнями волн, играющей, которая, как будет показано ниже, играет роль эффективного слоя трения, разделяющего слой воздуха и воды в системе ветер – волны – верхний слой моря.

Прежде всего, отметим, что для построения параметризации  $\tau_t(u_*, A, \varepsilon, \dots)$  в области, привязанной к зоне волнения и распределенной по высоте от  $-D$  до  $3D$  (см. формулу 10), не приемлемо привлекать ни кинематическую вязкость воздуха, ни стандартный лог-профиль ветра  $W(z)$ , которые применимы только для неподвижной по вертикали и однородной по горизонтали поверхности раздела сред. В зоне волнения все эти атрибуты модели «твердой» стенки исчезают при осреднении проинтегрированного по вертикали уравнения баланса импульса по ансамблю взволнованной поверхности (см. раздел 3). Поэтому нужны какие-то

дополнительные сведения о профиле ветра в зоне волнения. Подсказку в построении параметризации для  $\tau_t(u^*, A, \varepsilon, \dots)$  дают результаты численных экспериментов Чаликова и Райнчик [10], проанализированные и описанные в [5]. Согласно этим результатам, установлено, что в зоне волнения профиль ветра  $W(z)$  имеет линейную зависимость от  $z$ . При этом линейный профиль  $W(z)$  простирается от глубины  $-D$  до высоты  $3D$  по отношению к среднему уровню жидкости  $\langle \eta \rangle$ , принятому равным нулю, где  $D$  есть на стандартное отклонение взволнованной поверхности  $\eta(x, t)$ , заданное формулой (10) [5]. Конкретно, в [5] показано, что в зоне волнения (т.е. при  $[-D < z < 3D]$ ), вертикальный градиент профиля среднего ветра имеет порядок величины, задаваемый соотношением

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z} \cong \frac{c_p}{H}, \quad (22)$$

где  $c_p$  – фазовая скорость гребней волн доминантных волн,  $H$  – средняя высота волн.

На основании сказанного и в свете того, что линейный профиль ветра характерен именно для области вязкого слоя течения [9монин], можно считать, что в нашем случае зона волнения в интервале высот  $[-D < z < 3D]$ , по физическому смыслу, играет роль области вязкого слоя трения интерфейса (заменяющей собой традиционный вязкий подслоя, определяемый кинематической вязкостью воздуха).

Таким образом, привлекая известное теоретическое выражение для напряжения трения в этой зоне вида

$$\tau_t(z) = K(\partial W(z) / \partial z), \quad (23)$$

аналитическое представление для искомой функции  $\tau_t(u^*, A, \varepsilon, \dots)$  можно получить, выписав явные выражения для градиента скорости  $\partial W(z) / \partial z$  и постулируя постоянную величину турбулентной вязкости  $K$ , которая реализуется в зоне волнения, как аналоге слоя трения. В этом и состоит главная принципиальная особенность новой интегральной модели ДПСА.

Оценка  $\partial W(z) / \partial z$  следует из (22), и для замыкания параметризации  $\tau_t(u^*, A, \varepsilon, \dots)$  требуется лишь формула для величины турбулентной вязкости  $K$ , справедливая в зоне волнения. При этом для оценки величины  $K$  вполне допустимо принять ее представление в виде некоторого постоянного по вертикали значения, реализующегося в заданных ветро-волновых условиях. Поскольку характерным масштабом вертикальной скорости воздуха в зоне волнения является скорость трения  $u^*$ , а линейный масштаб движений по вертикали определяется высотой волн  $H$ , то из соображений размерности следует выражение

$$K = K_w = (u^*H) \cdot \text{fun}(\varepsilon, A, \dots), \quad (24)$$

в котором неизвестная безразмерная функция от интегральных параметров волнения  $\text{fun}(\varepsilon, A, \dots)$  определяется подбором в процессе верификации модели.

В первом приближении данного подхода автор [1] положил, что параметр возраста волн  $A$ , будучи связанным только с отношением скоростей гребней волн и ветра, менее принципиален для оценивания  $K_w$ , нежели параметр крутизны волн  $\varepsilon$ . Поэтому, на предварительной стадии конкретизации модели ДПСА, параметризация функции  $\text{fun}(\varepsilon, A, \dots)$  была записана в наиболее простом виде

$$\text{fun}(\varepsilon, A, \dots) = \text{fun}(\varepsilon) \propto \varepsilon^n \quad (25)$$

с подгоночной целой степенью  $n$ , ограничиваясь, тем самым, минимум допущений.

В итоге, совокупность формул (11), (20)–(25) завершает теоретическую основу для построения новой интегральной модели ДПСА. Дальнейшая детализация модели представляет собой процедуру ее настройки путем сопоставления модельных расчетов с наблюдениями (т.н. первичная эмпирическая верификация по идеологии работы [24]).

## 6. Метод и результаты первичной верификация модели ДПСА

### 6.1. Метод верификации

Процедура верификации заключается в проверке соответствия расчетных величин скорости трения  $u_{*mo}^*$ , следующих из решения уравнения (11) с учетом измеренных спектров  $S(k, \theta)$ , тем эмпирическим значениям  $u_*$ , которые получены в результате синхронных измерений параметров ПСА и состояния волнения. На момент написания работы [1] у ее автора имелись лишь результаты синхронных измерений  $S(\omega, \theta)$  и  $u_*$  любезно предоставленные Бабаниным, и частично описанные в [23].

Выполнив предварительный отбор наиболее репрезентативных данных измерений, автор работы [1] привлек к расчетам только 26 из 72 серий измерений, выполненных в 2002–2004 гг. на мелководье в озере Джорж в Австралии [23]. По этой причине в этой работе было использовано дисперсионное соотношение для волн на воде глубиной  $d$  (18). Полная информация об измеренных параметрах системы «волны-ПСА» подробно описана в [23], поэтому далее она приводится в предельно сжатом виде (табл. 1), необходимом для анализа результатов верификации.

### 6.2. Конкретизация модели

Модель задается уравнением (11), которое решается относительно  $u_*$  стандартным методом деления отрезка пополам. При этом, НЧ-часть волнового потока импульса  $\tau_{wL}(W, u_*, S_L)$  рассчитывается на основе данных измерений спектра волн  $S_{ex}(\omega, \theta)$  (т.е.  $S_L = S_{ex}(\omega, \theta)$ ) по формуле

$$\hat{\tau}_{wL} = u_*^2 \cdot \int_{\Omega_L} \frac{k(\omega)^2 \cos(\theta)}{\text{th}[k(\omega)d]} \tilde{\beta}(\dots) S_L(\omega, \theta) d\omega d\theta, \quad (26)$$

в которой знаменатель под интегралом означает учет конечности глубины водного слоя  $d$ , область интегрирования  $\Omega_L$  ограничена по частотам сверху значением  $\omega_{\max} = \omega(k_g)$  при  $k_g = 1$  р/м, а для инкремента роста принято представление [17]

$$\tilde{\beta}(\dots) = 40u_{*0}^2 \{ [1 + 0.136/(u_{*0}/c_\omega) + 0.00137/(u_{*0}/c_\omega)^2] \cos(\theta - \theta_p) - 0.00775(u_{*0}/c_\omega)^2 \}, \quad (27)$$

в котором постулировано, что

$$u_{*0}^2 = C_{d0} W^2 \quad (28)$$

при значении  $C_{d0} = 0.002$ . Фазовая скорость  $c_\omega = \omega(k) / k$  определяется по (18).

Отметим, что выбор представления  $\tilde{\beta}(\dots)$  вида (27) – (28) был обусловлен только задачами конкретизации, т.е. возможны и другие варианты  $\tilde{\beta}(\dots)$ . В данной модели важно лишь, чтобы  $\tilde{\beta}(\dots)$  выражался через ветер на стандартном горизонте  $W$ . В физическом плане такой выбор означает принятие постулата, что

передача импульса из атмосферы к гравитационному интервалу волн определяется именно значением ветра на стандартном горизонте  $W$ . С технической стороны, такой постулат нужен для того, чтобы в уравнении баланса (11) помимо  $u_*$  фигурировал еще и стандартный ветер  $W$ , обеспечивающий искомую зависимость скорость трения  $u_*(W)$ . По физике дела такой подход полностью оправдан, т.к. именно ветер  $W$  является первичным источником всей энергетики волнения и сопровождающей его статистической структуры интерфейса. В данной версии, естественно, величина  $C_{d0}$  является параметром модели, определяемым при верификации.

ВЧ-часть волнового потока  $\tau_{wH}(u_*, a) = u_*^2 \cdot \hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$  считается по схеме, изложенной в разделе 5. Здесь, как обычно, полагается, что приток импульса к ВЧ-волнам обусловлен преимущественно скоростью трения, а не ветром на стандартном горизонте [19]. Такой переход от ветра на стандартном горизонте  $W$  к скорости трения  $u_*$  обусловлен существенно меньшими масштабами волн и близостью слоя совпадения к зоне волнения. При этом двумерный массив  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$  был заранее затабулирован, при выборе ступенчатой функции обрезания  $cut(k_g, k)$ , скачком изменяющейся от 1 до 0 с ростом волнового числа в области  $k \geq k_g = 1$ . Аналоговое представление двумерной матрицы  $\hat{\tau}_{wH}(u_*, k_p)$  приведено на рис. 5, т.к. ее табличное представление излишне громоздко.

Тангенциальное напряжение, согласно идеологии раздела 6, задается в виде

$$\tau_t = (u_* c_p) \cdot c_t(n) \varepsilon^n \quad (29)$$

В этой версии модели принято значение  $n = 1$ , которому соответствует  $c_t(1) = 0.48$ , установленное в процессе верификации.

### 6.3. Результаты верификации

Результаты расчетов для набора из 26 серий измерений представлены в таблице 1. Из нее следует, что первичная версия новой интегральной модели ДПСА дает весьма хорошие результаты. Так, согласно последней колонке табл. 1, только в трех случаях из 26 относительный дефицит модельного коэффициента трения  $\rho_{u_*}$ , определяемый соотношением (6.3), превышает технически важную величину в 50%, выходящую за рамки допустимой в практическом плане ошибки. В среднем же, отклонение  $\rho_{u_*}$  имеет величину порядка 15–20%, близкую к точности самих измерений, что свидетельствует о высокой репрезентативности обобщаемой модели.

Здесь следует отметить, что приведенные результаты не являются окончательными, т.к. согласно процедуре верификации, описанной в разделе 6, еще требуется как модельная, так и расширенная верификация на более обширной базе данных измерений, прежде чем оптимальные выбор используемых подгоночных функций и параметров модели будет окончательно определен. Такие результаты будут представлены в следующем разделе.

### Заключение

Основные положения нового подхода к решению задачи о связи скорости трения  $u_*$ , как главного параметра приводного слоя атмосферы, с основными характеристиками ветро-волновой системы: локальным ветром на стандартном горизонте  $W$  и двумерным спектром волн  $S(\omega, \theta)$ , состоят в следующем.

Во-первых, вывод исходного уравнения баланса потока импульса в зоне интерфейса (раздел 3) показывает необходимость изменения интерпретации составляющих уравнения баланса (2) в зоне волнения, охватывающей область от подошв до гребней волн. Для решения этого вопроса требуются не столько экспериментальные усилия, сколько детальный теоретический анализ особенностей динамики ветрового потока вблизи взволнованной поверхности, мелкомасштабные детали которого могут быть получены, преимущественно, лишь методами численного моделирования (например, по аналогии с работами типа [8–10]).

Во-вторых, составляющие полного потока импульса от ветра к взволнованной поверхности  $\tau_{tot}$  содержат всего лишь на две принципиально отличающиеся составляющие: волновую часть  $\tau_w$ , отвечающую за перенос энергии к волнам, и тангенциальную часть  $\tau_t$ , которая такого переноса не обеспечивает.

В-третьих. Вопрос вычисления волновой составляющей потока импульса  $\tau_w$  практически можно считать решенным, при условии, что известны: а) функция скорости передачи энергии от ветра к волнам  $IN(wind, S)$ ; б) зависимость формы ВЧ-части спектра от скорости трения  $u_*$ ; в) величина НЧ-спектр волнения (в области  $0 < k < (3 \div 4)$  р/м). При этом вклады от ВЧ-спектра и НЧ-спектра в волновую часть потока импульса могут рассчитываться независимо.

В-четвертых. С целью замыкания скорости трения  $u_*$  на скорость ветра на стандартном горизонте  $W$ , в уравнении баланса импульса (11), при оценке вклада НЧ-спектра функцию  $IN(wind, S)$  следует выражать через средний ветер на стандартном горизонте  $W$ , в то время как при оценке вклада ВЧ-спектра функция  $IN(wind, S)$  должна выражаться через  $u_*$ .

В-пятых. Для величины тангенциального напряжения  $\tau_t$  теоретически обоснованное аналитическое представление через параметры системы отсутствует. Поэтому, в модели ДПСА величину  $\tau_t$  предлагается описывать методами теории подобия, исходя из того положения, что зона волнения, расположенная между подошвами и гребнями волн, является аналогом традиционного слоя трения. Тогда для зоны волнения принимается оценка градиента средней скорости  $\partial W(z) / \partial z$  вида (22) и постулируется постоянная величина турбулентной вязкости, как функция параметров системы (формулы 24, 25). В итоге, уравнение баланса (11) замыкается, что и обеспечивает решение поставленной задачи.

Шестое. Результаты верификации предложенной модели, выполненные на базе данных Бабанина, полученных в мелководном озере Джорж (Австралия) [23], свидетельствуют о высокой репрезентативности предлагаемой интегральной модели ДПСА (табл. 1). Среднее величина относительной ошибки  $\rho_{u_*}$  для оценки коэффициента трения  $C_d$  составляет около 15–20%, что является хорошим результатом с учетом точности самих измерений [23].

Таблица 1. Характеристики серий измерений и результаты верификации модели ДНСА

№ п/п	№ серии наблюдений	$D_s$ , м	$W^{10s}$ , м/с	$u_{10s}$ , м/с	$f_{10s}$ , Гц	$k_{10s}$ , 1/м	$10\epsilon = 10k_p H$	$A = \frac{c_p}{W}$	$10^{-3}Cd_{E_s}$ эксперимент	$10^{-3}Cd_M$ модель	Дефицит коэф. трения $[Cd_M/Cd_E-1], \%$
1	010004	0.86	9.9	0.38	0.51	1.3	0.91	0.25	1.47	1.55	+06
2	010055	0.87	11.8	0.51	0.41	1.0	0.84	0.22	1.87	1.45	-22
3	010248	0.93	14.8	0.67	0.37	0.8	1.00	0.19	2.05	1.81	-12
4	111051	1.14	12.9	0.57	0.61	1.6	1.33	0.19	1.95	2.24	+15
5	111156	1.14	12.6	0.57	0.58	1.4	1.28	0.20	1.95	2.19	+12
6	111224	1.14	11.9	0.50	0.61	1.6	1.27	0.20	1.77	1.84	+04
7	111402	1.14	13.0	0.56	0.58	1.4	1.26	0.19	1.86	1.99	+07
8	111538	1.14	11.6	0.48	0.63	1.6	1.31	0.20	1.71	2.00	+17
9	141215	1.09	10.1	0.39	0.73	2.2	1.17	0.21	1.49	1.49	00
10	141250	1.09	11.0	0.45	0.71	2.0	1.25	0.20	1.67	1.75	+05
11	141305	1.00	14.1	0.64	0.37	0.8	0.88	0.20	2.06	1.41	-31
12	151249	1.10	9.9	0.36	0.37	0.8	0.78	0.30	1.32	1.40	+06
13	151318	1.10	9.40	0.35	0.37	0.8	0.64	0.32	1.39	0.89	-36
14	151342	1.10	9.10	0.33	0.44	1.0	0.87	0.31	1.32	1.83	+39
15	151410	1.1	9.7	0.33	0.41	1.0	0.88	0.29	1.16	1.78	+54
16	161425	0.71	6.9	0.26	0.93	3.5	1.02	0.24	1.42	1.31	-07
17	201446	0.89	6.7	0.26	1.02	4.2	1.36	0.23	1.51	1.51	-00
18	261148	0.84	5.9	0.28	1.02	4.2	1.11	0.26	2.25	1.01	-54
19	271100	0.95	6.1	0.28	0.49	1.2	0.68(!)	0.42	2.11	1.18	-44
20	281544	0.96	5.1	0.16	1.02	4.2	1.11	0.30	0.98	1.11	+13
21	311638	0.94	9.3	0.44	0.49	1.2	0.69(!)	0.28	2.24	1.04	-53
22	311823	1.12	19.8	0.98	0.34	0.8	1.04	0.15	2.45	2.24	-08
23	311845	1.04	15.0	0.63	0.29	0.6	0.89	0.2	1.76	1.34	-24
24	311908	0.93	12.9	0.53	0.32	0.70	0.91	0.22	1.69	1.56	-07
25	312021	1.02	13.7	0.57	0.39	0.87	1.03	0.21	1.73	1.98	+14
26	312111	0.86	9.3	0.35	0.41	1.0	0.83	0.28	1.42	1.34	-06

Примечание: Колонка крутизны  $\epsilon$  тонирована для удобства ее идентификации. Знак (!) в этой колонке указывает на несоответствие между величинами  $\epsilon$  и  $k_p$ .

## 2. Расширенная верификация интегральной модели ПСА

### 1. Общие принципы верификации моделей ДПСА

Как уже было отмечено выше, анализ свойств рассмотренных моделей ДПСА построенных на основе разделения системы на две зоны: воздушный слой и водный слой, показал [2], что ни одна из таких моделей не может быть безоговорочно рекомендована в практику по причине их малой изученности, особенной в части соответствия эксперименту.

Понятно, что одноразовая верификация на основе натуральных данных совершенно недостаточна в силу малости объема использованных эмпирических данных. Немаловажную роль при этом играет и степень полноценности самих данных.

Здесь под полноценными данными следует иметь в виду данные совместных синхронных измерений силы ветра на стандартном горизонте  $U_{10}$ , двумерного спектра волнения  $S(k_x, k_y)$  (или  $S(\omega, \theta)$ ) и скорости трения  $u_*$ , выполненные с погрешностью менее или порядка 10–15%. Общедоступные данные такого рода пока не известны. Судя по ссылкам других авторов [19, 23], аналоги таких измерений в мировой науке имеются, однако полные данные такого рода труднодоступны. Поэтому каждый верификатор вынужден их находить индивидуально. Также в индивидуальном порядке авторами проводятся и процедуры верификации моделей, т.к. единая технология их выполнения отсутствует. В итоге многие особенности моделей оказываются скрытыми как для читателя, так и для потенциального пользователя модели. Более того, даже сами авторы не всегда осведомлены о разного рода скрытых особенностях своих моделей (см. далее). В итоге, вопрос выявления практических качеств модели нуждается в построении систематизированного подхода, единого для всех альтернативных моделей. Здесь мы попробуем сформулировать вариант такого подхода.

Следуя работе [24], сформулируем ряд методических положений.

Во-первых, в качестве первого этапа исследования свойств модели ДПСА нужна ее верификация на основе использования общепринятых модельно-эмпирических спектров  $S(k_x, k_y)$ , заданных известными аналитическими формулами, как функция силы ветра и других параметров волнения, например, возраста волн, их крутизны и т.п. (см., например, работу [25] и ссылки в ней). Эта часть работы должна быть ориентирована на воспроизведение основных известных эмпирических закономерностей взаимосвязи параметров ПСА и волнения, которые обязательно должны выполняться в модели. Список таких закономерностей, подробно описанный в [25], таков:

- значения коэффициента трения, заданного соотношением  $C_d = (u_* / U)^2$ , должны находиться в диапазоне величин  $(0.1-3) \cdot 10^{-3}$ .
- величина  $C_d$  должна расти с ростом величин ветра  $U$
- величина  $C_d$  должна расти с ростом обратного возраста волн  $A1$ , заданного соотношением

$$A1 = u_* / c_p = u_* \omega_p / g. \quad (30)$$

Здесь  $c_p$  – фазовая скорость волновой компоненты, соответствующей частоте пика  $\omega_p$  спектра  $S(\omega, \theta)$ , а  $g$  – ускорение силы тяжести. При этом следует подчеркнуть, что сам возраст волн  $A$  (как величина, растущая по мере укрупнения волн) определяется отношением  $c_p$  к скорости ветра  $W$  (а не наоборот):

$$A = c_p / W = g / \omega_p U. \quad (31)$$

Этот вид (первый уровень) верификации, ориентированный на воспроизведение отмеченных эмпирических особенностей  $C_d(AI, U)$  на базе аналитических спектров волнения, уместно назвать аналитической или модельной верификацией. Вполне естественно считать, что он является первым из этапов построения модели как таковой.

Следующим (вторым) обязательным этапом построения модели ДПСА является ее верификация на основе некоторого (пусть и малого) ряда доступных данных синхронных наблюдений ветра  $U$ , двумерного спектра волнения  $S(k_x, k_y)$  (или  $S(\omega, \theta)$ ) и скорости трения  $u_*$ , имеющих относительную ошибку измерений, например, менее 30%. При этом желательно использование нескольких серий данных, полученных разными авторами.

Такая верификация может быть номинирована как эмпирическая (или начальная эмпирическая).

Условие или критерий успешности начальной эмпирической верификации можно определить формулой

$$\langle |\rho_{u_*}| \rangle = \langle |(u_{*mod} / u_*)^2 - 1| \rangle \leq \Delta_{u_*}. \quad (32)$$

где  $\rho_{u_*}$  есть относительная ошибка для квадрата модельной скорости трения  $u_{*mod}$ , скобки  $\langle \dots \rangle$  означают среднее по серии наблюдений, а  $\Delta_{u_*}$  есть ошибка измерения самой величины  $u_*^2$ , отражающей интенсивность полного потока импульса  $\tau_{tot}$  к границе раздела сред. Здесь принято во внимание определение

$$\tau_{tot} = u_*^2. \quad (33)$$

Полученная по модели оценка  $(u_*^2)_{mod}$  напрямую определяет и модельное значение  $C_{d_{mod}}$ , поскольку

$$C_d = u_*^2 / W^2, \quad (34)$$

что и позволяет легко проводить необходимые сравнения с экспериментом.

Совокупность обоих из перечисленных выше видов верификации можно назвать расширенной верификацией.

И, наконец, на третьем, заключительном этапе построения модели для ее верификации нужна единая для всех моделей и достаточно обширная база полноценных синхронных измерений указанного списка величин. Полноценность в данном случае означает, во-первых, высокую точность измерений, например, с относительной ошибкой не более 10% для всех рассматриваемых величин. И, во-вторых, достаточно большой объем измерений, гарантирующий малость ошибок статистических средних. Например, 20–30 минутные записи, как по силе ветра  $W$ , так и по оценкам потоков  $\tau_{tot}$  и спектров волнения  $S(\omega, \theta)$ . Именно единая база позволяет однозначно сопоставлять степень адекватности различных альтернативных моделей.

В качестве критерия адекватности можно выбрать, например, критерий

$$\langle |\rho_{u_*}| \rangle \leq 10\text{--}15\%. \quad (35)$$

Этот этап верификации условно можно назвать контрольной верификацией. Ее успешное выполнение, т.е. выполнение условия (6.5), фактически завершает построение модели ДПСА, обеспечивая допустимость ее широкого применения.

Приведенные здесь конкретные цифры точности измерений носят ориентировочный характер, т.е. они могут уточняться по мере развития измерительной техники и методики анализа данных.

Далее будет приведена новая, более детализированная модель ДПСА, предложенная в [24]. В силу отсутствия единой (контрольной) базы измерений, она будет подвергнута первым двум уровням верификации модели, что и позволит определить их эффективность на практике.

В соответствии с общей идеологией верификации полуфеноменологических моделей ДПСА, изложенной в работе [24], приведем в данном разделе результаты модельной и расширенной верификации для интегральной модели ПСА (ИМПСА), описанной в предыдущем разделе 1.

## 2. Модельная верификация

### 2.1. Модельные спектры

Первым шагом модельной верификации является выбор модели эмпирического (далее – модельного) двумерного спектра волнения  $S(k_x, k_y)$  (либо  $S(\omega, \theta)$ ). Далее мы, как правило, будем использовать второе из представлений.

Среди общепринятых модельных спектров наиболее приемлемыми являются два: 1) спектр Элфаули [18] и 2) спектр Кудрявцева [19]. Оба спектра представлены в виде

$$S(\omega, \theta) = S_L \cdot cut + S_H \cdot (1 - cut), \quad (36)$$

и в обоих случаях за основу представления НЧ-спектра  $S_L$  берется широко известный спектр Донелана [21] в то время, как спектры  $S_H$  несколько отличаются (см ниже). Функция  $cut(A, \omega)$  в (36) есть произвольно выбранный обрезаящий множитель, быстро изменяющийся от 1 до 0 в области частот  $\omega_p < \omega < 3 \omega_p$ . В силу интегрального характера выражений для  $\tau_w$ , конкретный выбор указанного вида  $cut(A, \omega)$  практически не существен.

Область интегрирования НЧ-спектра определяется соотношением:

$$\Omega_L = [0.5\omega_p < \omega < 3\omega_p]. \quad (37)$$

Область интегрирования  $\Omega_H$ , простирается от  $3 \omega_p$  до 100 р/с, что обусловлено значимостью вклада гравитационно-капиллярных волн в поток импульса  $\tau_w$ .

Визуально спектры вида (36) в версиях [18] и [19] мало отличаются друг от друга и в представлении спектра насыщения  $B(k) = k^3 S(k)$  похожи на спектр, изображенный на рис. 4 и подробно рассмотренный в разделе 1. Однако, в спектре Кудрявцева [19] более четко выражены зависимости ВЧ-спектра от скорости трения  $u^*$ , что и определило его дальнейшее использование.

Главные особенности полного спектра (36) таковы (см. рис. 4):

- а) быстрый рост интенсивности ВЧ-спектра  $S_H$  с ростом скорости ветра  $W$  (и  $u^*$ );
- б) практическое отсутствие связи интенсивности  $S_L$  и  $S_H$  в диапазоне их сшивки (от 0.1 до 10 р/м по  $k$  или от 1 до 10 р/с по  $\omega$ );
- в) НЧ-спектра волн проявляет хорошо известное изменение по мере развития волнения.

Свойство б) позволяет выполнять оценки  $\tau_{wH}$  независимо от оценок  $\tau_{wL}$ .

В более ранней, первичной эмпирической верификации модели ДПСА по работе [1] (см. предыдущий раздел 1), спектр  $S_L$  брался из эксперимента [23], а  $S_H$  – из работы [19]. При этом  $\tau_{wH}$  рассчитывалась по формулам раздела 1.6. Затем эти расчеты в табулированном виде использовались при решении уравнения баланса (4) относительно  $u^*$ . Количественное представление безразмерной величины  $\hat{\tau}_{wH}(k_p, u^*)$  приведено на рис. 5.

Далее, в модельной верификации слагаемое  $\tau_{wH}$  используется в его табулированной форме, а значения  $\tau_{wL}$  рассчитывается в диапазоне частот для НЧ-спектра по работе Донелана и соавторов [21].

## 2.2. Результаты модельной верификации начальной версии ИМПСА

Процедура модельной верификации заключается в выявлении зависимости  $u^*$  от ветра  $W$  и обратного возраста волн  $AI$ , следующей в результате решения уравнения баланса (4). Для версии модели, описанной выше в разделе 1, и модельных спектров раздела 2.1, результаты представлены на рис. 6. Очевидно явное несоответствие модельных и эмпирических величин  $C_d$  и зависимостей  $C_d(AI)$ , описанных в разделе 1. В частности, модельные значения  $C_d$  оказываются существенно больше эмпирических; кроме того, они спадают с ростом обратного возраста волн  $AI = u^*/c_p$ .

Элементарная проверка относительных вкладов безразмерных слагаемых полного потока импульса  $\hat{\tau}_{wL}$ ,  $\hat{\tau}_{wH}$  и  $\hat{\tau}_i$ , свидетельствует о том, что для принятых ранее параметров модели величина  $\hat{\tau}_{wL}$  оказывается завышенной, а зависимость  $\hat{\tau}_i$  от обратного возраста слишком слабая. Этот анализ указал направление модификации параметров первой версии модели ИМПСА без изменения основных положений модели (см. раздел 1).

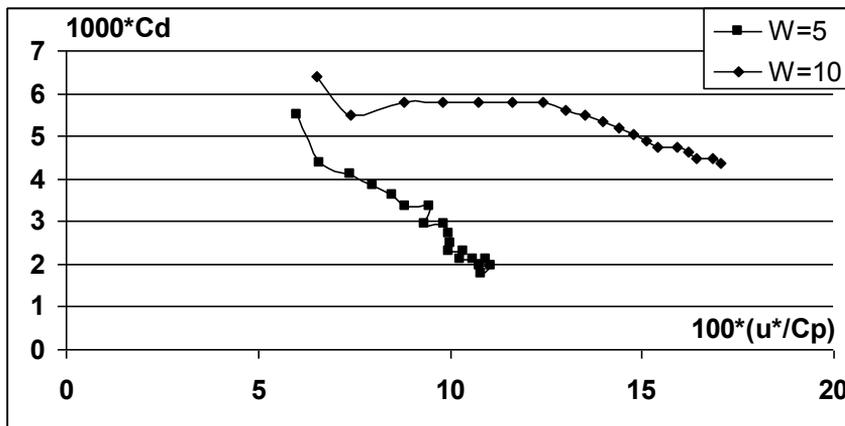


Рис. 6. Результаты модельной верификации первоначальной версии модели

## 2.3. Модификация модели работы [1] и повторная модельная верификация

Уменьшение коэффициентов в формулах (27), (28) позволило привести модельные величины  $C_d(W)$  в диапазон значений, близких к наблюдаемым, что, однако, не приводило к ожидаемой прямой зависимости  $C_d(A1)$  от  $A1$ . Анализ показал, что причина сохраняющегося спада модельных значений  $C_d$  с ростом  $A1$  (аналогичная приведенному на рис. 6) обусловлена недостаточно быстрым увеличением тангенциального напряжения  $\hat{\tau}_t$  с ростом  $A1$ .

Действительно, согласно (29),  $\hat{\tau}_t \propto (c_p / u_*) \varepsilon \propto A1^{-1} \cdot \varepsilon(A1)$ , что не обеспечивает рост  $\hat{\tau}_t$  с ростом  $A1$ , который можно было бы ожидать за счет роста крутизны волн  $\varepsilon$  при увеличении  $A1$ . Ряд проб и ошибок показал, что в параметризацию (29) для  $\hat{\tau}_t$  следует ввести дополнительный множитель с положительной степенью величины  $A1$ . Кроме того, результат верификации улучшался при увеличении степени  $n$  для средней крутизны волн  $\varepsilon$  в общей формуле (29).

В итоге, наилучший результат модельной верификации новой версии модели ИМПСА, изображённый на рис. 7, был получен при следующих значениях параметров:

$$C_{IN} = 30 \quad \text{и} \quad C_{d0} = 0.0015, \quad (38)$$

(для расчёта  $\hat{\tau}_{wL}$ ) и новой формулы расчета  $\hat{\tau}_t$  вида

$$\hat{\tau}_t = 1.44(c_p / u_*) (A1 + 0.5) \varepsilon^2. \quad (39)$$

Как видно из рис. 2а, б, известный эмпирический рост  $C_d$  с ростом  $A1$ , а также рост  $C_d$  с ростом  $W$ , хорошо воспроизводятся модифицированной моделью.

Этот результат был зафиксирован в работе [24] в качестве успешной модельной верификации. Здесь же существенно подчеркнуть, что именно модельная верификация показала принципиальную роль адекватности параметризации тангенциального напряжения  $\tau_t$  в задаче построения адекватной модели ДПСА. Такой вывод был установлен в [24] впервые, т.к. никем ранее в литературе не отмечался.

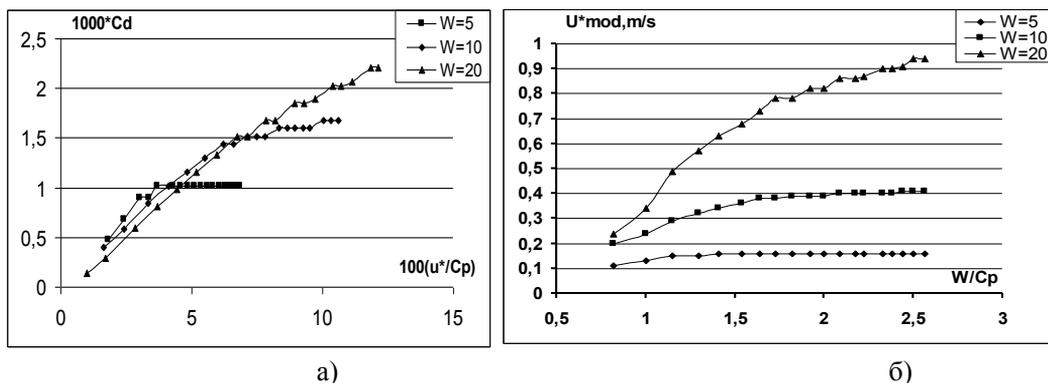


Рис. 2. Результаты модельной верификации новой версии ИМПСА. а) зависимость коэффициента трения  $C_d$  от обратного возраста волн  $A1$ ; б) соответствующая зависимость скорости трения  $u^*$  от параметра  $W/C_p = A^{-1}$

### 3. Расширенная эмпирическая верификация модифицированной модели

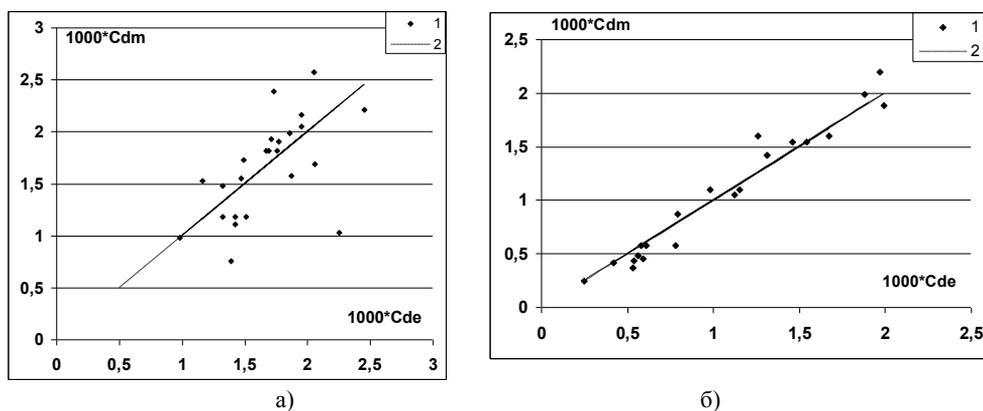
Процедура расширенной эмпирической верификации была выполнена в [24] на базе данных двух разных групп авторов: данные Бабанина [23] и данные Дулова–Репиной (см. [26]). В обоих случаях, данные были получены не в результате специального эксперимента, а в силу совпадения задач различных групп в одной из экспедиций.

Поскольку данные были любезно переданы автору [24] в индивидуальном порядке, полное их описание отсутствует, а частичное – представлено в двух упомянутых источниках. Отметим лишь, что погрешности измерений скорости трения (а точнее, величины  $u^{2*}$ ) в обоих случаях достаточно велики и находятся в пределах 25–30%. Относительно оценок двумерных спектров  $S(\omega, \theta)$ , вопрос точности их величин не достаточно ясен. По экспертным оценкам [23,19] погрешности оценок спектров не превышают 15%. Погрешность измерения ветра  $W$ , как правило, составляет 5–10%. Поэтому для критерия (3) величина  $\Delta_{u^*}$  принята равной 0,3 (т.е. 30%).

Дополнительная информация о данных следующая:

#### 3.1. Данные Бабанина

Эти данные получены в результате многолетнего ветро-волнового эксперимента на мелководном озере Джорж, расположенном вблизи г. Канберра, Австралия. В силу многократности использования указанных данных (см. [23]), вопрос отбраковки и синхронизации измерений величин различного рода не возникал. Поэтому любезно предоставленные данные были в [24] напрямую использованы в расчетах  $\hat{\tau}_{wL}$  по вышеприведенным формулам. Величина  $\hat{\tau}_{wH}$  бралась в табулированном виде (рис. 5), а значение  $\hat{\tau}_t$  считалось по формуле (39) без какого-либо варьирования параметров. Результаты расчетов представлены на рис. 8а.



**Рис. 3.** Визуализация результатов верификации новой версии модели: а) по данным Бабанина [23], б) по данным Дулова-Репиной [26]  $c_s=10$ . 1 – точки соответствия экспериментальных  $C_{de}$  и модельных  $C_{dm}$  коэффициентов трения; 2 – линия регрессии полного совпадения модели и наблюдений

Для данных Бабанина [23] средняя относительная ошибка отклонения экспериментальных  $Cd_e$  и модельных  $Cd_m$  коэффициентов трения  $\rho_{i*}$ , рассчитанная по формуле (35) имеет величину 21%, т.е. критерий (32) заведомо выполняется. Этот результат означает успешность эмпирической верификации для этой базы данных.

### 3.2. Данные Дулова–Репиной

Эти данные были получены в результате обработки наблюдений, проводимых на гидрофизической платформе МГИ НАНУ в Черном море осенью 2009 г. При этом волновые измерения и вычисление спектров  $S(\omega, \theta)$  выполнялись командой В.И. Дулова (МГИ НАНУ), а ветровые измерения ( $W$  и  $u^*$ ) – командой И.А. Репиной (ИФА РАН). Автору [24] предстояло выбрать из всей совокупности имеющихся совместных измерений отрезки времени, соответствующие различным значениям  $W$ , также провести определенную отбраковку данных. В итоге, была выбрана 21 серия измерений, информация о которых представлена в табл. 3.5.1, в которой также даны результаты верификации, количественно дополняющие рис. 8б. Как следует из табл. 2 и рис. 8б, результаты эмпирической верификации новой версии модели по этим данным оказываются даже более успешными, чем по данным [23]. Автор [24] указывает следующие причины такой успешности модели.

Во-первых, данные Дулова–Репиной получены на глубокой воде, где измерения обладают большей достоверностью (т.к. не требуется контроля глубины, наведенных волнами течений, учета придонной турбулентности и т.п.).

Во-вторых, сказывается прямой доступ к данным и большая свобода отбора данных из огромного массива возможность проведения авторской «ручной» состыковками данных, полученных различными командами (см. замечания об авторских проверках в начале раздела 1).

В-третьих, в случае морских натурных данных, спектры волн обладают существенной изрезанностью, обусловленной, в частности, наличием зыби. В таком случае вопрос определения средней крутизны волн  $\varepsilon$  требует уточнения. Если в случае модельных эмпирических спектров для определения  $\varepsilon$  было уместно использовать выражение  $\varepsilon = k_p H$ , то для морских натурных спектров в данной формуле величина  $k_p$  должна быть заменена на среднее значение  $\langle k \rangle$ , определяемое формулой

$$\langle k \rangle = \frac{\int_{\Omega_L} k S(\omega, \theta) d\omega d\theta}{\int_{\Omega_L} S(\omega, \theta) d\omega d\theta}. \quad (40)$$

Такое определение средней крутизны более правильно соответствовало волновой ситуации. Именно такая замена и была выполнена в данном случае (см табл. 3.5.1). В результате оказалось, что именно это обстоятельство и обусловил более точную оценку  $\hat{\tau}_i$ , обеспечившую лучшее соответствие модели эксперименту.

Заметим, что поскольку крутизна существенным образом определяет тангенциальную составляющую полного потока импульса, здесь еще раз была установлена определяющая роль адекватного представления  $\tau_i$  в задаче построения адекватной модели ДПСА, отмеченная ранее в конце раздела 1.

**Таблица. 2.** Характеристики измерений Дулова–Репиной и результаты верификаций новой версии модели (по работе [24])

№ п/п	№ серии наблюдений	$W_{10}$ , м/с	$u_*$ , м/с	$100\varepsilon = 100\langle k \rangle H$	$10^3 * Cd_E$ , эксперимент	$10^3 * Cd_M$ , модель	$\rho_{u_*}$ , %
1	120800	5.50	0.13	7.1	0.56	0.48	-15
2	121940	2.5	0.07	8.0	0.78	0.58	-26
3	130840	5.20	0.18	8.2	1.12	1.05	-06
4	140900	11.5	0.51	3.5.5	1.97	2.2	+12
5	141020	15.0	0.67	8.1	1.99	1.88	-06
6	141340	14.5	0.57	8.0	1.54	1.54	+00
7	141700	12.5	0.31	6.4	0.61	0.58	-06
8	141820	3.5.5	0.15	5.1	0.25	0.25	+00
9	150000	5.0	0.12	6.7	0.58	0.58	+00
10	151500	5.2	0.12	7.3	0.53	0.37	-30
11	151740	7.8	0.22	7.5	0.79	0.87	+09
12	152120	10.2	0.39	8.0	1.46	1.54	+05
13	160220	13.0	0.47	8.8	1.31	1.42	+09
14	160540	8.3	0.26	8.1	0.98	1.1	+15
15	161540	10.3	0.35	8.0	1.15	1.1	-06
16	170240	4.3	0.10	7.7	0.54	0.44	-19
17	171940	3.3	0.08	7.2	0.59	0.45	-23
18	181140	11.0	0.45	8.2	1.67	1.60	-04
19	181720	3.4	0.07	7.0	0.42	0.42	-00
20	191500	15.0	0.65	8.1	1.88	1.99	+06
21	191820	11.1	0.39	8.2	1.26	1.60	+27
Средняя ошибка по модулю							14

*Примечание:* Номер серии означает день–час–минуты начала наблюдений в октябре 2009 г. на платформе в Кацивели формате ddhhmm. Колонка крутизны  $\varepsilon$  тонирована для удобства ее идентификации.

### Заключение

Прежде всего, в заключительном анализе результатов верификации модели ИМПСА следует отметить следующее обстоятельство.

Как уже отмечалось выше, одноразовая эмпирическая верификация может быть успешной даже для весьма «слабой» версии модели. Следует полагать, что именно по этой причине практически все авторы альтернативных моделей (например, [11, 12, 7, 23]) в своих работах всегда демонстрировали успешность своих авторских построений. Однако, как здесь было показано, лишь более детальная процедура верификации, включающая как модельную, так и эмпирическую, дает более реальную оценку адекватности имеющихся моделей.

На примере попыток выполнения модельной верификации альтернативных моделей [7, 14], приведенных в Приложении к работе [24], в дополнение к приведенным в работе [2] результатам верификаций, еще раз была показана необходимость последующих доработок всех упомянутых моделей.

Второе заключение, касающееся результатов для новой версии модели ИМПСА, состоит в том, что, на сегодняшний день, она действительно прошла расширенную верификацию, опубликованную в печати, и реально перспективна для дальнейшего использования. Модель описывает как общие закономерности изменчивости характеристик ПСА (изложенные выше в разделе 2.1), так и конкретные результаты, полученные двумя различными группами экспериментаторов. Таким образом, данная версия модели, в принципе, готова для ее контрольной верификации в том определении, которое дано выше в разделе 2.1.

Третье заключение состоит в том, что именно адекватность параметризации тангенциальной составляющей  $\tau$ , полного напряжения  $\tau$ , является определяющим элементом в повышении достоверности модели ДПСА.

Заметим также, что только выполнение контрольной верификации, основанное на обширной базе полноценных данных, может дать достаточные основания для оценивания относительных вкладов различных составляющих ( $\hat{\tau}_{wL}$ ,  $\hat{\tau}_{wH}$  и  $\hat{\tau}_t$ ) полного потока импульса от ветра к волнам. Изучение этого вопроса, многократно упоминаемого в печати, но пока еще далёкого от своего завершения, представляет в дальнейшем значительный научный интерес.

И, наконец, скажем еще несколько слов об условиях получения полноценных данных, специально ориентированных для контрольной верификации моделей ДПСА.

Во-первых, такие данные должны быть получены в рамках специализированных экспериментов, когда все измерения полностью согласованы по времени, пространству и выполнены для достаточно стационарных ветроволновых условий, обеспечивающих требуемую точность измерений.

Во-вторых, процедуры измерения ветра и потоков импульса должны выполняться в нескольких, достаточно далеко разнесенных точках, и в каждой точке измерители должны быть расположены на нескольких фиксированных горизонтах (по меньшей мере – двух). Такая конфигурация ветровых измерений позволит обеспечить правильную оценку точности измерений силы ветра и скорости трения.

Что касается волновых измерений, то в виду интегрального характера присутствия спектра волн в уравнении баланса, и обязательного согласования нормировки спектра на среднюю дисперсию возвышений, представляется, что современные стандартные измерения антенной из 3–5 датчиков вполне приемлемы для целей данной задачи [26]. Оценка точности расчетов двумерных спектров, следующая из таких измерений, может быть приравнена точности вычисления дисперсии волнения.

В третьих, желательно выполнение измерений для широкого разнообразия значений силы ветра  $W$ , например, в диапазоне от 5–7 до 20–25 м/с. Нет нужды объяснять, что большее разнообразие силы ветра обеспечивает и большую степень достоверности верификации модели ДПСА. При этом временной масштаб осреднения потоков импульса должен быть согласован с масштабом оценивания спектра волн, т.е. составлять несколько тысяч периодов доминантной волны (порядка 20–30 мин).

Нам представляется, что в настоящее время такого рода (полноценных) данных в природе не существует, поскольку ранее в них не было нужды. Тем не ме-

нее, современный уровень техники позволяет без особого труда такие данные получить. Не смотря на то, что их стоимость их получения проставляется не такой малой, как это обычно имеет место быть в отдельных частных экспедициях или натуральных экспериментах. Однако столь же велика будет и научная ценность такого рода данных.

### Литература

- [1] *Polnikov V.G.* Integrated Model for a Wave Boundary Layer // *Marine Sciences*. 2011. V. 1(1). P. 10–21 (online version: WWW ArXiv. org.2011; arXiv: 1105.3408).
- [2] *Полников В.Г.* Сравнительный анализ моделей динамического приводного слоя атмосферы // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2009. Т. 45. №5. С. 625–640.
- [3] *Заславский М.М.* О параметрическом описании приводного слоя атмосферы // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1995. Т. 31. № 5. С. 607–615.
- [4] *Makin V.K., Kudryavtsev V.N.* Coupled sea surface-atmosphere model. Pt. 2 Wind over waves coupling // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104 (C4). P. 7625–7639.
- [5] *Polnikov V.G.* Features of air flow in the trough-crest zone of wind waves // online version: WWW ArXiv. 2010. org ArXiv:1006.3621.
- [6] *Makin V.K., Kudryavtsev V.N., Mastenbroek C.* Drag of sea surface // *Boundary-Layer Meteorology*. 1995. V. 79. P. 159–182.
- [7] *Makin V.K., Kudryavtsev V.N.* Coupled sea surface-atmosphere model. Pt. 1 Wind over waves coupling // *J. Geophys. Res.* C. 1999. V. 104 (4). P. 7613–7623.
- [8] *Li P.Y., Xu D., Tailor P.A.* Numerical modelling of turbulent air flow over water waves // *Boundary-Layer Meteorology*. 2000. V. 95. P. 397–425.
- [9] *Sullivan P.P., McWilliams J.C., Moeng C.H.* Simulation of turbulent flow over idealized water waves // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 404. P. 47–85.
- [10] *Chalikov D., Rainchik S.* Coupled Numerical Modeling of Wind and Waves and the Theory of the Wave Boundary Layer // *Boundary-Layer Meteorology*. 2011. V. 138(1). P. 1–41.
- [11] *Janssen P.E.A.M.* Quasi-linear theory of wind wave generation applied to wind wave forecasting // *J. Phys. Oceanogr.* 1991. V. 21. P. 1389–1405.
- [12] *Chalikov D.V.* The parameterization of the Wave Boundary Layer // *J. Physical Oceanogr.* 1995. V. 25(6). P. 1333–1349.
- [13] *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 320 с.
- [14] *Kudryavtsev V.N., Makin V.K.* The impact of air flow separation on the drag of the sea surface // *Boundary layer meteorology*. 2001. V. 98. P. 155–171.
- [15] *Donelan M.A., Babanin A.V., Young I.R., Banner M.L.* Wave Follower Measurements of the Wind Input Spectral Function. Part 2. Parameterization of the Wind Input // *J. Phys. Oceanogr.* 2006. V. 36. P. 1672–1688.
- [16] *Chalikov D., Sheinin D.* Direct Modeling of One-dimensional Nonlinear Potential Waves. *Nonlinear Ocean Waves* / ed. Perrie W. // *Advances in Fluid Mechanics*. 1998. V. 17. P. 207–222.
- [17] *Yan L.* An improved wind input source term for third generation ocean wave modelling. Scientific report WR-87-8. KNML, The Netherlands. 1987. 27 p.
- [18] *Elfouhaily T.B., Chapron B., Katsaros K., Vandemark D.* A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 107. P. 15781–15796.

[19] *Kudryavtsev V.N., Hauser D., Caudal G., Chapron B.* A semi-empirical model of the normalized radar cross-section of the sea surface. Part 1 // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108, № С3. P. 8054–8067.

[20] *Donelan M.A., Haus D.K., Reul N. et al.* On limiting aerodynamic roughness of the ocean in very strong wind // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L18306.

[21] *Donelan M.A., Hamilton J., Hui W.H.* Directional spectra of wind generated waves // *Phil. Trans. R. Soc. London.* 1985. A315. P. 509–562.

[22] *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика в 2-х томах. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 812 с.

[23] *Babanin A.V., Makin V.K.* Effect of wind trend and gustiness in the sea drag: Lake George study // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. P. 1–18. C02015.

[24] *Полников В.Г.* Расширенная верификация модели динамического приводного слоя атмосферы // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2013. Т. 49. № 4. С. 489–500.

[25] *Полников В.Г., Волков Ю.А., Погарский Ф.А.* Интерпретация изменчивости характеристик приводного слоя атмосферы с помощью численной модели // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2003. Т. 39, №3. С. 410–421.

[26] Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. К 30-летию океанографической платформы в Кацивели: Сб. научн. тр. Вып. 21 / НАН Украины, МГИ, ИГН, ОФ ИнБЮМ. Ред-кол.: Иванов В.А. (гл. ред.) и др. Севастополь, 2010. С. 265.

### **3.5. Трансформация холодной воздушной массы над океаном в Арктике во время холодных вторжений**

***Д.Г. Чечин***

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

#### **Введение**

Холодные вторжения (ХВ) являются одним из типичных метеорологических режимов холодного времени года над свободными ото льда акваториями Арктических морей: Баренцева, Карского, Норвежского, Гренландского, Берингова [1]. Их характерной особенностью является интенсивный энергообмен атмосферы и океана, который выражается в экстремально высоких значениях турбулентных потоков тепла и влаги [2]. Этим определяется важная роль ХВ в климатической системе Арктики, особенно в ее Атлантическом секторе, связанная с влиянием ХВ на модификацию водных и воздушных масс, а также на термодинамику морского льда в прикромочной зоне [3, 4]. Также на фоне холодных вторжений часто развиваются такие мезомасштабные циркуляции как линии неустойчивости, конвективные ячейки и полярные мезоциклоны [5].

Во время ХВ происходит прогрев, рост и увлажнение конвективного атмосферного пограничного слоя (АПС) над открытой водой [6]. Поток явного тепла максимален вблизи кромки морского льда и убывает по мере трансформации воздушной массы над открытой водой. Поток скрытого тепла меньше потока явного тепла в 2–3 раза, и также убывает по мере удаления от кромки льда [7, 8]. Очевидно, что абсолютные значения и пространственное распределение потоков тепла и характеристик АПС имеет важное значение для различных климатически значимых процессов, таких как, например, выхолаживание и перемешивание верхнего слоя океана, образование конвективной облачности в АПС.

Абсолютные значения и пространственное распределение потоков тепла на поверхности океана и характеристик АПС определяются такими параметрами как разность температуры внутри холодной воздушной массы над льдом и температуры поверхности океана, стратификация в холодной воздушной массе, а также положение кромки льда [4]. Эти параметры имеют существенную внутрисезонную и межгодовую изменчивость. Во многом эта изменчивость обусловлена изменением положения кромки льда и сплоченности морского льда к северу от кромки. Изменение этих параметров ледового покрова при изменении климата приведет к изменению характеристик энергообмена атмосферы и океана во время холодных вторжений.

Очевидно, что и величина потоков тепла на поверхности океана и характеристики мезомасштабных циркуляций в большой степени определяются состоянием пограничного слоя – тем, насколько он прогрет и увлажнен, какова его высота.

Цель работы состоит в том, чтобы с помощью простой аналитической модели конвективного пограничного слоя атмосферы описать процесс трансформации холодной воздушной массы над океаном. В частности, решается задача о том, как описать изменение по мере удаления от кромки льда таких величин как температура воздуха в пограничном слое, высота пограничного слоя и турбулентный поток тепла на поверхности океана.

В работе используется аналитическая модель роста и прогрева пограничного слоя атмосферы, предложенная в работе Венкатрама [9]. Выбор этой модели обусловлен тем, что она сочетает простоту аналитических решений и достаточно реалистичное описание роста пограничного слоя во время холодных вторжений, что было продемонстрировано в работе Ренфрю и Кинга [10]. На основании аналитических решений Венкатрама в данной работе получено выражение для характерного горизонтального масштаба трансформации холодной воздушной массы над океаном.

Также оценены возможные изменения характеристик энергообмена атмосферы и океана и параметров АПС при изменении характеристик ледового покрова. Наибольшей межгодовой изменчивостью отличается ледяной покров в Баренцевом море. Мы попытаемся ответить на вопрос о том, насколько изменяются потери тепла океаном, а также параметры АПС у берегов Баренцева моря при изменении ледовых условий. Оценки сделаны на основе идеализированных экспериментов с одномерной версией численной мезомасштабной модели атмосферы NH3D.

## 1. Используемые модели

### 1.1. Модель перемешанного пограничного слоя

Интегральные модели перемешанного пограничного слоя различной сложности часто использовались ранее для моделирования холодных вторжений. Для этой задачи применялись как сравнительно полные модели [11], основанные на численном решении прогностических уравнений для температуры воздуха, горизонтальных компонент скорости ветра, удельной влажности и водности облаков, так и аналитические [12], основанные на линеаризации уравнений. Кроме того, применялись еще более простые модели, пренебрегающие пространственной изменчивостью скорости ветра [13]. При этом, преимущество последних над линейными моделями заключается в менее идеализированном описании роста и прогрева пограничного слоя. К такому классу относится и модель Венкатрама [9].

Венкатрам предложил рассматривать стационарные уравнения, описывающие эволюцию температуры воздуха  $\theta_m$ , осредненной по высоте АПС, высоты АПС  $z_i$  и скачка температуры на верхней границе АПС  $\Delta\theta$  вдоль оси  $y$ , направленной перпендикулярно к кромке льда

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial y} = \frac{w_e}{v_m z_i} \Delta\theta + \frac{C_H (\theta_w - \theta_m)}{z_i \cos \alpha}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial y} = \frac{w_e}{v_m}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial y} = \gamma \frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial \theta_m}{\partial y}, \quad (3)$$

где  $w_e$  – скорость вовлечения;  $v_m$  – компонента скорости ветра вдоль оси  $y$ , осредненная по высоте АПС;  $C_H$  – коэффициент турбулентного теплообмена;  $\theta_w$  – температура поверхности воды;  $\alpha$  – угол между направлением ветра в АПС и осью  $y$ ;  $\gamma$  – вертикальный градиент потенциальной температуры над АПС.

В уравнении (1) для параметризации турбулентного потока тепла использована балк-формула. Важно отметить, что, так как в балк формулу входят осредненные по высоте АПС скорость ветра и потенциальная температура, то теория подобия Монина–Обухова не применима для оценок коэффициента обмена  $C_H$ . Для этого, как и в работе [14], мы воспользуемся теорией подобия для перемешанного пограничного слоя, предложенной в работах [15] и [16]. Используя универсальные функции, предложенные в работе [16], с параметрами, характерными для холодных вторжений, получим  $C_H = 1.4$  и будем считать  $C_H$  константой, не зависящей от  $y$ .

В дальнейшем будет показано, что уравнения (1) – (3) независимы от уравнений движения. Это является следствием предположения о том, что направление ветра в АПС не зависит от  $y$  и совпадает с направлением крупномасштабного геострофического ветра. Как показано в работе Чечина и др. [4], такое предположение справедливо для холодных вторжений.

В системе (1) – (3) неизвестной является скорость вовлечения  $w_e$ , которая по определению

$$w_e = -\frac{(\overline{w'\theta'})_{z_i}}{\Delta\theta}, \quad (4)$$

где  $(\overline{w'\theta'})_{z_i}$  – поток тепла на верхней границе АПС за счет вовлечения. Для его параметризации воспользуемся гипотезой

$$(\overline{w'\theta'})_{z_i} = -\beta(\overline{w'\theta'})_s, \quad (5)$$

где  $\beta = 0.2$  – постоянный коэффициент пропорциональности, а  $(\overline{w'\theta'})_s$  – поток тепла на поверхности.

Если подставить (4) в (3) и воспользоваться параметризацией (5), то можно решить (3) и выразить  $\Delta\theta$  через  $z_i$  (см., например, [17])

$$\Delta\theta = \frac{\gamma\beta z_i}{1+2\beta}. \quad (6)$$

Далее, путем подстановки (4), (5) и (6) в уравнение (2), а также используя (1), можно решить (2) и получить диагностическое соотношение между  $z_i$  и  $\theta_m$

$$\overline{z_i} = \overline{\theta_m} \frac{1+2\beta}{1+\beta}, \quad (7)$$

где  $\overline{z_i}$  и  $\overline{\theta_m}$  представляют собой  $z_i$  и  $\theta_m$  нормированные следующим образом

$$\overline{\theta_m} = \frac{\theta_m - \theta_{ice} + \gamma z_{i0}}{\theta_w - \theta_{ice} + \gamma z_{i0}}, \quad \overline{z_i} = \frac{z_i}{H}, \quad (8)$$

где  $H = (\theta_w - \theta_{ice}) / \gamma + z_{i0}$ , а  $z_{i0}$  – начальная высота АПС (т.е. при  $y = 0$ ).

Подставляя (7) в (1), можно решить (1) аналитически, как это сделал Венкатрам (см. его уравнение 44)

$$\ln(1 - \overline{\theta_m}) + \overline{\theta_m} = -C_1 \overline{y} + C_2, \quad (9)$$

где  $C_1 = (1 + \beta)^2 C_H / (1 + 2\beta)$  и  $C_2 = z_{i0} / H + \ln(1 - z_{i0} / H)$  это константы, зависящие только от внешних параметров, а  $\overline{y}$  – нормированное расстояние от кромки льда

$$\bar{y} = \frac{y}{\cos \alpha H}. \quad (10)$$

Резюмируя, мы, вслед за Венкатрамом, получили неявную аналитическую зависимость (9) температуры в АПС от расстояния от кромки льда, а также диагностическое соотношение (7), связывающее высоту АПС  $z_i$  с потенциальной температурой  $\theta_m$ . Приведенное решение практически повторяет решение Венкатрама за исключением того, что Венкатрам сделал допущение, что  $z_{i0} = 0$  и  $\cos \alpha = 1$ . Уравнение (9) можно легко решить, используя итерационный метод Ньютона.

## 1.2. Модель NH3D

Модель NH3D представляет собой трехмерную негидростатическую модель атмосферы, в основе которой лежат уравнения Миллера и Уайта [18], использующую в качестве вертикальной координаты нормированное давление  $\sigma$ . Модель ранее применялась для воспроизведения орографических гравитационных волн [19] и циркуляций над гидрологически неоднородной поверхностью [20], натекания холодного воздуха на полярные [21]. Недавно было продемонстрировано [4], что NH3D хорошо воспроизводит холодные вторжения в Арктике в сравнении с наблюдениями.

Для задач настоящей работы в модель была встроена параметризация вовлечения на верхней границе АПС, реализованная согласно работе [22]. При этом, используется точно такая же гипотеза для параметризации вовлечения, как и в модели перемешанного слоя, описываемая формулой (5). В АПС для параметризации турбулентного потока тепла используется нелокальное замыкание турбулентности, предложенное в работе [23].

## 1.3. Одномерная модель пограничного слоя

В основе численной одномерной модели лежат прогностические уравнения для горизонтальных компонент скорости ветра, потенциальной температуры воздуха, удельной влажности и удельного влагосодержания облаков и осадков. Уравнения представлены конечно-разностными аналогами на вертикальной  $z$ -сетке.

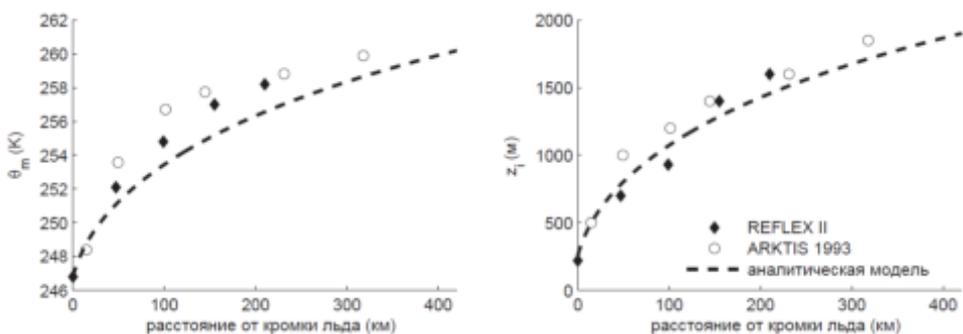
В качестве нижнего граничного условия в модели задаются турбулентные потоки тепла и импульса в приземном слое. Их параметризация основана на теории подобия Монина-Обухова. Параметризация микрофизических процессов в облаках представляет собой схему Кесслера [24], которая учитывает наличие только жидкой фазы в облаках. В данных экспериментах мы пренебрегаем радиационными процессами, так как они играют вторичную роль в прогреве АПС по сравнению с потоком тепла с поверхности и выделением скрытого тепла при конденсации влаги в облаках.

## 2. Сравнение с наблюдениями

Для верификации модели перемешанного слоя используются самолетные наблюдения и измерения со сбрасываемых зондов, сделанные во время холодного вторжения над проливом Фрама к северо-западу от Шпицбергена 4-го марта 1993 г. Наблюдения были выполнены в ходе двух независимых измерительных кампаний REFLEX II [25] и ARKTIS 1993 [2], организованных разными научными коллективами – Институтом им. Альфреда Вегенера (Бремерхафен, Германия) и Уни-

верситетом г. Гамбург (Германия), соответственно. Этот случай холодного вторжения хорошо задокументирован, и данные наблюдений опубликованы в нескольких работах [23, 2, 4].

По данным наблюдений оценивалась осредненная по высоте АПС потенциальная температура и высота АПС. Для этого использовались вертикальные профили температуры воздуха, измеренные сбрасываемыми зондами (данные кампании REFLEX II), а также данные самолетных наблюдений (данные кампании ARKTIS 1993), выполненные во время галсов в направлении перпендикулярном направлению ветра на различной высоте (см. рис. 2 в [2]). Данные самолетных наблюдений представляют собой результат осреднения вдоль каждого галса протяженностью 30–50 км. Высота пограничного слоя оценивалась по вертикальным профилям  $\theta$  как высота, на которой вертикальный градиент  $\partial\theta/\partial z$  резко увеличивается по сравнению с малыми значениями  $\partial\theta/\partial z$  внутри перемешанного пограничного слоя.



**Рис. 1.** Значения осредненной по высоте АПС потенциальной температуры  $\theta_m$  и высоты АПС  $z_i$ , полученные по результатам наблюдений во время холодного вторжения 04.03.1993 в проливе Фрама (закрашенные ромбы – данные кампании REFLEX II; пустые кружки – данные кампании ARKTIS 1993) и согласно решениям (7) и (9) аналитической модели (пунктирная линия)

Для аналитической модели были заданы следующие значения внешних параметров:  $\gamma = 0.0095$  К/м,  $\alpha = 33.4^\circ$  (северо-восточный ветер при ориентации кромки льда в направлении север-юг),  $\theta_w = 273$  К, а также начальные значения температуры воздуха  $\theta_{ice} = 246.8$  К и высоты пограничного слоя надо льдом  $z_{i0} = 220$  м. Для задания значений этих параметров использовались вертикальные профили температуры и компонент скорости ветра, измеренные над прикромочной зоной морского льда.

На рисунке 1 приведены значения  $\theta_m$  и  $z_i$ , полученные по результатам наблюдений, а также согласно аналитическим решениям (7) и (9). Видно, что аналитическая модель в целом хорошо воспроизводит рост и прогрев пограничного слоя. Однако, модель занижает величину прогрева  $\theta_m - \theta_{ice}$  на 10–15%, что может быть связано с тем, что в модели не учитывается эффект выделения скрытого тепла конденсации в облаках. Рост АПС воспроизводится аналитической моделью с точностью  $\pm 5\%$ .

Для того, чтобы верифицировать модель в более широком диапазоне параметров, в следующем разделе ее результаты сравниваются с результатами идеализированных экспериментов, выполненных с помощью негидростатической модели NH3D.

### 3. Сравнение с результатами NH3D

С помощью модели NH3D были проведены эксперименты, в которых значения  $\theta_w - \theta_{ice}$  менялись в пределах от 15 до 35 К, что соответствует типичному для холодных вторжений диапазону. При этом начальная высота АПС надо льдом была задана равной 200 м, а компоненты скорости крупномасштабного геострофического ветра равными  $u_g = 6.2$  м/с и  $v_g = 9.4$  м/с, что соответствует северо-восточному ветру и  $\alpha = 33.4^\circ$ , как и в ранее рассмотренном случае холодного вторжения 04.03.1993.

В NH3D, так же как и в аналитической модели, не учитывались конденсация влаги в облаках, а также радиационные притоки тепла.

Постановка экспериментов была такой же, как и в подробно описанная в работе Чечина и др. [4]. Модель интегрировалась на срок более 60 часов до достижения стационарного состояния в расчетной области размером более 1500 км в направлении север-юг. Использовался горизонтальный шаг сетки 5 км и вертикальный шаг сетки, меняющийся от 30 м до 150 м в нижних 2-х километрах. Верхняя граница расчетной области располагалась на высоте порядка 10 км.

На рисунке 2 приведены значения  $\theta_m$  и  $z_i$ , воспроизведенные моделью NH3D, а также их значения  $\overline{\theta}_m$  и  $\overline{z}_i$ , нормированные согласно формулам (8) и изображенные как функции нормированного расстояния от кромки льда  $\hat{y} = C_1 \bar{y} - C_2$ .

Такая нормировка должна привести к тому, что кривые  $\overline{\theta}_m$  и  $\overline{z}_i$  для различных значений  $\theta_w - \theta_{ice}$  сколлапсируют в одну кривую, если аналитическая модель хорошо описывает механизм прогрева и роста АПС, воспроизводимый NH3D.

Рис. 2 демонстрирует, что значения  $\theta_m$  и  $z_i$ , воспроизводимые NH3D очень чувствительны к значениям  $\theta_w - \theta_{ice}$ . Однако нормированные значения  $\overline{\theta}_m$  и  $\overline{z}_i$  сливаются в одну кривую, и аналитическое решение хорошо согласуется с результатами NH3D с точностью порядка 5–10%.

### 4. Горизонтальный масштаб трансформации воздушной массы

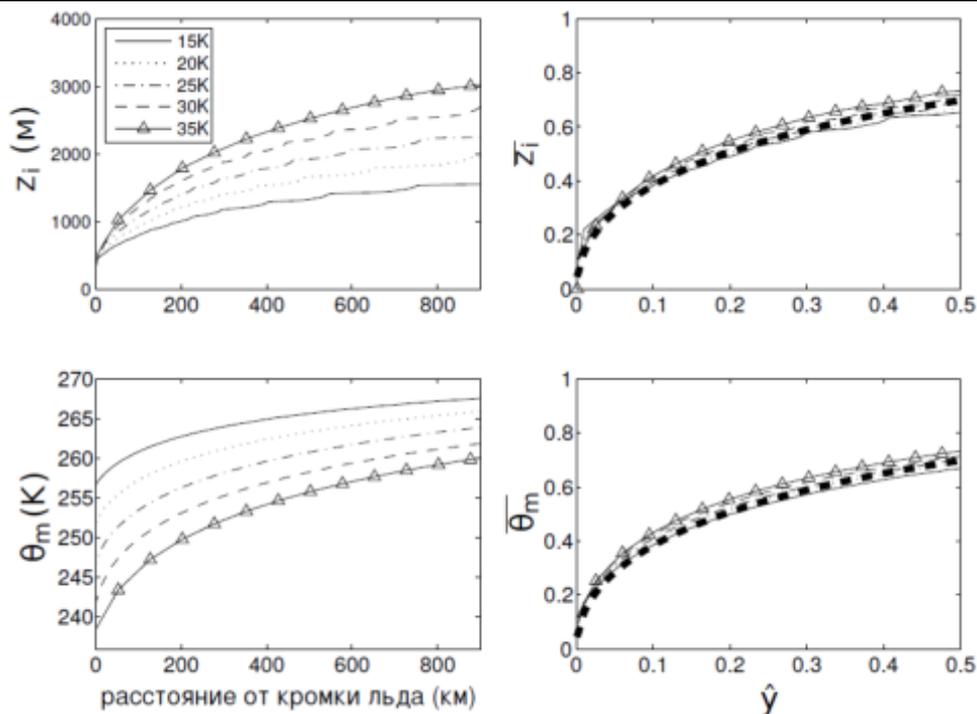
В качестве характерного горизонтального масштаба трансформации воздушной массы  $L_{tr}$  можно выбрать расстояние от кромки льда, на котором величина  $1 - \overline{\theta}_m$  убывает в  $e$  раз. Из уравнения (9) легко получить

$$L_{tr} = \frac{\cos \alpha (1 + 2\beta)}{e C_H (1 + \beta)^2} \left[ e z_{i0} + \frac{\theta_w - \theta_{ice}}{\gamma} \right]. \quad (11)$$

Более того, если заметить, что  $(1 + 2\beta) / (1 + \beta)^2 \approx 1$  при  $\beta = 0.2$ , и  $e z_{i0} + (\theta_w - \theta_{ice}) / \gamma \approx H$  для типичных холодных вторжений, то (11) можно упростить и получить

$$L_{tr} \approx \frac{H \cos \alpha}{e C_H}. \quad (12)$$

Очевидно, что согласно уравнениям (7), (9), (11) и (12) рост и прогрев АПС не зависят от скорости ветра, хотя турбулентный поток тепла на поверхности океана сильно от нее зависит.



**Рис. 2.** Значения осредненной по высоте АПС потенциальной температуры  $\theta_m$  и высоты АПС  $z_i$ , воспроизведенные моделью NH3D (слева) как функции расстояния от кромки льда  $y$ , а также их нормированные значения  $\bar{\theta}_m$  и  $\bar{z}_i$  согласно результатам NH3D и аналитической модели (жирный пунктир) как функции нормированного расстояния от кромки льда  $\hat{y}$  (справа)

Для типичных холодных вторжений в Арктике  $H$  меняется в пределах от 1500 до 3000 м, что соответствует  $L_{tr}$  порядка 400–800 км.

## 5. Постановка экспериментов для одномерной модели

Воспроизведение холодных вторжений с помощью одномерной модели осуществляется в рамках Лагранжева подхода. Он заключается в том, что мы предполагаем, что вертикальная колонна воздуха единичной площади движется вдоль по потоку со средней скоростью, равной скорости ветра, осредненной по высоте АПС. Эксперименты ставятся таким образом, что сначала колонна проводит некоторое время над морским льдом, а затем характеристики подстилающей поверхности меняются на соответствующие морской поверхности.

Была рассмотрена область протяженностью 1100 км в направлении север–юг, что соответствует характерной протяженности в этом направлении Баренцева моря. Крупномасштабный геострофический ветер был направлен с севера на юг и задавался равным  $10 \text{ мс}^{-1}$ . В основном эксперименте положение кромки льда было задано таким образом, что над свободной ото льда поверхностью воздушный поток проходит 900 км. В дальнейших экспериментах положение кромки льда задавалось смещенным на 200 км к югу и на 200 км к северу от ее положения в ос-

новном эксперименте. Такое смещение соответствует характерной изменчивости положения кромки льда в Баренцевом море в зимнее время [26].

В основном эксперименте начальный профиль потенциальной температуры представляет собой типичный профиль в холодное время года надо льдом (рис. 3). У поверхности профиль представлен перемешанным слоем с температурой 238 К до высоты 200 м. Над перемешанным слоем расположен слой с сильной инверсией, в котором потенциальная температура растет до 248 К на высоте 250 м. Выше стратификация также устойчивая, однако вертикальный градиент температуры не столь велик.

Такой профиль с сильной приземной инверсией формируется при сильном выхолаживании подстилающей поверхности над мощным многолетним льдом. При уменьшении толщины и сплоченности льда приземная инверсия не формируется. Согласно этим соображениям, в последующих экспериментах надо льдом задавался перемешанный слой большей высоты, имеющий более высокую температуру. Начальные профили, соответствующие менее толстому и сплоченному льду, также изображены на рис. 1.

Температура поверхности морского льда задавалась равной приземной температуре воздуха. Температура поверхности открытой воды была задана равной 273.15 К, что представляет собой характерное значение для Баренцева моря в холодное время года. Параметр шероховатости  $z_0$  для морского льда задавался равным 0.001 м, а для открытой воды рассчитывался по формуле Чарнока. Параметр шероховатости для скаляров рассчитывался как  $z_{0h} = 0.1z_0$ .

## 6. Чувствительность к положению кромки льда

На рис. 4 представлены результаты численных экспериментов с различным положением кромки льда. Видно, что смещение кромки льда на расстояние 200 км приводит к существенным различиям в характеристиках АПС над открытой водой. Так, между экспериментами с кромкой льда смещенной на 200 км к северу и к югу в центральной части рассматриваемой области (350 км от кромки льда в основном эксперименте) потенциальная температура воздуха меняется от 255 до 262 К, высота АПС – от 1000 до 2000 м, интегральное содержание водяного пара в АПС – от 0.8 до 1.7 кг/м<sup>2</sup>, интегральное влагосодержание облаков – от 0.18 до 0.2 кг/м<sup>2</sup>, поток явного тепла – от 350 до 200 Вт/м<sup>2</sup>, поток скрытого тепла – от 150 до 130 Вт/м<sup>2</sup>. При этом, различия между экспериментами убывают с увеличением расстояния от кромки льда. Это приводит к тому, что при выходе потока на сушу (900 км от кромки льда в основном эксперименте) различия в потенциальной температуре, осредненной по высоте АПС, составляют 3 К, а высоты АПС – 450 м, что составляет порядка 20% от значений высоты АПС в момент выхода потока на сушу в основном эксперименте. Интересно, что интегральное влагосодержание облаков в момент выхода потока на сушу практически не зависит от положения кромки льда.

Большой интерес представляют количественные оценки интегральных потерь тепла океаном. Так, если проинтегрировать поток явного тепла вдоль по потоку от -200 км до 900 км от кромки льда в основном эксперименте, то получим, что интегральная потеря тепла океаном за счет явного тепла меняется от 0,18 до 0,23 ГВт, а со скрытым теплом – 0.086 до 0.13 ГВт между экспериментами с кромкой льда смещенной на 200 км к югу и 200 км к северу, соответственно. Т.е. при увеличении площади открытой воды на 57% потери явного тепла вырастут на 27%, а скрытого тепла – на 51%.

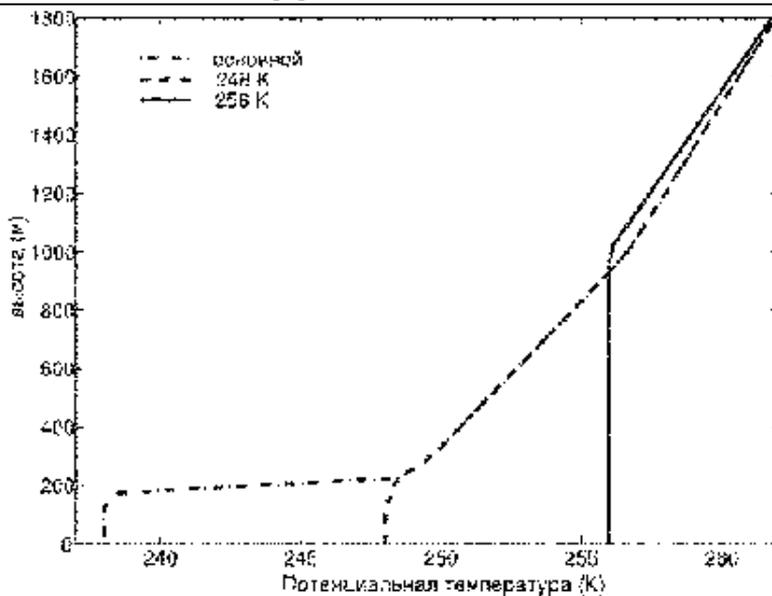


Рис. 3. Начальные профили потенциальной температуры надо льдом

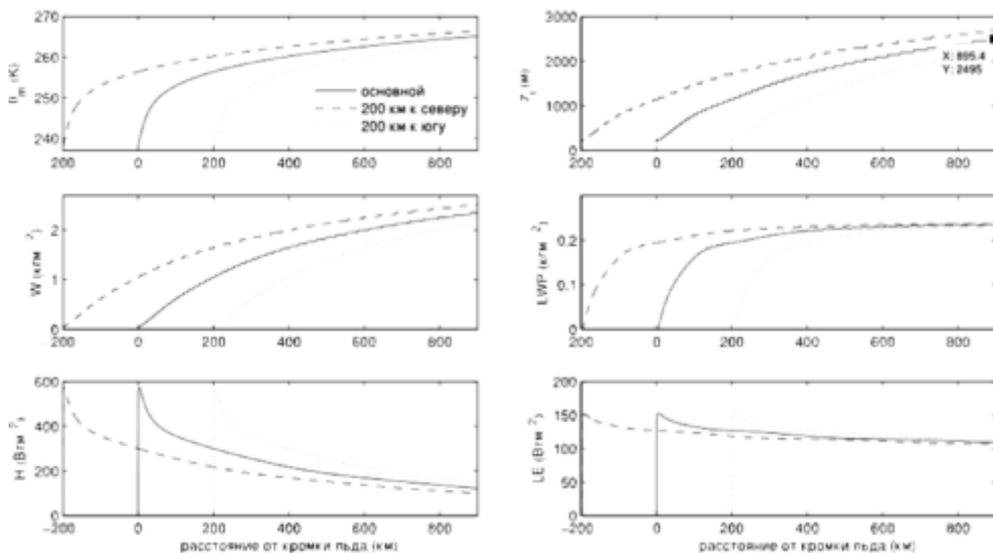


Рис. 4. Потенциальная температура воздуха  $\theta_m$ , осредненная по высоте АПС, высота АПС  $z_i$ , интегральное содержание водяного пара в АПС  $W$ , интегральное влагосодержание в облаках  $LWP$ , поток явного  $N$  и скрытого тепла  $LE$  на поверхности океана в экспериментах с различным положением кромки льда

### 7. Чувствительность к структуре АПС надо льдом

На рис. 5 представлены результаты численных экспериментов с заданием различных начальных профилей потенциальной температуры. Видно, что различия

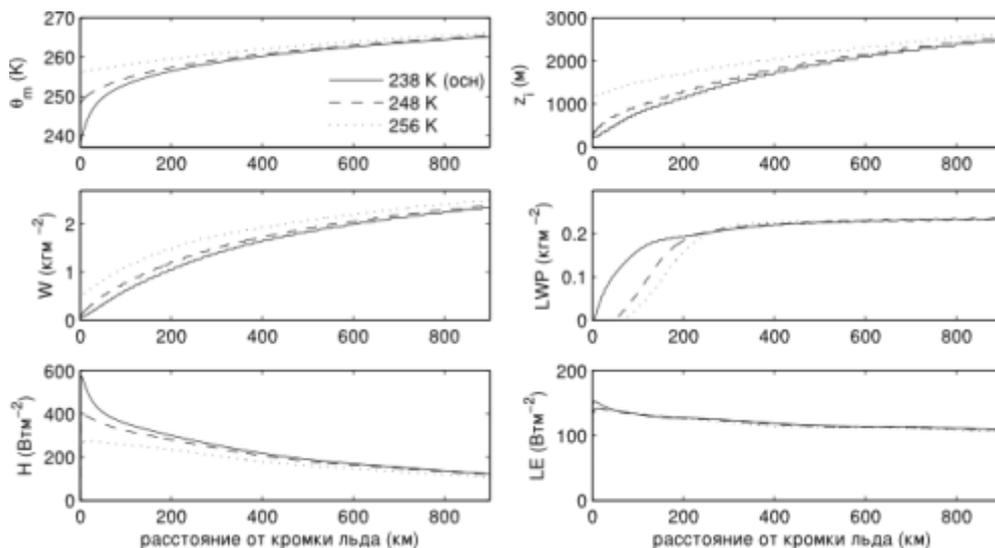


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но для экспериментов с различной структурой АПС над льдом, заданной согласно рис. 3

между экспериментами существенны в пределах первых 400 км от кромки льда. Например, максимальный поток явного тепла вблизи кромки льда в эксперименте с начальной температурой АПС 256 К составляет лишь менее  $300 \text{ Вт/м}^2$ , что более чем в два раза меньше, чем в основном эксперименте. На расстоянии более 400 км от кромки льда различия между результатами экспериментов не превышают 10% от значений, полученных в основном эксперименте. Интегральное влагосодержание водяного пара, а также поток скрытого тепла вообще слабо чувствительны к начальному профилю температуры воздуха

### Выводы

В работе показано, что простая аналитическая модель перемешанного пограничного слоя хорошо описывает рост (с точностью 50–10%) и прогрев АПС (с точностью 10–15%) во время холодных вторжений в Арктике. Это продемонстрировано на основе сравнения как с данными наблюдений, так и с результатами численного моделирования с помощью негидростатической модели. Прогрев АПС по данным наблюдений лишь на 10–15% превышает прогрев согласно аналитическому решению, что, вероятно, соответствует нагреву при конденсации влаги в облаках, не учитываемого в аналитической модели. Такие оценки, указывающие о второстепенной роли скрытого тепла конденсации для прогрева АПС во время холодных вторжений в Арктике, согласуются с опубликованными ранее результатами [13]. Это объясняется низкой температурой поверхности океана и, как следствие, большими значениями соотношения Боуэна, типичные значения которого для холодных вторжений вблизи кромки льда составляют 2–4.

На основе аналитического решения уравнения для потенциальной температуры, осредненной по высоте АПС, получено выражение для характерного горизонтального масштаба трансформации холодной воздушной массы над океаном в

Арктике. Сделанные оценки показывают, что этот масштаб для типичных холодных вторжений составляет порядка 400–800 км. Это означает, что на масштабе акваторий Арктических морей (например, Баренцева), холодная воздушная масса заметно прогревается, но еще остается существенно холоднее температуры поверхности воды.

Резюмируя, можно сделать вывод, что простая аналитическая модель пограничного слоя является полезным инструментом для исследования холодных вторжений и может быть использована в ряде приложений. Например, с ее помощью можно оценить чувствительность потерь тепла с поверхности акваторий Арктических морей к изменению таких параметров как положение кромки льда, температура воздуха и стратификация надо льдом. Кроме того, при исследовании мезомасштабных циркуляций, таких как конвективные ячейки или полярные мезоциклоны, модель может быть использована для задания среднего состояния АПС, на фоне которого развиваются эти циркуляции.

Результаты идеализированных численных экспериментов показали, что при увеличении площади открытой воды на 57% интегральные потери явного тепла океаном во время отдельных случаев холодных вторжений растут на 27%, а скрытого – на 51%. При этом, чувствительность характеристик АПС к положению кромки льда убывает по мере удаления от кромки льда, и в прибрежных районах она не велика. В частности, температура воздуха в АПС в момент пересечения потоком побережья Баренцева моря меняется всего на 3 К при смещении кромки льда на 400 км к северу. То же самое верно и по отношению к чувствительности характеристик АПС к структуре АПС надо льдом. Так, более высокий и прогретый АПС надо льдом при уменьшении сплоченности и толщины морского льда приводит к заметным изменениям характеристик АПС только в пределах первых 400 км от кромки льда. При этом, потоки явного тепла вблизи кромки льда существенно уменьшаются. Это означает, что увеличение потерь тепла океаном при смещении к северу кромки льда частично оказывается скомпенсированным уменьшением потоков тепла при уменьшении сплоченности и толщины морского льда.

## Литература

- [1] Kolstad E.W., Bracegirdle T.J., Seierstad I.A. Marine cold-air outbreaks in the North Atlantic: temporal distribution and associations with large-scale atmospheric circulation // *Climate dynamics*. 2009. V. 33. N 2–3. P. 187–197.
- [2] Brümmer B. Boundary-layer modification in wintertime cold-air outbreaks from the Arctic sea ice // *Boundary Layer Meteorol.* 1996. V. 80(1). P. 109–125.
- [3] Smedsrud L.H. et al. The role of the Barents Sea in the Arctic climate system // *Rev. Geophys.* 2013. V. 51. P. 415–449.
- [4] Chechin D.G., Lüpkens C., Repina I.A., Gryanik V.M. Idealized dry quasi 2-D mesoscale simulations of cold-air outbreaks over the marginal sea ice zone with fine and coarse resolution // *J. Geophys. Res. Atmos.* 2013. V. 118, D16. P. 8787–8813.
- [5] Rasmussen E.A., Turner J. *Polar Lows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 610 p.
- [6] Brümmer B. Boundary layer mass, water, and heat budgets in wintertime cold-air outbreaks from the Arctic sea ice // *Mon. Weather Rev.* 1997. V. 125. No. 8. P. 1824–1837.

- [7] *Pagowski M., Moore G.W.K.* A numerical study of an extreme cold-air outbreak over the Labrador sea: Sea ice, air-sea interaction, and development of polar lows // *Mon. Weather Rev.* 2001. V. 129. P. 47–72.
- [8] *Wacker U., Potty K., Lüpkes C., Hartmann J., Raschendorfer M.* A case study on a polar cold air outbreak over Fram Strait using a mesoscale weather prediction model // *Boundary Layer Meteorol.* 2005. V. 117. P. 301–336.
- [9] *Venkatram A.* A model of internal boundary-layer development // *Boundary Layer Meteorol.* 1977. V. 11(4). N 4. P. 419–437.
- [10] *Renfrew I.A., King J.C.* A simple model of the convective internal boundary layer and its application to surface heat flux estimates within polynyas // *Boundary Layer Meteorol.* 2000. V. 94. P. 335–356.
- [11] *Overland J.E., Reynolds R.M., Pease C.H.* A Model of the Atmospheric Boundary Layer Over the Marginal Ice Zone // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88(C5). P. 2836–2840.
- [12] *Yuen C.-W., Young J.A.* Dynamical Adjustment Theory for Boundary Layer Flow in Cold Surges // *J. Atmos. Sci.* 1986. V. 43(24). P. 3089–3108.
- [13] *Renfrew I.A., Moore G.W.K.* An extreme cold-air outbreak over the Labrador sea: Roll vortices and air-sea interaction // *Mon. Weather Rev.* 1999. V. 127(10). P. 2379–2394.
- [14] *Чечин Д.Г., Заболотских Е.В., Репина И.А., Шапрон Б.* Влияние бароклинности и экмановского трения на приземную скорость ветра во время холодных вторжений в Арктике // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2015. Т. 51. № 2. С. 146–157.
- [15] *Deardorff J.W.* Parameterization of the planetary boundary layer for use in general circulation model // *Mon. Weather Rev.* 1972. V. 100. P. 93–106.
- [16] *Arya S.P.S.* Suggested revisions to certain boundary layer parameterization schemes used in atmospheric circulation models // *Mon. Weath. Rev.* 1977. V. 105. P. 215–227.
- [17] *Garrat J.* *The Atmospheric Boundary Layer.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992. P. 336.
- [18] *Miller M.J., White A.A.* On the non-hydrostatic equations in pressure and sigma coordinates // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 1984. V. 110 (464). P. 515–533.
- [19] *Miranda P. M.A., Valente M.A.* Critical level resonance in three-dimensional flow past isolated mountains // *J. Atmos. Sci.* 1997. V. 54 (12). P. 157–158.
- [20] *Степаненко В.М., Миранда П.М., Лыкозов В.Н.* Численное моделирование мезомасштабного взаимодействия атмосферы и гидрологически неоднородной суши // *Вычислительные технологии.* 2007. Т. 11, № 3. С. 118–127.
- [21] *Репина И.А., Чечин Д.Г.* Влияние полыней и разводов в Арктике на структуру атмосферного пограничного слоя и региональный климат // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса.* 2012. Т. 9. № 4. С. 162–170.
- [22] *Noh Y., Cheon W.G., Hong S.Y., Raasch S.* Improvement of the K-profile model for the planetary boundary layer based on large eddy simulation data // *Boundary Layer Meteorol.* 2003. V. 107(2). P. 401–427.
- [23] *Lüpkes C., Schlüenzen K.H.* Modelling the arctic convective boundary-layer with different turbulence parameterizations // *Boundary Layer Meteorol.* 1996. V. 79(1). P. 107–130.
- [24] *Kessler E.* On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circulation // *Meteor. Monogr.* 1969. V. 10. Amer. Meteor. Soc. 84 p.
- [25] *Kottmeier C., Hartmann J., Wamser C., Bochert A., Lüpkes C., Freese D., Cohrs W.* Radiation and Eddy Flux Experiment 1993 (REFLEX II) // *Reports on Polar Res. Bremerhaven,* 1994. V. 132. P. 62.
- [26] *Strong C.* Atmospheric influence on Arctic marginal ice zone position and width in the Atlantic sector, February–April 1979–2010 // *Climate Dynamics.* 2013. V. 39. P. 3091–3102.



## **Глава 4. Верхняя атмосфера**



## **4.1. Тонкая слоистая структура стратосферы и нижней термосферы по данным инфразвукового зондирования**

***С.Н. Куличков, И.П. Чунгузов***

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

Данный раздел глава посвящен исследованию характеристик тонкой слоистой структуры поля скорости ветра в стратосфере, мезосфере и нижней термосфере с помощью инфразвуковых волн от наземных взрывов и вулканических извержений. Эти характеристики (вертикальные профили тонкой структуры, их спектры и характерные масштабы) получены с помощью нового метода акустического зондирования атмосферы, основанного на явлении рассеяния инфразвука от анизотропных неоднородностей скорости ветра и температуры в область акустической тени. Метод позволяет получать данные о вертикальной структуре скорости ветра и ее временной изменчивости на высотах нижней термосферы, слабодоступных для других дистанционных методов зондирования атмосферы, включая метеорные (высоты до 105 км) и спутниковые измерения.

### **Введение**

Акустический метод зондирования атмосферы с помощью взрывов, основанный на полном внутреннем отражении звука от неоднородной атмосферы, уже давно используется для исследования структуры и динамики атмосферы [1, 2]. Именно с помощью этого метода в начале прошлого века был обнаружен рост температуры и скорости звука с высотой в слое верхней стратосферы [1], а позже восстановлен вертикальный профиль скорости звука в этом слое [3]. Измерение временных вариаций азимутов и времен прихода инфразвуковой волны в атмосферных звуковых волноводах в настоящее время используется для непрерывного мониторинга вариаций скорости ветра в слое стратосферы и нижней термосферы [4–6]. При этом используется специальная процедура восстановления крупномасштабных (по отношению к длине акустической волны) вертикальных вариаций скорости ветра, основанная на сопоставлении измеренных параметров акустических сигналов с их расчетными параметрами, вычисленными в приближении геометрической акустики [6].

Для восстановления тонкой вертикальной структуры скорости ветра, масштабы которой сопоставимы с длинами инфразвуковых волн, было предложено использовать явление частичных отражений звука от слоистых неоднородностей атмосферы [7]. Аналитическая связь между параметрами тонкой структуры и характеристиками отраженного акустического сигнала была найдена в работах [8, 9]. Именно на этой связи и основан новый метод акустического зондирования тонкой слоистой структуры атмосферы.

### **1. Методика восстановления вертикальных профилей скорости ветра в атмосфере**

Методика восстановления основана на явлении рассеяния акустических импульсов на слоистых неоднородностях скорости ветра и температуры, заполня-

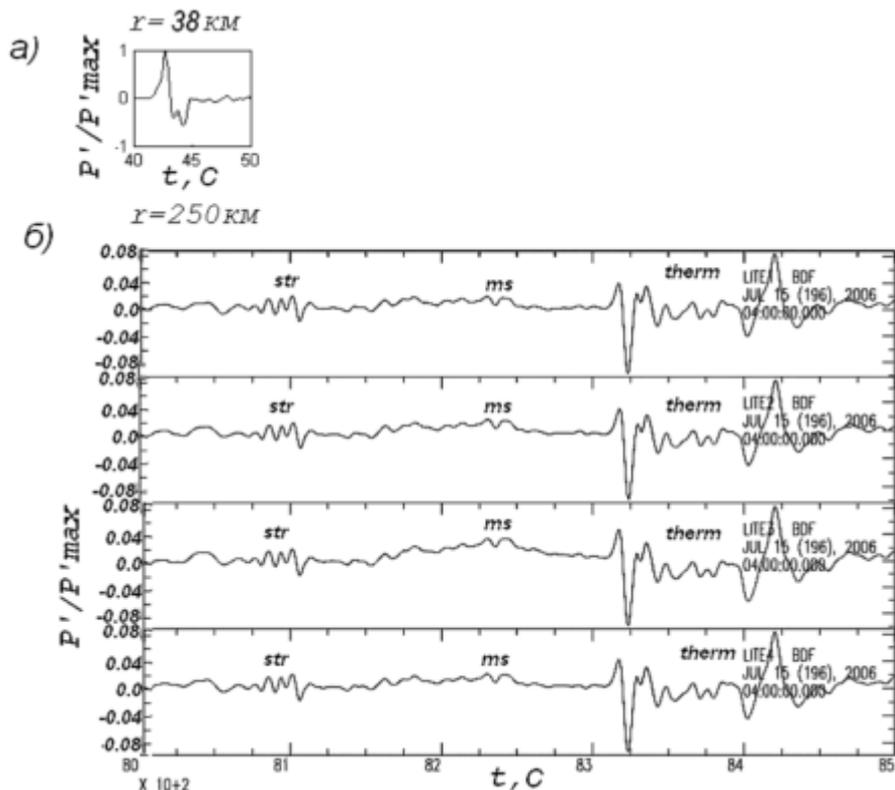
ющих непрерывно всю толщу атмосферы от поверхности земли до высот нижней термосферы около 140 км. Характерные горизонтальные масштабы анизотропных неоднородностей атмосферы, составляющих ее тонкую структуру, могут в сотни раз превосходить их вертикальные масштабы. Эти неоднородности эффективно рассеивают звук в зеркальном направлении по отношению к направлению волны, падающей на атмосферный слой, заполненный слоистыми неоднородностями [10]. Благодаря такому рассеянию акустическое поле проникает в так называемые зоны акустической тени на земной поверхности, где и обнаруживается экспериментально [7, 11].

Для контроля формы и амплитуды сигнала, генерируемого импульсным источником инфразвука (вулкан или наземный взрыв), один из акустических приемников должен быть установлен на расстоянии от нескольких до десятков километров от источника, чтобы обеспечить прием прямого сигнала, распространяющегося в тропосфере. Другие приемники необходимо располагать на расстояниях от 100 км до 250 км от источника, чтобы они находились в пределах зоны акустической тени для стратосферных и термосферных приходов. Такие приходы сигналов надежно идентифицируются в экспериментах по характерным для них горизонтальным скоростям распространения и временным формам сигналов.

Временная задержка между стратосферным и тропосферным приходами на дальние приемники может быть оценена по скорости распространения тропосферного прихода от источника к ближайшему приемнику. Это позволяет определить горизонтальную скорость распространения стратосферного прихода и оценить соответствующую этому приходу высоту расположения слоя в стратосфере, рассеивающего сигнал в сторону поверхности земли. Аналогично определяется и горизонтальная скорость распространения термосферного прихода и соответствующая ему высота расположения рассеивающего слоя атмосферы.

Появление в зоне тени инфразвука, рассеянного тонкой структурой атмосферы, было промоделировано на примере одного из сигналов от вулкана Тунгураха (Tungurahua) в Эквадоре [8] высотой около 5 км. Этот сигнал зарегистрирован 15 июля 2006 г. на расстояниях 38 км и 250 км от вулкана (см. рис. 1) [4]. На рис. 1 акустические давления сигналов  $p'(t)$  в точках приема нормированы на пиковое значение амплитуды сигнала  $p'_{\max}$  на расстоянии 38 км. На таком расстоянии наблюдался только прямой сигнал, распространявшийся в тропосфере (см. рис. 1а), тогда как на расстоянии 250 км от вулкана антенна из 4-х приемников зарегистрировала отражения от стратосферы (*str*), мезосферы (*ms*) и нижней термосферы (*therm*) (см. рис. 1б).

На рис. 2. показаны результаты модельного расчета акустического поля (частота 0.1 Гц) от точечного источника на высоте 5 км над землей, которые были получены с помощью метода псевдо-дифференциального параболического уравнения (ППУ) [12]. В первом случае (рис. 2а) расчет проведен для полуэмпирического профиля эффективной скорости звука  $C_{eff, 0}(z)$ , взятого из современной модели атмосферы Ground-to-Space (G2S) [13]. Невозмущенный профиль  $C_{eff, 0}(z)$  имеет максимальное значение на высоте стратопазузы  $z = 49$  км, которое на 2.5 м/с меньше, чем на высоте кратера вулкана ( $z_0 = 5$  км). В этом случае с точки зрения геометрической акустики полного отражения сигнала в стратосфере не происходит. В другом случае (рис. 2б) на профиль G2S накладываются модель-



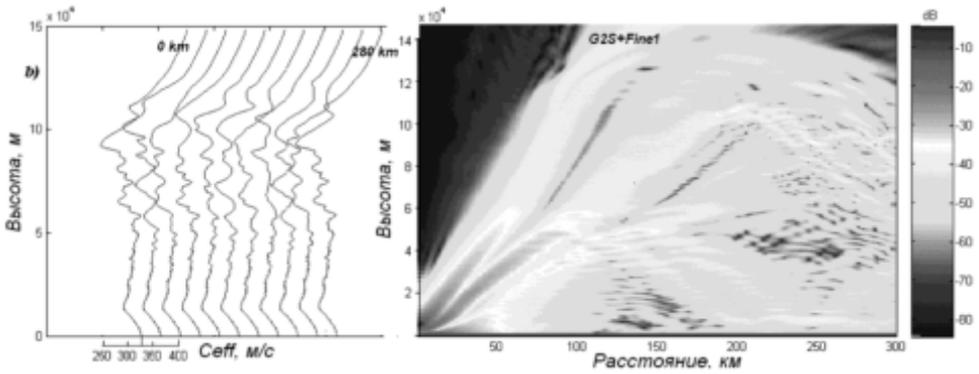
**Рис. 1.** Акустические сигналы от вулкана Tungurahua в Эквадоре (высота 5 км), зарегистрированные на расстояниях 38 км (а) и 250 км (б) от него. Акустическое давление  $p'$  сигналов нормировано на максимальную амплитуду давления  $p'_{\max}$  при  $r = 38$  км

ные анизотропные неоднородности эффективной скорости звука, обусловленные тонкой слоистой структурой полей скорости ветра и температуры.

Благодаря этому поле рассеивается на анизотропных неоднородностях в стратосфере, мезосфере и нижней термосфере, что приводит к “засвечиванию” зоны акустической тени, формирующейся в отсутствие этих неоднородностей. Этот эффект объясняет эксперименты, в которых сигналы от взрывов и вулканов обнаруживались в зонах акустической тени [7–8].

Основная идея предлагаемого метода зондирования состоит в том, чтобы в момент времени  $t_0$  по формам, амплитудам и временам пробега приходов сигналов, зарегистрированных в зоне тени, восстановить мгновенные вертикальные профили флуктуаций скорости ветра в слоях стратосферы (25–50 км) и нижней термосферы (90–130 км).

Извлечь эту информацию позволяет уравнение, полученное в [9], которое связывает форму акустического давления  $p'(t)$  в рассеянном сигнале от произвольного слоя атмосферы, содержащего вертикальные флуктуации скорости звука  $\Delta c(z)$  (вызванные флуктуациями температуры  $\Delta T(z)$ ) и скорости ветра  $\Delta \vec{v}(z)$ , с формой вертикального профиля флуктуаций эффективного показателя преломления аку-



**Рис. 2.** Акустическое поле точечного источника звука на частоте 0.1 Гц, находящегося на высоте 5 км, рассчитанное методом псевдодифференциального параболического уравнения (ППУ) для 2-х случаев: а) Для полуэмпирического профиля эффективной скорости звука G2S, взятого из современной модели атмосферы Ground-to-Space (жирная линия вверху слева) и б) При наложении на профиль G2S модельных анизотропных неоднородностей эффективной скорости звука, обусловленных тонкой слоистой структурой полей скорости ветра и температуры в атмосфере (внизу). В последнем случае поле рассеивается на анизотропных неоднородностях в стратосфере, мезосфере и нижней термосфере, что приводит к “засвечиванию” зоны акустической тени

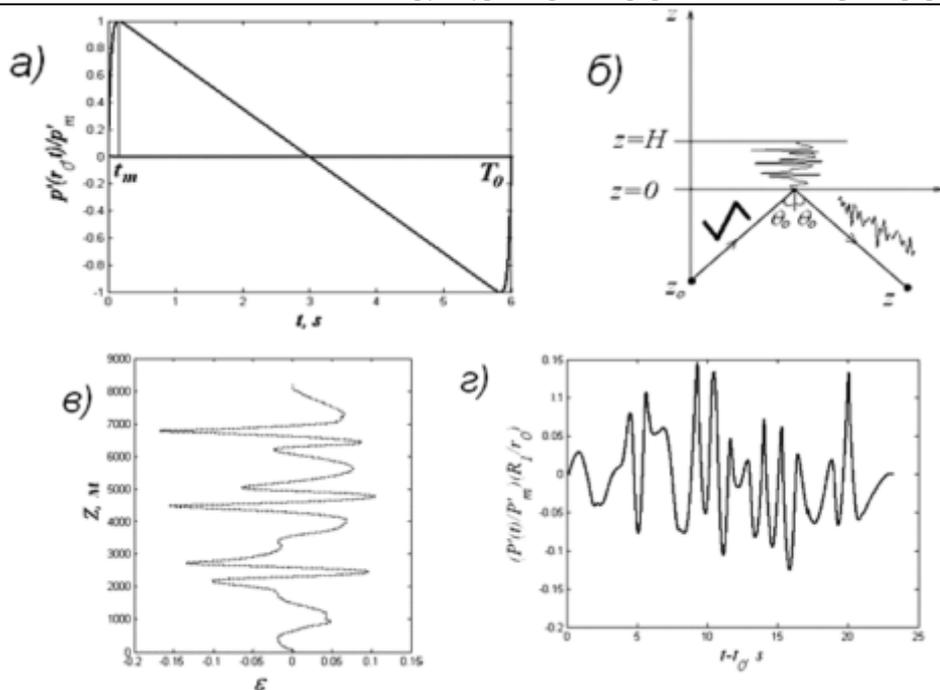
стической волны в слое,  $\varepsilon(z) \approx -2(\Delta c + \Delta u \sin \theta_0)c_1^{-1} \cos^{-2} \theta_0$ , и формой падающего сигнала  $f(t)$  (рис. 3):

$$p'(t) = -\frac{p_m' r_0}{4R_1} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(t - R_1 / c_1 - z / a) \varepsilon'(z) \quad (1)$$

где  $p_m'$  – максимум акустического давления сигнала вблизи точечного источника, находящегося в т.  $z_0$ , на расстоянии  $r_0$  от него,  $\varepsilon'(z)$  – производная  $\varepsilon(z)$ ,  $\theta_0$  – угол падения луча на нижнюю границу слоя  $z = 0$ , попадающего в приемник в т.  $z$  при зеркальном отражении от границы слоя,  $R_1$  – сумма расстояний в вертикальной плоскости от источника до точки зеркального отражения луча на границе неоднородного слоя  $z = 0$ , и от этой точки до приемника в т.  $z$  (см. рис. 3б),  $c_1$  – невозмущенная скорость звука, считающаяся постоянной как в слое, так и за его пределами,  $a \equiv c_1 / (2\cos\theta_0)$ ,  $\Delta u(z)$  – проекция  $\Delta V'(z)$  на направление горизонтального радиуса – вектора, соединяющего источник с приемником. Задача восстановления профиля  $\varepsilon(z)$  с помощью (1) при известных формах рассеянного и падающего сигналов, описываемых функциями  $I_0(t) = p'(t) / (\frac{p_m' r_0}{4R_1})$  и  $f(t) = p'(r_0, t) / p_m'$ ,

во многом аналогична задаче восстановления профиля скорости звука в океане [14].

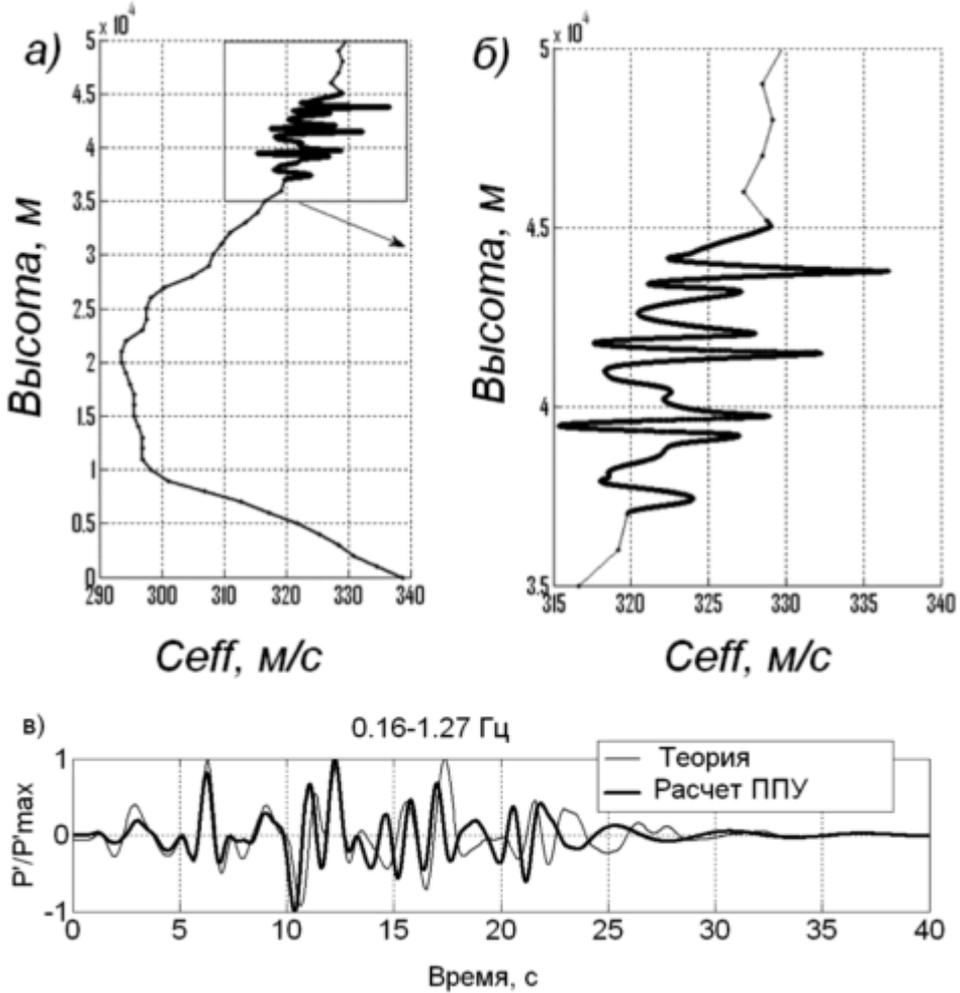
На рис. 3г показана рассчитанная с помощью уравнения (1) форма отраженно-го сигнала для одной из модельных реализаций профиля  $\varepsilon(z)$  в слое стратосферы [15] (рис. 3в). Из-за нелинейности распространения акустического сигнала от источника в верхние слои атмосферы, форма сигнала искажается, и он трансформируется в  $N$ -волну, поэтому в качестве падающего на слой сигнала  $f(t)$  взята  $N$ -волна длительностью  $T_0$  и шириной ударного фронта  $t_m$  (рис. 3а). Ее параметры



**Рис. 3.** Схема отражения акустического сигнала от слоистых неоднородностей атмосферы и форма отраженного сигнала. а) Акустическая  $N$ -волна от точечного источника в  $t_0$  с формой  $f(t) = p'(r_0, t) / p'_m$ , падающая на неоднородный движущийся слой  $0 \leq z \leq H_0$  с вертикальными флуктуациями эффективного показателя преломления  $\varepsilon(z)$ . б) Схема падения волны. в) Одна из модельных реализаций эффективного показателя преломления  $\varepsilon(z)$  в неоднородном слое стратосферы толщиной  $H = 8.2$  км при  $\theta_0 = 70^\circ$  и  $c_1 = 330$  м/с,  $a = 483$  м/с. Среднеквадратичное значение флуктуаций эффективной скорости звука составляет 3 м/с. г) Форма отраженного сигнала  $h(t)$  от неоднородного слоя стратосферы с вертикальным профилем  $\varepsilon(z)$

на высоте стратопазы были рассчитаны с помощью уравнения Бюргерса [9, 16]. Расчетный сигнал на рис. 3в хорошо согласуется по форме, амплитуде и длительности с типичными стратосферными приходами от вулканов [8] и наземных взрывов [17]. Это согласие подтверждает возможность использования уравнения (1) для восстановления профилей  $\varepsilon(z)$  по формам стратосферных и термосферных приходов сигнала.

Расчет отраженного сигнала с помощью уравнения (1) для атмосферы с  $c_1 = \text{const}$ , включающей слой стратосферы с флуктуациями эффективной скорости звука  $\Delta C_{\text{eff}}(z)$  на высотах 38–45 км, дает хорошее согласие с численным расчетом сигнала методом ППУ (рис. 4). Последний учитывает влияние реальной стратификации атмосферы на форму отраженного сигнала от слоя стратосферы 38–45 км с теми-же флуктуациями  $\Delta C_{\text{eff}}(z)$ . Сложение этих флуктуаций с реальным профилем эффективной скорости звука  $\Delta C_{\text{eff}}(z)$ , полученном по данным ракетного зондирования в эксперименте [11], дает возмущенный профиль на рис. 4а и рис. 4б. Для этого профиля форма сигнала в диапазоне частот 0.16–1.27 Гц, рассчитанная методом ППУ, показана на рис. 4в (жирная линия). Угол падения луча



**Рис. 4.** Сравнение форм сигналов (в диапазоне частот 0.16–1.27 Гц), отраженных от слоя стратосферы 37–45 км, рассчитанных с помощью соотношения (1) (тонкая линия) и методом ППУ (жирная линия). В последнем случае использовался профиль эффективной скорости звука  $C_{eff}(z)$ , показанный сверху слева (а), а сам слой с вертикальными флуктуациями  $C_{eff}(z)$  показан справа (б). Сигналы нормированы на их максимальные значения  $P_{max}$ , относительная разница которых не превышает 30 %

на стратосферный слой  $\theta_0$  равен  $70^\circ$ . Теоретически рассчитанная по формуле (1) форма сигнала, отфильтрованная в том же диапазоне частот 0.16–1.27 Гц, что и в методе ППУ, изображена тонкой линией. Она хорошо согласуется по форме и длительности с сигналом, рассчитанным по методу ППУ, что говорит о том, что влияние рефракции волны слабо влияет на форму отраженного сигнала.

В уравнении (1) предполагается, что функция  $\varepsilon(z)$  обращается в нуль при  $z \rightarrow \pm\infty$ , т.е. за пределами неоднородного слоя, поэтому после интегрирования по частям в (1) и замены переменных  $t' = t - R_1 / c_1 - z'/a$  получим интегральное уравнение типа свертки относительно самой функции  $\varepsilon(z)$ :

$$I_0(t) = -\frac{1}{4} \int_0^{T_0} \varepsilon(a(t - R_1 / c_1 - t')) \frac{df(t')}{dt}, \text{ Методы решения такого уравнения}$$

детально проанализированы в [18]. Решение этой обратной задачи существенно упрощается, если учесть, что основные вклады в рассеянный сигнал  $I_0(t)$  дают малые окрестности ударных фронтов  $N$ -волны, в которых ее производная  $df(t) / dt$  имеет “резкие выбросы” с острыми локальными максимумами. Благодаря этому связь между профилем  $\varepsilon(z)$  и формой рассеянного сигнала приобретает простой вид [9]:

$$I_0(t) \approx [\varepsilon(a(t - R_1 / c_1)) + \varepsilon(a(t - R_1 / c_1 - T_0))]/2. \quad (2)$$

Другими словами, начиная с момента вступления сигнала в точку приема,  $t_0 = R_1 / c_1$ , он непрерывно длится в течение промежутка времени  $\Delta T = T_0 + 2H_0 / (c_1 / \cos \theta_0)$  и повторяет (с учетом замены переменных  $z = a(t - R_1 / c_1)$ ) форму суммы флуктуаций  $\varepsilon(a(t - R_1 / c_1))$  с этими же флуктуациями  $\varepsilon(a(t - R_1 / c_1 - T_0))$ , но смещенными на величину  $T_0$ . Допустим, что мы можем оценить (например, из расчета лучевых траекторий для заданного профиля  $C_{eff, 0}(z)$  в атмосфере) угол падения волны и скорость звука на высоте слоя отражения и по ним вычислить значение коэффициента  $a$ . Тогда задача нахождения профиля  $\varepsilon(z)$  по известному отраженному сигналу  $I_0(t)$  сводится к решению уравнения (2) относительно функции  $\varepsilon(z = at)$ .

Обозначим значения сигнала в дискретные моменты времени  $t_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), через  $y_i = I_0(t_i)$ , где  $n$  – число дискретных значений в реализации сигнала  $y_i$ , а через  $x_i = \varepsilon(a(t_i - R_1 / c_1))/2$  – значения флуктуаций эффективного показателя преломления в моменты  $t_i - R_1 / c_1 > 0$ , причем только  $k = n - m$  значений  $x_i$  являются ненулевыми, где  $m$  – число значений  $t_i$ , приходящихся на интервал смещения  $T_0$ . Тогда уравнение (2) сводится к следующей системе линейных уравнений относительно  $x_i$

$$y_i = x_i \text{ при } 1 \leq i \leq m, \quad m < n \quad (3)$$

$$y_i = x_i + x_{i-m} \text{ при } m+1 \leq i \leq k, \quad (4)$$

$$y_i = x_{i-m} \text{ при } k+1 \leq i \leq n. \quad (5)$$

Эта система уравнений может быть записана в стандартном виде

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-m}x_{n-m} \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-m}x_{n-m} \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n,n-m}x_{n-m} \end{aligned} \quad (6)$$

где среди коэффициентов  $a_{ij}$  отличными от нуля являются только следующие:  $a_{ii} = 1$  при  $1 \leq i \leq m$ ,  $a_{i,i} = 1$  и  $a_{i,i-m} = 1$  при  $m+1 \leq i \leq k$ ,  $a_{i,i-m} = 1$  при  $k+1 \leq i \leq n$ . Учитывая, что система (5) переопределена, так как число уравнений больше числа неизвестных, мы будем искать ее приближенное решение методом наименьших квадратов. Приближенное решение  $X = \{x_j\}$  системы (3)-(5) определяет профиль  $\varepsilon(z_j)$  в точках  $z_j = a(t_j - R_1 / c_1)$ . Отсюда можно определить и профиль флуктуаций фазовой скорости распространения звуковой волны в направлении  $\theta_0$ , используя соотношение

$$\Delta c(z_j) + \Delta u(z_j) \sin \theta_0 = -\varepsilon(z_j) c_1 \cos^2 \theta_0 / 2 \quad (7)$$

Профиль фазовой скорости (7) при углах падения  $\theta_0$ , близких к  $\pi / 2$ , (т.е. при малых углах скольжения) приближенно описывает профиль флуктуаций эффективной скорости звука  $\Delta C_{eff}(z_j)$ , определяемых по следующей формуле:

$$\Delta C_{eff}(z_j) \approx \Delta c(z_j) + \Delta u(z_j) \sin \theta_0 \quad (8)$$

Чтобы проверить точность восстановления профиля флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z_j)$ , этот профиль накладывался на модельный профиль  $G2S$ , после чего для возмущенного профиля  $\Delta C_{eff,0}(z_j) + \Delta C_{eff}(z_j)$  проводился расчет стратосферных и термосферных приходов методом ППУ, и эти приходы сравнивались с экспериментальными. При каждом итерационном шаге такого расчета параметры восстановленных флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z_j)$ , такие как высоты расположения слоев отражения в стратосфере и нижней термосфере, а также дисперсии самих флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z_j)$  в этих слоях, варьировались в небольших пределах так, чтобы отличие форм и времен пробега расчетных и зарегистрированных в эксперименте сигналов не превышало погрешность измерения этих параметров.

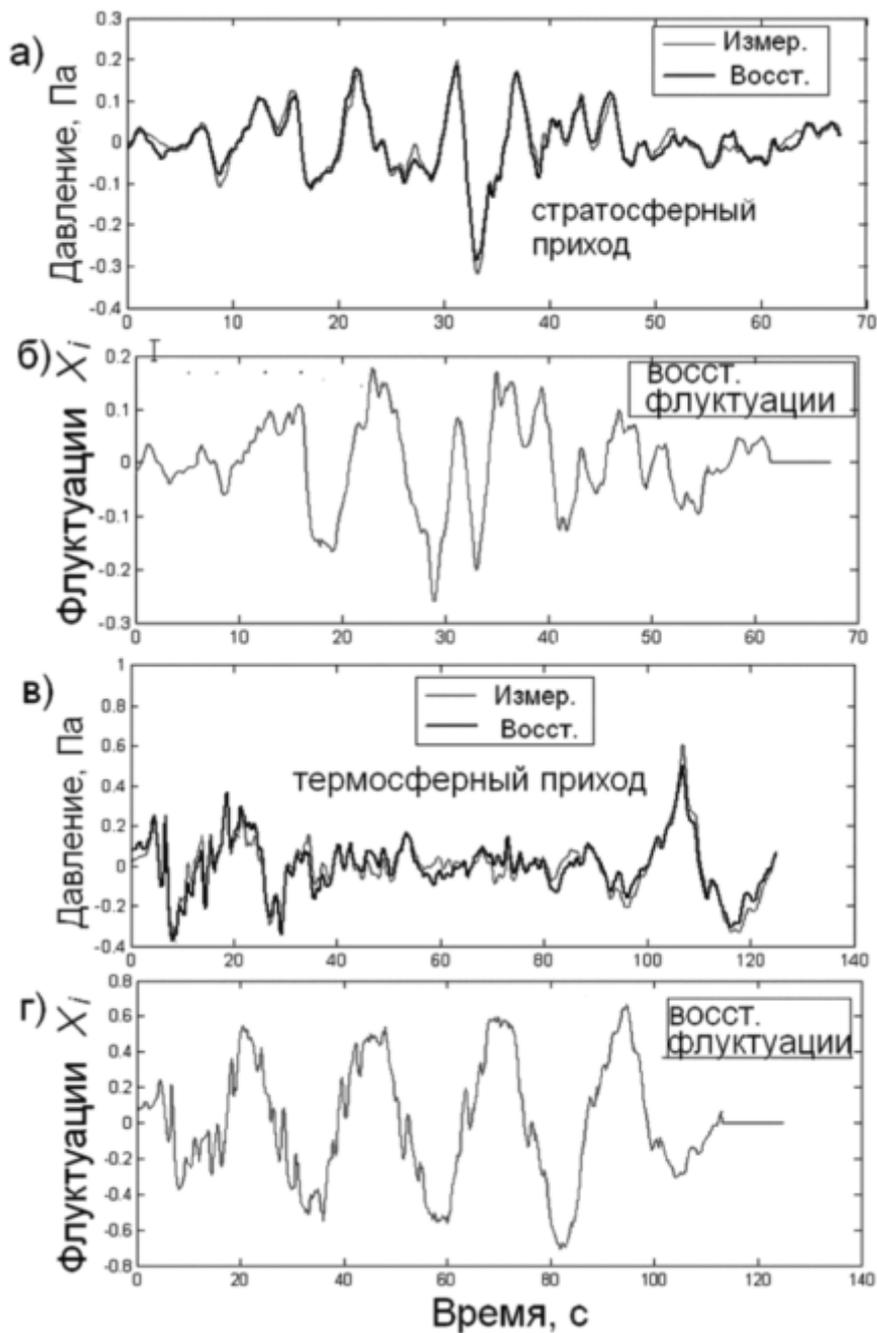
Описанный метод зондирования позволяет восстанавливать флуктуации  $\Delta C_{eff}(z_j)$  с достаточно большими вертикальными градиентами (до 0.1 м/с на 1 м), способными эффективно рассеивать инфразвук. Существенный вклад в такие флуктуации вносят атмосферные гравитационные волны. Согласно оценкам, приведенным в [9], среднеквадратичный вклад в относительные флуктуации эффективной скорости звука за счет относительных флуктуаций температуры, вызванных случайным полем ВГВ, примерно в 5 раз меньше среднеквадратичного вклада относительных флуктуаций горизонтальной проекции скорости ветра  $\Delta u / c_1$ . Благодаря этому, полученные флуктуации  $\Delta C_{eff}(z_j)$  совпадают с флуктуациями проекции скорости ветра  $\Delta u(z) \sin \theta_0$  с точностью до 20%, т.е. в пределах типичной ошибки измерений скорости ветра в средней атмосфере с помощью радаров [19].

## 2. Результаты реконструкции вертикальных флуктуаций скорости ветра в атмосфере

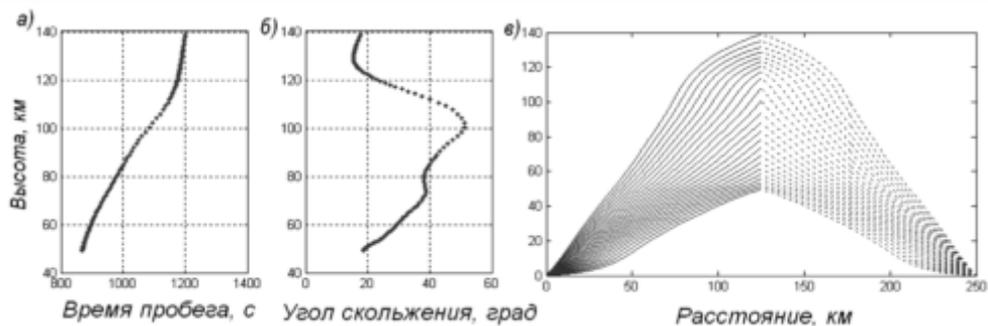
### 2.1 Вертикальные профили флуктуаций, восстановленные по инфразвуковым сигналам от вулкана в Эквадоре

Мы применили описанную выше процедуру восстановления профиля эффективной скорости звука и скорости ветра в стратосфере и нижней термосфере по соответствующим стратосферным и термосферным приходам одного из трех сигналов от вулкана в Эквадоре (рис. 5а, в), зарегистрированных 15 июля 2006 [8]. Сигналы следовали друг за другом с интервалом примерно в 30 мин, что позволило нам проследить за изменениями восстановленных профилей флуктуаций за столь короткие промежутки времени.

На рис. 5а показан стратосферный приход  $u_i$  (тонкая линия) на расстоянии 250 км от вулкана, а результат восстановления с помощью (3)-(5) флуктуаций  $x_i$  по описанной выше процедуре для падающей  $N$ -волны длительностью  $T_0 = 6$  с (на высоте стратопазы порядка 50 км) показан на рис. 5б. Свертка восстановленных флуктуаций  $x_i$  с падающей  $N$ -волной эквивалентна их суперпозиции (3)-(5) со смещенными на  $T_0 = 6$  с этими же флуктуациями. Расчет этой суперпозиции дает



**Рис. 5.** Стратосферный (а) и термосферный (б) приходы (показаны без нормировки на амплитуду) от вулкана на расстоянии  $r = 250$  км и соответствующие им формы восстановленных флуктуаций  $x_i$  ((в) и (г))



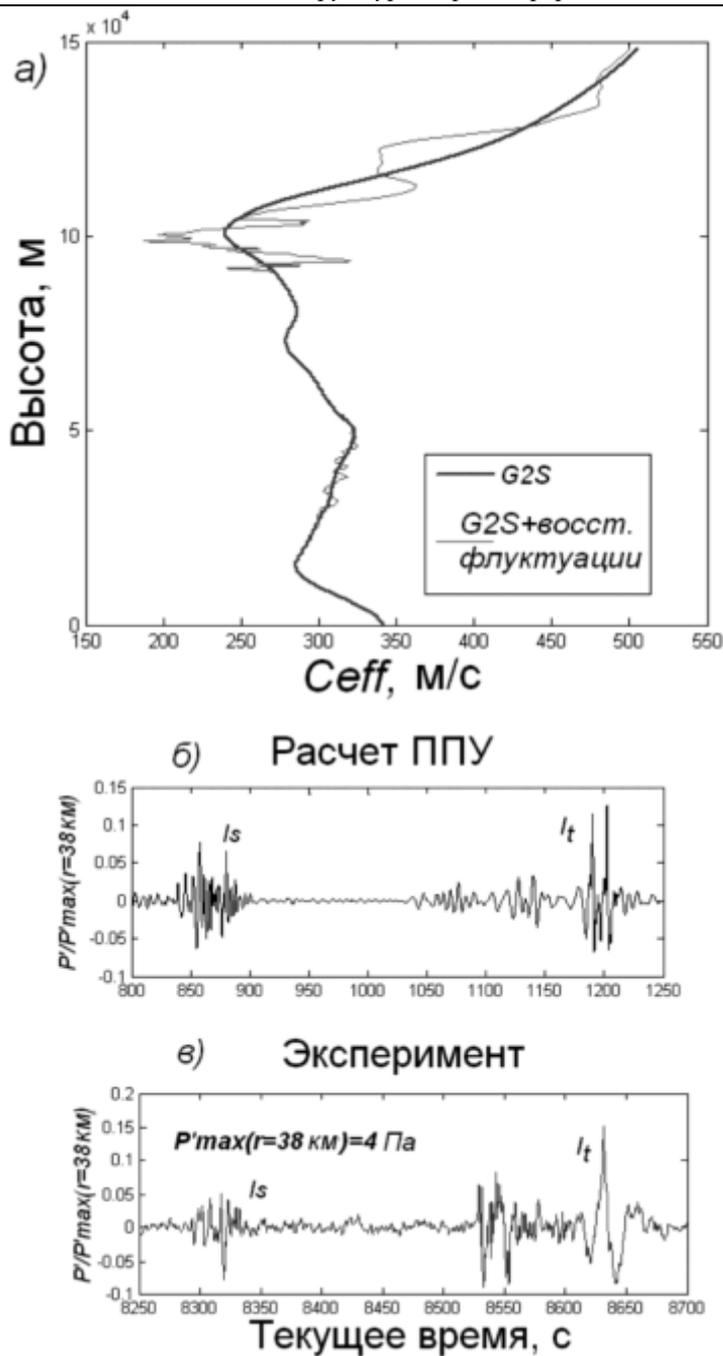
**Рис. 6.** Высотные зависимости времени пробега звуковой волны до точки зеркального отражения от слоистой неоднородности на высоте  $z$  (а) и угла ее падения  $\theta_0(z)$  (б). Схема частичного отражения акустической волны от слоистых неоднородностей  $\Delta C_{eff}(z)$ , непрерывно заполняющих слой атмосферы от  $z = 40$  км до  $z = 140$  км (в). Расчет лучевых траекторий до высоты  $z$  проведен для невозмущенного профиля  $G2S$ , показанном на рис. 2а

сигнал, показанный на рис. 5а жирной линией. Его среднеквадратичное отклонение от измеренного сигнала невелико и находится в пределах статистической погрешности измерений сигнала. Сама погрешность оценена по временным реализациям сигналов на 4-х приемниках и составляет примерно 0.02 Па, или 10% от амплитуды сигнала. Эта оценка погрешности близка к среднеквадратическому значению шума, измеренному на всех приемниках в промежутки времени порядка 100 с, в течение которых сигналы от вулкана не регистрировались.

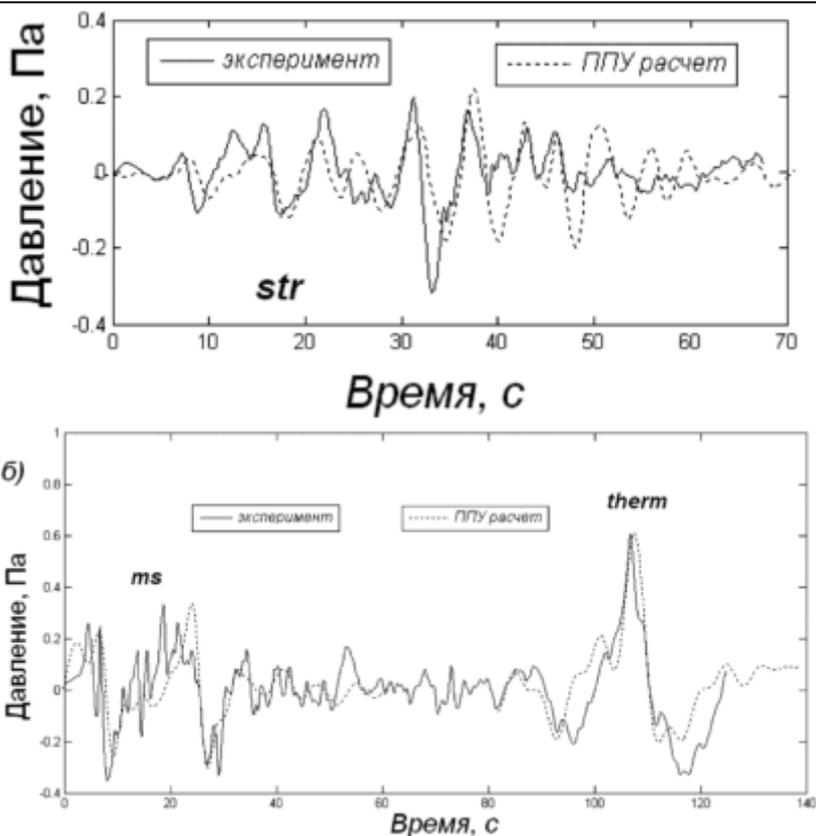
Аналогичная процедура, примененная к термосферному сигналу (рис. 5в тонкая линия) при длительности  $N$ -волны  $T_0 = 12$  с, увеличенной из-за нелинейных эффектов, дает восстановленные флуктуации  $x_i$  (рис. 5г). Соответствующий этим флуктуациям восстановленный сигнал, показан на рис. 5в (жирная линия). Среднеквадратическая разница между восстановленным и измеренным сигналами находится в пределах погрешности измерений сигнала. На рис. 6а и 6б показаны высотные зависимости времени пробега звуковой волны до точки зеркального отражения от слоистой неоднородности и угла ее падения  $\theta_0(z)$  соответственно. Частичное отражение волны от слоистых неоднородностей  $\Delta C_{eff}(z)$ , схематически показано на рис. 6в. Расчет лучевых траекторий до высоты  $z$  проведен для невозмущенного профиля  $G2S$  (рис. 2а).

Если время пробега отраженного сигнала в точку приема известно из эксперимента, то из рис. 6а можно оценить соответствующую этому сигналу высоту его отражения  $z$ , а следовательно и угол падения  $\theta_0(z)$ . Зная этот угол и скорость звука на высоте  $z$  можно оценить и коэффициент  $a \equiv c_1 / (2\cos\theta_0)$ , связывающий эту высоту с текущим временем прихода сигнала  $t$ .

Результаты восстановления флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$  в слоях стратосферы (20–55 км) и нижней термосферы, (90–102 км) и (105–140 км), полученные с помощью описанной выше методики, примененной к сигналу на рис. 5, показаны на рис. 7а. На нем также изображен первоначальный профиль  $G2S$  с наложенными на него флуктуациями  $\Delta C_{eff}(z)$ . Для этого профиля сигнал, рассчитанный методом ППУ в диапазоне частот 0.07–0.7 Гц, показан на рис. 7б, а для сравнения с ним показан также исходный экспериментальный сигнал (рис. 7в).



**Рис. 7.** Результаты восстановления флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$  в слое стратосферы (20–55 км) и слоях нижней термосферы, (90–102 км) и (105–140 км). а) Профиль  $G2S$  с наложенными на него флуктуациями  $\Delta C_{eff}(z)$ . б) Сигнал, рассчитанный методом ППУ в диапазоне частот 0.07–0.7 Гц. в) Исходный сигнал, зарегистрированный в эксперименте



**Рис. 8.** Стратосферный и термосферный приходы, полученные методом ППУ (пунктирные линии) для возмущенного профиля (на рис. 7а) и зарегистрированные в эксперименте (сплошная линия)

Высоты расположения слоев уточнялись в процессе расчета так, чтобы добиться минимальной разности между расчетными и экспериментальными временами приходов, т.е. чтобы эта разность лежала в пределах погрешности измерений времен пробега сигнала, составляющей по нашим оценкам 10–20 с. После этого варьировались максимальные значения  $\Delta C_{eff}(z)$  в каждом слое путем умножения  $\Delta C_{eff}(z)$  на постоянный коэффициент (не изменяя при этом форму самого профиля  $\Delta C_{eff}(z)$ ), чтобы добиться согласия расчетных и измеренных в эксперименте отношений между амплитудами стратосферных и термосферных приходов на расстоянии  $r = 250$  км, и отношений амплитуды стратосферного прихода к амплитуде сигнала вблизи источника ( $r = 38$  км). Учитывая, что относительная ошибка измерений амплитуд приходов достигает 30%, можно также оценить погрешность, с которой восстановлены сами флуктуации  $\Delta C_{eff}(z)$  в каждом слое. Она составляет примерно 2 м/с на высотах стратосферы и 10–15 м/с на высотах нижней термосферы.

Расчет стратосферного прихода  $I_s$  на рис. 7 проводился для заданного импульса вблизи источника с равномерной амплитудно-частотной характеристикой в

диапазоне 0.1–1 Гц. Этот диапазон заведомо включал энергонесущую часть временного спектра стратосферного прихода, поэтому сигнал  $I_s$  приближенно описывает форму импульсной характеристики среды, через которую он распространялся. При расчете термосферного прихода  $I_t$  был выбран более низкочастотный диапазон 0.07–0.7 Гц, учитывающий наблюдаемое в эксперименте смещение спектра этого прихода в низкочастотную область по сравнению со спектром прихода  $I_s$ .

Чтобы учесть, что на высотах стратосферы и нижней термосферы импульс от наземного источника приобретает форму близкую к  $N$ -волне, проводилась свертка полученных приходов  $I_s$  и  $I_t$  с  $N$ -волной. При этом учитывался рост длительности  $N$ -волны с высотой  $z$ , поэтому свертка  $I_s$  с  $N$ -волной проводилась при длительности последней в 6 с, тогда как приход  $I_t$  сворачивался с  $N$ -волной длительностью 12 с. Полученные при таком расчете стратосферный и термосферный приходы показаны пунктирными линиями на рис.8а и рис.8б, соответственно. Из сравнения с измеренными приходами (сплошная линия) видно, что расчетные приходы удовлетворительно передают основные особенности формы измеренных приходов. Тем не менее, они заметно сглажены из-за фильтрации этих приходов в указанных выше частотных диапазонах.

Вертикальные профили эффективной скорости звука  $\Delta C_{eff,0}(z_j) + \Delta C_{eff}(z_j)$  в стратосфере, восстановленные по трем сигналам, следующим друг за другом с интервалом времени порядка 30 мин, показаны на рис. 9. Даже за столь короткие промежутки наблюдаются малые изменения в форме профилей. Например, в слоях атмосферы 45–47 км и 35–37 км сохраняется во времени положительный градиент эффективной скорости звука, тогда как в слоях 30–35 км и 36–40 км локальный минимум в профиле вертикальных флуктуаций  $\Delta C_{eff,0}(z_j) + \Delta C_{eff}(z_j)$  сменяется за 30 мин на локальный максимум. Наблюдаемая короткопериодная изменчивость тонкой структуры  $\Delta C_{eff,0}(z_j) + \Delta C_{eff}(z_j)$  и скорости ветра предсказана моделью формирования этой структуры [15]. Действительно, нерезонансные взаимодействия ВГВ генерируют широкий частотный спектр флуктуаций скорости ветра, в котором присутствуют как очень медленные флуктуации, имеющие периоды в несколько часов, значительно превышающие период Брента-Вяйсяля (примерно 5–10 мин в стратосфере), так и быстрые флуктуации с периодами порядка самого периода Брента-Вяйсяля.

Соответствующие трем сигналам вертикальные профили флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$  в нижней термосфере были восстановлены в диапазонах высот 90–102 км и 105–140 км (рис. 10). Характерные вертикальные масштабы флуктуаций растут с высотой и достигают значений 10–20 км в слое 105–140 км, в то время как максимальные значения самих флуктуаций могут достигать значений 50–60 м/с. Заметна короткопериодная временная изменчивость, вызванная, по-видимому, нелинейной динамикой ВГВ в верхней атмосфере. Однако на более длинных периодах (от десятков часов до нескольких дней) существенный вклад во временную изменчивость скорости ветра в верхней атмосфере вносят приливы и волны планетарного масштаба, как и следует, в частности, из непрерывных многомесячных измерений временных вариаций времен пробега сигналов от вулкана в Эквадоре [4].

Интересной особенностью профиля флуктуаций нижней термосферы является наличие тонких слоев с экстремально большими вертикальными градиентами

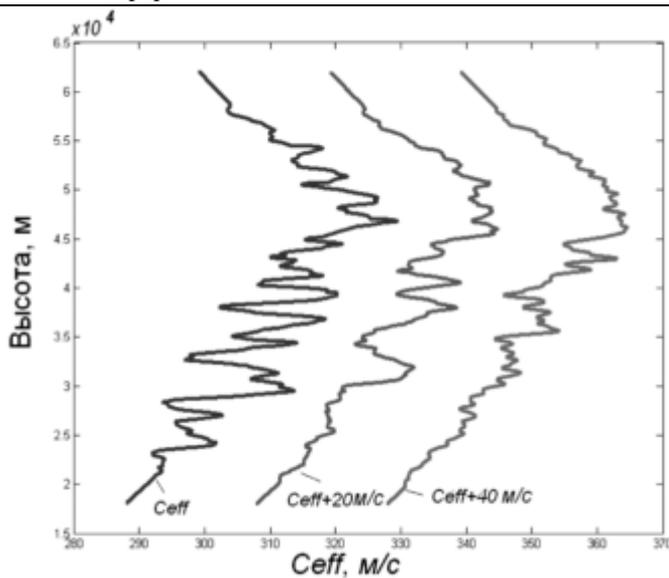


Рис. 9. Вертикальные профили эффективной скорости звука  $\Delta C_{eff,0}(z_i) + \Delta C_{eff}(z_i)$  в стратосфере, восстановленные по трем сигналам от вулкана, следующим друг за другом с интервалом времени порядка 30 мин.

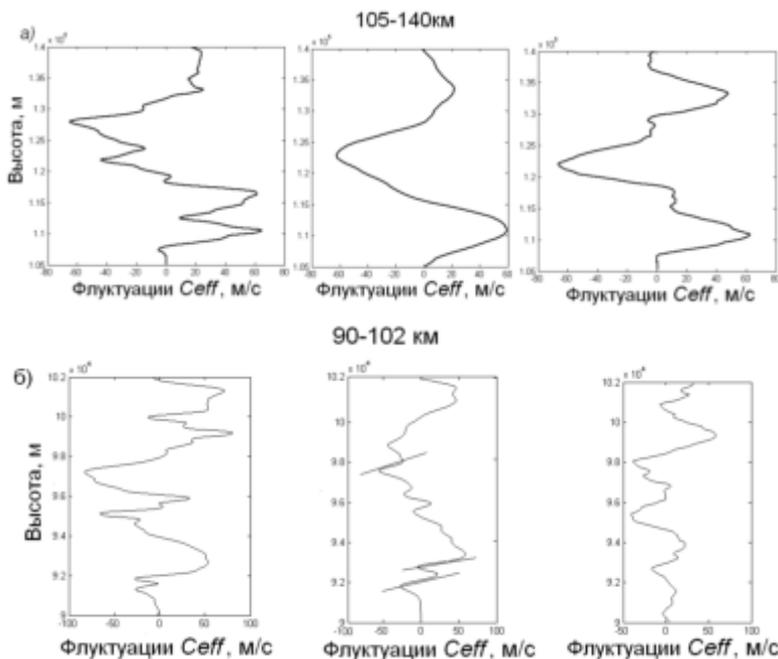


Рис. 10. Вертикальные профили флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$  в нижней термосфере, восстановленные в диапазонах высот 90–102 км и 105–140 км. Наклонными отрезками указаны слои атмосферы с экстремально большими вертикальными градиентами скорости ветра (более 1 м/с на 10 м)

скорости звука и скорости ветра, свыше 1 м/с на 10 м (указаны наклонными отрезками). Слои со столь большими вертикальными градиентами скорости ветра в мезосфере и нижней термосфере обнаруживались ранее с помощью акустического зондирования атмосферы, использующего наземные взрывы [20], и по данным ракетных измерений скорости ветра до высоты 100 км [21]. Предложенный здесь метод акустического зондирования позволяет получать данные о вертикальной структуре скорости ветра также в слое нижней термосферы 105–140 км, который практически не был доступен для других методов дистанционного зондирования атмосферы.

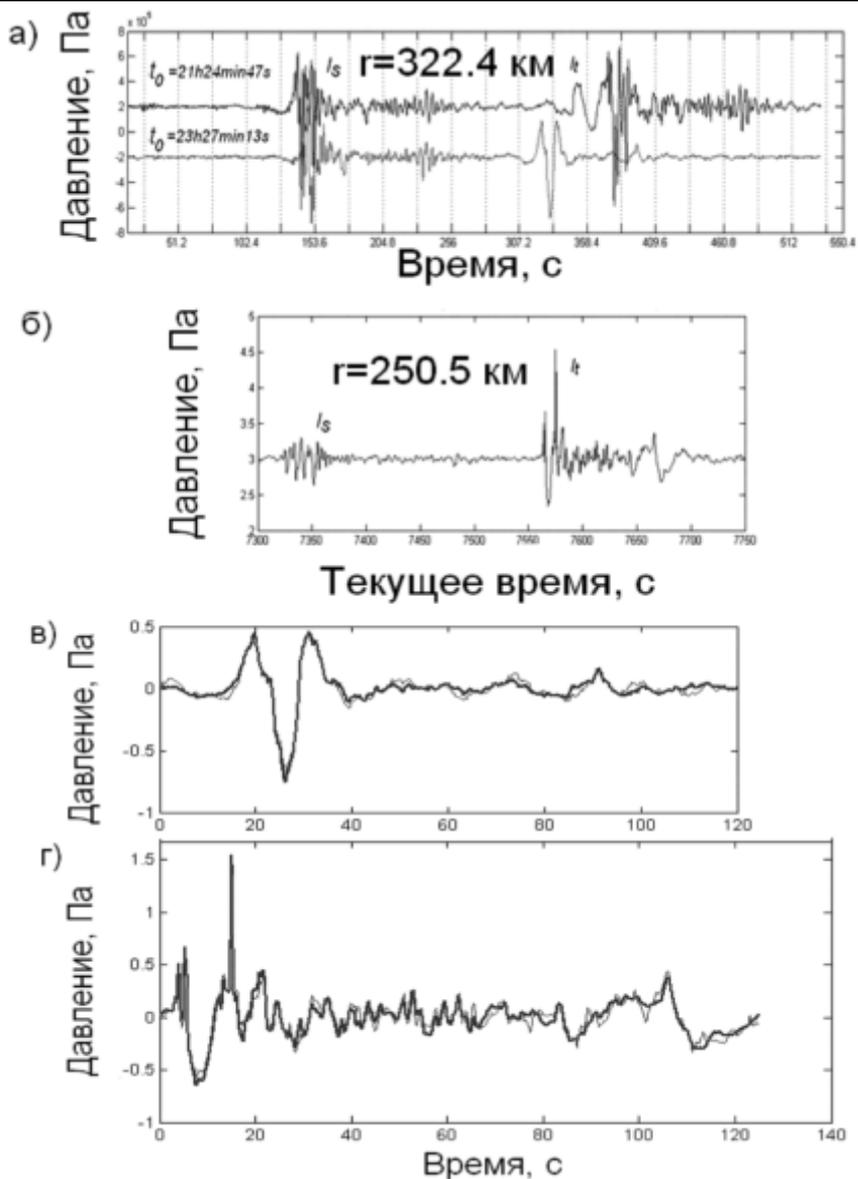
## 2.2. Вертикальный профиль флуктуаций эффективной скорости звука по данным инфразвуковых сигналов от наземных взрывов

Установленная выше связь между формой сигнала и тонкой вертикальной структурой полей скорости ветра и температуры во всем слое атмосферы, включая стратосферу, мезосферу и нижнюю термосферу, позволяет получать данные, как о временной, так и пространственной изменчивости этой структуры. Подобие сигналов от наземных взрывов мощностью порядка 30 т ТНТ, зарегистрированных в России (рис. 11а), с сигналами от вулкана в Эквадоре (рис. 11б), указывает на сохранение основных статистических характеристик вертикальной структуры поля скорости ветра в атмосфере в совершенно разных частях земного шара: вертикальных спектров (обсуждаемых ниже на рис. 15), среднеквадратичных градиентов, характерных масштабов. При отражении  $N$ -волны от неоднородного слоя нижней термосферы изменение фаз ее спектральных компонент приводит к типичным формам, а, следовательно, и частотным спектрам [9, 16], термосферных приходов от наземных взрывов и вулкана, показанным на рис. 11 в (тонкая линия) и рис. 11г (тонкая линия) соответственно.

Описанная выше методика восстановления тонкой структуры в атмосфере была применена для обработки одного из сигналов от наземных взрывов (соответствует времени регистрации 23ч 27 мин на рис. 11а). Полученные с помощью этого сигнала вертикальные профили флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$  в слое стратосферы 44–54 км и нижней термосферы 95–114 км показаны на рис. 12б и рис. 12в, соответственно, а сам возмущенный профиль  $\Delta C_{eff,0}(z_j) + \Delta C_{eff}(z_j)$  – на рис. 12а. Расчет самого отраженного сигнала от слоя нижней термосферы с восстановленным профилем флуктуаций с помощью (2) показан на рис. 11в (жирная линия). Как и в случае с сигналом от вулкана, отклонение расчетного сигнала от измеренного лежит в пределах погрешности измерений самого сигнала, что говорит о хорошем качестве восстановления профиля флуктуаций.

## 2.3. Стратосферные приходы в зоне тени от извержений вулкана Карымский на Камчатке

Сигналы, сопровождавшие извержения Карымского вулкана 2 июля 2011 г., были зарегистрированы в двух пунктах, находящихся на расстояниях 154.2 км (IS44) и 143.5 км (PRT) от вулкана (рис. 13а). Пункты регистрации располагались вдоль разных азимутальных направлений от источника, но на сравнительно небольшом расстоянии друг от друга, примерно 39.3 км. Несмотря на это, заметно отличие форм сигналов, вызванное, по-видимому, различием профилей компонент



**Рис. 11.** Сравнение сигналов от наземных взрывов мощностью порядка 30 т ТНТ, зарегистрированных в Удмуртии на расстоянии 322.4 км от источника (а, в), с сигналами от вулкана в Эквадоре (б, г)

скорости ветра вдоль разных направлений от источника к пунктам наблюдений. Наличие антенны из 4-х разнесенных приемников в пункте IS44 позволило отфильтровать сигнал на фоне турбулентных шумов в атмосфере с помощью кросс-когерентного анализа временных реализаций сигналов на всех парах приемников [22].

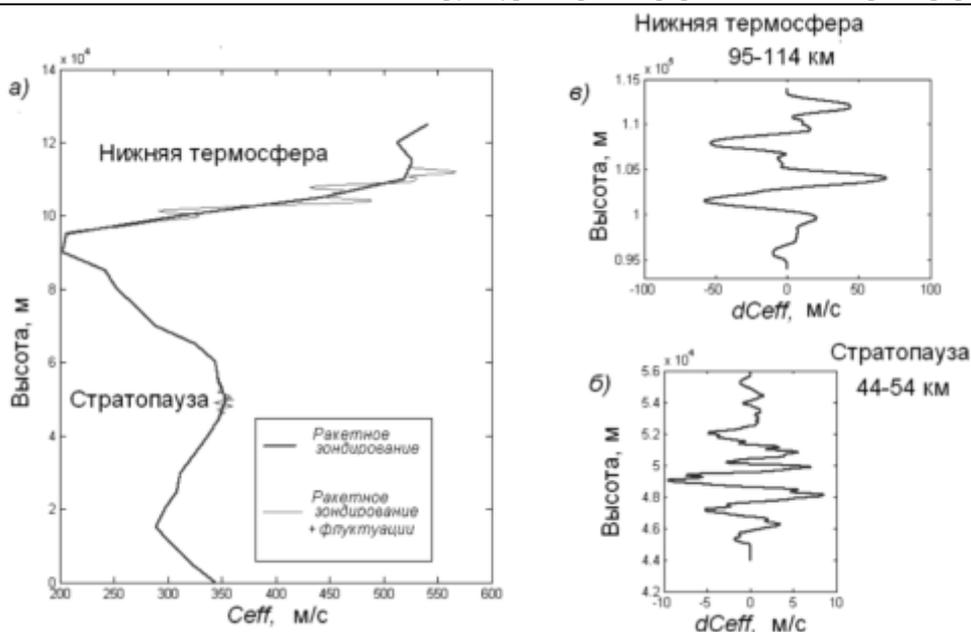
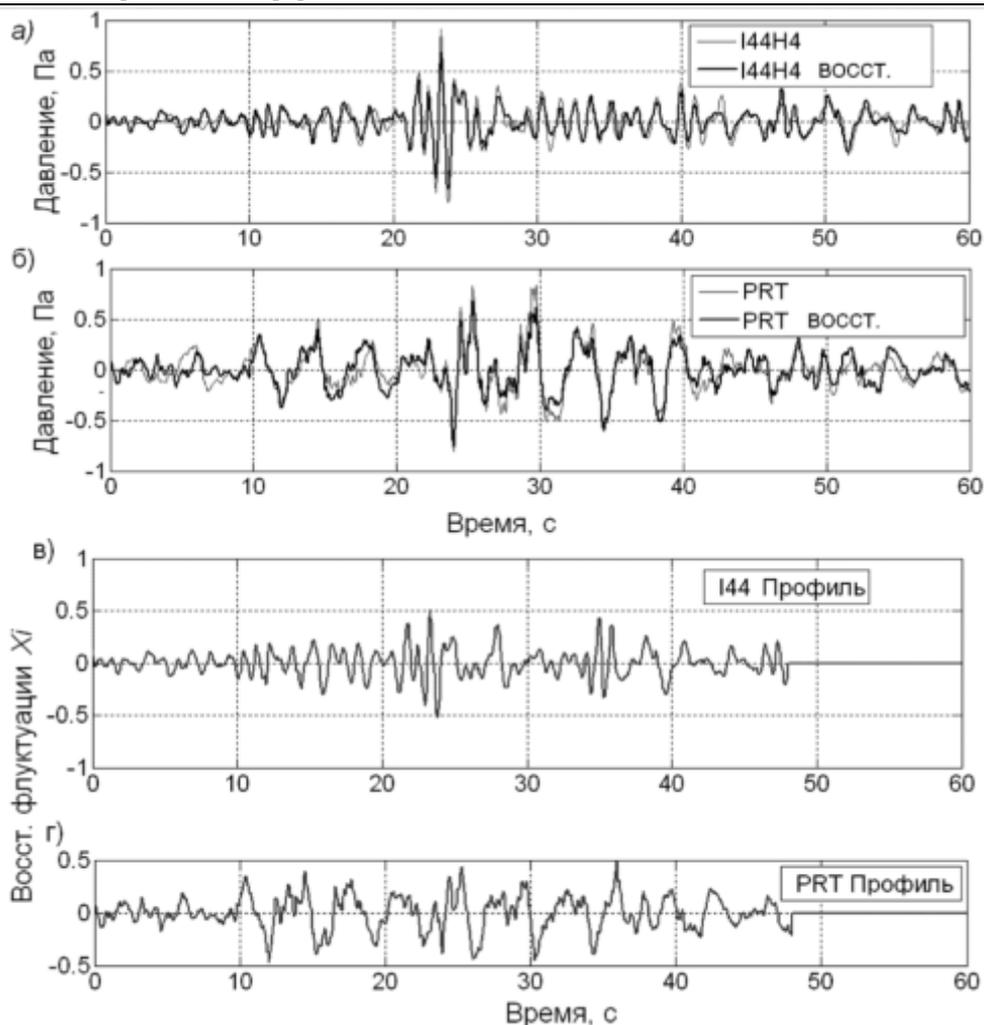


Рис. 12. Профиль  $\Delta C_{eff,0}(z_j) + \Delta C_{eff}(z_j)$  (а), возмущенный восстановленными вертикальными флуктуациями  $\Delta C_{eff}(z)$  в слое стратоспаузы 44–54 км (б) и нижней термосферы 95–114 км (в), полученный с помощью сигнала от наземного взрыва на рис. 11а, зарегистрированного 2 июня 2011 г. в 23 ч 27 мин в Удмуртии

На рис. 13б, в тонких линиях показаны зарегистрированные сигналы  $y_i$ , а соответствующие им расчетные сигналы – жирными линиями. Восстановленные флуктуации  $x_i$  на двух трассах с разными азимутами, как видно из рис. 13г, д, имеют значительные различия. Используя восстановленные флуктуации эффективной скорости звука и скорости ветра, мы обратимся теперь к анализу их спектральных характеристик.

### 3. Спектральные характеристики вертикальных флуктуаций $\Delta C_{eff}(z)$

Для анализа спектров полученных вертикальных флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$  в стратосфере, реализации  $\Delta C_{eff}(z)$  предварительно разделялись на участки длительностью 8–10 км, для которых и оценивались спектральные плотности. Участок профиля  $\Delta C_{eff}(z)$  в интересующем нас слое стратоспаузы 43–53 км, полученный из реализации флуктуаций на рис. 13в, показан на рис. 14. Соответствующий этому профилю вертикальный спектр показан на рис. 15 вместе со спектрами флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$ , восстановленных из стратосферных приходов от вулкана в Эквадоре, от вулкана Этна в Италии и наземного взрыва в Удмуртии [27]. Спектральные оценки проводились с временным окном Хамминга (“Hamming window”), составляющем  $1/4$  от длины реализации, имеющей шаг дискретизации в 10 м. По горизонтальной оси отложена линейная пространственная частота  $k_z/(2\pi)$ , где  $k_z$  – вертикальное волновое число.



**Рис. 13.** Сигналы (тонкая линия) от извержения вулкана Карымский, зарегистрированные 2 июля 2011 г. сразу в двух пунктах, I44 (а) и PRT (б), находящихся на расстояниях, соответственно, 154.2 км и 143.5 км от вулкана, но вдоль разных азимутальных направлений от него. Ниже показаны соответствующие этим сигналам восстановленные флуктуации  $x_i$  для пунктов I44 (в) и PRT (г)

Наряду с экспериментальными спектрами, для сравнения показан также и модельный вертикальный спектр  $V(k_z)$  для вертикальных флуктуаций горизонтальной компоненты скорости ветра в устойчиво-стратифицированной атмосфере (рис. 15) (пунктирная прямая), полученный в [23]. При больших вертикальных волновых числах, удовлетворяющих условию  $k_z \gg k_z^*$ , модельный спектр приобретает асимптотический вид  $V(k_z) = \beta N^2 k_z^{-3}$ , где  $k_z^* = N / (\sqrt{2}\sigma)$  – характерное вертикальное волновое число (указано стрелкой слева),  $N$  – частота Брента-Вяйсяля,  $\sigma$  – дисперсия флуктуаций горизонтальной скорости ветра, а  $\beta$  – численный коэффициент порядка 0.1. Согласно многочисленным данным радарных измерений

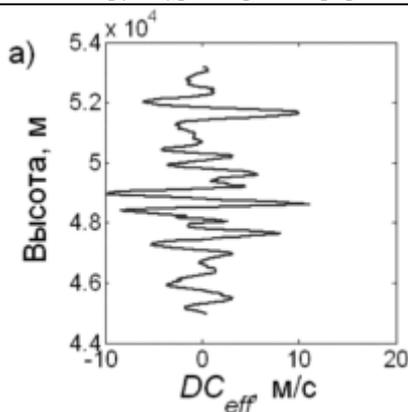


Рис. 14. Профиль флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$  в слое стратосферы 43–53 км (а), восстановленный с помощью сигнала от в. Карымский, показанного на рис. 13а

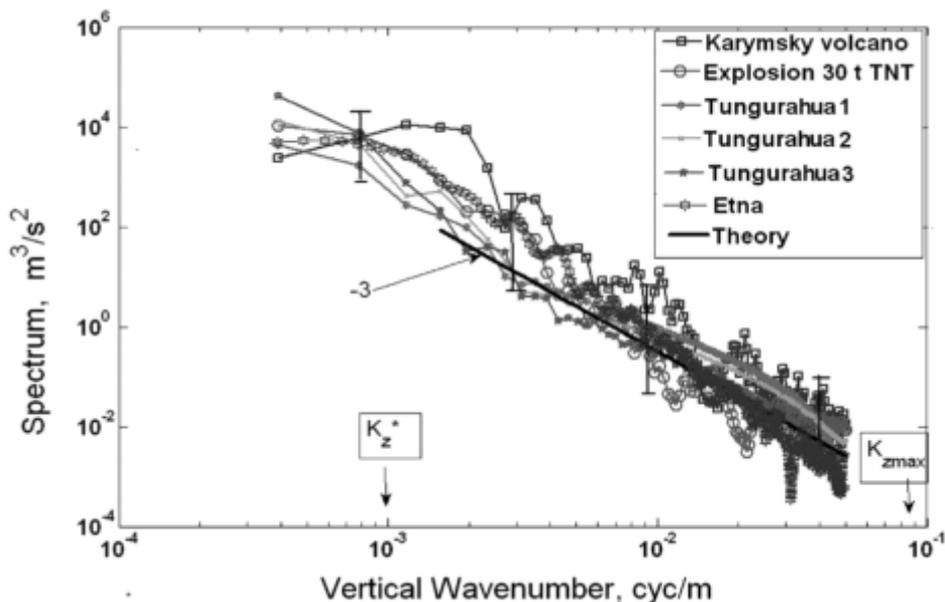


Рис. 15. Вертикальные спектры флуктуаций  $\Delta C_{eff}(z)$ , восстановленных по стратосферным приходам от в. Тунгурахи в Эквадоре (3 сигнала), в. Карымский (Камчатка), в. Этна (Италия) и наземного взрыва в Удмуртии [27]. Вертикальные волновые числа (в цикл/м) отложены по горизонтальной оси, а спектральная плотность флуктуаций – по вертикальной. Прямая линия (-3) соответствует теоретическому спектру с наклоном -3. Показаны также 95%-е доверительные интервалы спектральных оценок и характерные волновые числа, ограничивающие интервал вертикальных волновых чисел, в котором теоретический спектр спадает по степенному закону -3

[24–25] и теоретическим оценкам этого коэффициента, полученным в [23, 26],  $\beta$  лежит в интервале значений 0.1–0.3.

При  $k_z \gg k_z^*$  существенными становятся нерезонансные взаимодействия волн, которые и формируют спектральный хвост, спадающий по степенному закону  $k_z^{-3}$ .

Однако, этот хвост ограничен сверху критическим вертикальным волновым числом (указано стрелкой справа), выше которого происходит обрушение волнового поля из-за его динамической или сдвиговой неустойчивости, вследствие которой генерируется турбулентность. Взяв типичные значения для частоты Брента-Вайсяля и дисперсии флуктуаций скорости ветра в верхней стратосфере,  $N = 0.02$  рад/м и  $\sigma = 2$  м/с, учитывая при этом, что полученные здесь оценки дисперсий  $\Delta C_{eff}(z)$  близки к  $\sigma$ , мы получим, что спектральный хвост формируется флуктуациями с вертикальными масштабами от  $L^* = 2\pi / k_z^* = 1600$  м до минимального масштаба  $L_{min} = 2\pi / k_{z\ max}$  порядка 10 м.

Экспериментальные спектры на рис. 15 имеют спадающий с ростом волнового числа высокочастотный хвост, который можно аппроксимировать степенным законом  $k_z^{-p} k_z^{-p}$ , где степень  $p$  меняется примерно от 2.5 до 3.5, но в среднем близка к теоретическому значению  $p = 3$ . Естественно, что необходимо накопить значительно больше восстановленных профилей флуктуаций в верхней стратосфере, чем представлено здесь, включив разные районы земного шара и разные сезоны года, чтобы установить закономерности спадания с ростом  $k_z$  вертикальных спектров флуктуаций скорости ветра на высотах верхней стратосферы. Тем не менее, полученные здесь спектры этих флуктуаций указывают на возможность получения с помощью описанного выше метода зондирования новых данных о статистических характеристиках флуктуаций скорости ветра в верхней стратосфере и нижней термосфере.

### Заключение

С помощью новой методики акустического зондирования атмосферы, проведена реконструкция профилей вертикальных флуктуаций эффективной скорости звука и скорости ветра в стратосфере и нижней термосфере по формам и временам пробега акустических сигналов от наземных взрывов и вулканов. Сравнение профилей флуктуаций указывает на сохранение статистических характеристик вертикальной структуры атмосферы (вертикальные спектры, среднеквадратичные градиенты, масштабы) в совершенно разных частях земного шара. Это приводит к подобию форм частотных спектров отраженных сигналов от всего слоя атмосферы (примерно 30–140 км). Наблюдаемая временная изменчивость тонкой структуры поля скорости ветра объясняется нерезонансными взаимодействиями ВГВ, генерирующими как медленные флуктуации скорости ветра по сравнению с периодом Брента-Вайсяля, так и быстрые флуктуации с масштабами, сравнимыми с этим периодом.

Вертикальные спектры восстановленных флуктуаций скорости ветра в верхней стратосфере и нижней термосфере удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными спектрами этих флуктуаций в средней атмосфере, полученными по данным радарных измерений и шаропилотного зондирования [28–29]. Полученные спектры имеют высокочастотный хвост, который можно аппроксимировать степенным законом  $k_z^{-p}$ , где степень  $p$  в среднем близка к 3, как предсказывается моделью. Они указывают на возможность получения с помощью описанного здесь метода зондирования атмосферы новых данных о статистических характеристиках флуктуаций скорости ветра на высотах верхней

стратосферы и нижней термосферы, слабодоступных для других методов дистанционного зондирования.

### Литература

- [1] Дуккерт П. Распространение волн взрывов в атмосфере. М.: ГТТИ, 1934. 1981, 208 с.
- [2] Чибисов С.В. О времени пробега звукового луча в атмосфере // Изв. АН СССР: Сер. География и Геофизика. 1940. №4. С. 475–520.
- [3] Assink J.D., Waxler R., Drob D.P. On the sensitivity of infrasonic travel times in the equatorial region to the atmospheric tides // J. Geophys. Res. 2012. V. 117 (D1).
- [4] Le Pichon A., Vergoz J., Cansi Y., Ceranna L., Drob D. Contribution of infrasound monitoring for atmospheric remote sensing / Le Pichon A.; Blanc E.; Hauchecorne A. (Eds.) // *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. N.Y.: Springer, 2010. P. 629–646.
- [5] Assink J.D., Waxler R., Frazier W.G., Lonzaga J. The estimation of upper atmospheric wind model updates from infrasound data // J. Geophys. Res. 2013. V. 118(19).
- [6] Буш Г.А., Иванов Е.А., Кучаев А.В., Куличков С.Н., Педанов М.В. Об акустическом зондировании тонкой структуры верхней атмосферы // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25. №4. С. 339–347.
- [7] Чунчузов И.П., Куличков С.Н., Попов О., Вакслер Р., Ассинк Дж. Рассеяние инфразвука на анизотропных неоднородностях атмосферы // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47. № 5. С. 589–607.
- [8] Чунчузов И.П., Куличков С.Н., Фирстов П.П. Об отражениях акустической  $N$ -волны от слоистых неоднородностей атмосферы // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 3. С. 285–297.
- [9] Ostashev V.E., Chunchuzov I.P., Wilson D.K. Sound propagation through and scattering by internal gravity waves in a stably stratified atmosphere // J. Acoust. Am. 2005. V. 118. № 6. P. 3420–3429.
- [10] Куличков С.Н., Буш Г.А. Быстрые вариации инфразвуковых сигналов на больших расстояниях от однотипных взрывов // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. № 3. С. 331–338.
- [11] Авилов К.В. Псевдодифференциальные параболические уравнения распространения звука в океане, плавно неоднородном по горизонтали, и их численное решение // Акуст. журн. 1995. Т. 41, № 1. С. 5–12.
- [12] Drob D.P., Picone J.M., Garcés M. Global morphology of infrasound propagation // J. Geophys. Res. 2003. V. 108(12).
- [13] Филинов В.Н., Черный Г.П. К вопросу о возможности определения профиля скорости звука гидролокационным способом // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 761–765.
- [14] Chunchuzov I.P. On the nonlinear shaping mechanism for gravity wave spectrum in the atmosphere // Ann. Geophys. 2009. V. 27. P. 4105–4124.
- [15] Chunchuzov I., Kulichkov S., Popov O., Waxler R., Assink J. Nonlinear propagation of acoustic pulses through atmosphere with the anisotropic wind velocity and temperature nonhomogeneities // The 19th Intern. Symp. Nonl. Acoust. (ISNA2012). 2012, May 21–24. Tokyo, Japan (CD).
- [16] Kulichkov S.N. Conservation of “Acoustic Momentum” during Long-Range Infrasonic Propagation in the Atmosphere // Izvestiya, Atm. and Ocean. Phys. 2002. V. 38. N 5. P. 582–587.
- [17] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

[18] *Murayama Y., Tsuda T., Nakamura T., Kato S., Fukao S.* Seasonal Variation of Gravity Wave Activity in the Middle Atmosphere Observed with the MU RADAR // Proc. Int. Symp. Middle Atmos. Science (MAS), Tokyo, 1992. P. 24.

[19] *Kulichkov S.* On the Prospects for Acoustic Sounding of the Fine Structure of the Middle Atmosphere / Le Pichon A., Blanc E., Hauchecorne A. (Eds.) // *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. N.Y.: Springer, 2010. P. 511–540.

[20] *Fritts D.C., Williams B.P., She C.Y., Vance J.D., Rapp, Lubken F.-J., Mullemann A., Schmidlin F.J., Goldberg R.A.* Observations of extreme temperature and wind gradients near the summer mesopause during the MaCWAVE/MIDAS rocket campaign // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L24S06.

[21] *Перепелкин В.Г.* Эффекты влияния мезомасштабных неоднородностей в нижней тропосфере на дальнейшее распространение импульсных акустических сигналов. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИФА РАН, 2006. 135 с.

[22] *Chunchuzov I.P.* On the high-wavenumber form of the Eulerian internal wave spectrum in the atmosphere // *J. Atmos. Sci.* 2002. V. 59 (5). P. 1753–1772.

[23] *Smith S.A., Fritts D.C., Van Zandt T.E.* Evidence of a saturated spectrum of atmospheric gravity waves // *J. Atmos. Sci.* 1987. V. 44. P. 1404–1410.

[24] *Fritts D.C., Alexander M.J.* Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere // *Theory of the Eulerian tail in the spectra of atmospheric and oceanic internal gravity waves*. *J. Fluid. Mech.* 2001. V. 448. P. 289–313.

[25] *Chunchuzov I., Kulichkov S., Perepelkin V., Popov O., Firstov P., Assink J.D., Marchetti E.* Study of the wind velocity-layered structure in the stratosphere, mesosphere and lower thermosphere by using infrasound probing of the atmosphere // *J. Geophys. Res.* 2015. V. 120. P. 8828–8840.

[26] *Tsuda T.* Characteristics of atmospheric gravity waves observed using the MU (Middle and Upper atmosphere) radar and GPS (Global Positioning System) radio occultation // *Proc. Japn. Acad., Ser. B.* 2014. V. 90. P. 12–27.

[27] *Fritts D.C., Williams B.P., She, Vance C.Y., Rapp J.D., Lubken F.-J., Mullemann A., Schmidlin F.J., Goldberg R.A.* Observations of extreme temperature and wind gradients near the summer mesopause during the MaCWAVE/MIDAS rocket campaign // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L24S06.

## 4.2. Радиозатменное зондирование атмосфер

*М.Е. Горбунов*

*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

### Введение

В этом разделе мы приведем краткий обзор развития радиозатменного метода, начиная от зондирования атмосфер планет и заканчивая экспериментами по зондированию атмосферы Земли. Приведенный список литературы не претендует на полноту, а призван отразить ключевые моменты в развитии и применениях метода.

Принцип радиозатменного зондирования планетных атмосфер был выдвинут еще в 1960-е годы [1]. К 1967 году относятся первые работы по радиозатменному зондированию ионосферы и атмосферы Венеры [2] и атмосферы Марса [3]. Теоретическое рассмотрение задачи восстановления вертикального профиля показателя преломления в сферически-слоистой атмосфере из измерений доплеровского сдвига частоты было дано в работах 1968 года [4], [5].

Радиозатменные исследования планетных атмосфер продолжались в 1970-е годы [6]–[14]. В этих экспериментах передатчик располагался на искусственных спутниках исследуемых планет, а приемник на Земле. В 1970 году была выдвинута идея использования линий связи между искусственными спутниками планет [15]. Вопросы связи между амплитудой и фазой радиозатменных сигналов были рассмотрены в [16]. При исследовании колец Сатурна был впервые применен дифракционный метод обратного распространения [17], [18].

Первая попытка определения параметров атмосферы Земли радиозатменным методом относится к 1976 году [19]. В дальнейшем радиозатменное зондирование атмосферы Земли стало предметом ряда, как теоретических, так и экспериментальных работ. В этих работах использовались линии связи в дециметровом диапазоне между двумя искусственными спутниками Земли. Важное отличие атмосферы Земли от планетных атмосфер заключается в том, что к точности восстановления ее параметров предъявляются гораздо более жесткие требования. Кроме того, об атмосфере Земли и так имеется большой объем информации, поставляемой как спутниковыми, так и наземными системами контактного и дистанционного, активного и пассивного, лимбового и надирного зондирования. Чтобы радиозатменный метод мог успешно конкурировать с прочими методами зондирования, необходима была высокая стабильность частоты передатчика. Идея использования для этой цели спутников системы глобального позиционирования GPS была впервые выдвинута А.С. Гурвичем и Т.Г. Красильниковой в 1987 году [30] и независимо от них (поскольку английский перевод работы [30] вышел лишь в 1990 году) в 1988 году группой исследователей из Jet Propulsion Laboratory (JPL) [31]. Численное моделирование зондирования атмосферы Земли при помощи спутников GPS и систем низкоорбитальных спутников было проведено в работах [32], [33].

В 1995 году в США был проведен первый пробный (proof-of-concept) эксперимент GPS/MET (GPS Meteorology) по радиозатменному зондированию атмосферы Земли при помощи сигналов системы GPS, принимавшихся на спутнике Microlab-1. Эксперимент показал в целом очень хорошие результаты [34]–[36]. Анализ данных этого эксперимента выявил эффекты многолучевого распростра-

нения, которые существенно затрудняли интерпретацию данных наблюдений в тропосфере. Для учета этих эффектов был предложен и применен метод обратного распространения [37]–[39]. В дальнейшем данные эксперимента GPS/MET были использованы также для анализа ионосферы [40]–[43]. Объем данных, полученных в результате эксперимента GPS/MET был относительно невелик, поскольку основные измерения были проведены в течение нескольких недель, когда отключалось искусственное зашумление сигнала.

Успех эксперимента GPS/MET позволил продолжить эксперименты по радиозатменному зондированию атмосферы Земли. Следующий эксперимент стартовал в 2000 году, когда на борту спутника CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) был установлен приемник сигналов GPS. В этом эксперименте зондирование выполнялось уже на регулярной основе. Анализ данных эксперимента CHAMP привел к дальнейшему развитию методов обработки радиозатменных данных [44]–[50], в частности, автором данной монографии был разработан метод канонических преобразований [47]. В дальнейшем этот подход получил развитие [51]–[54], в результате которого были сформулированы принципы восстановления лучевой структуры волнового поля, позволяющие фактически сводить дифракционную обратную задачу к геометрооптической.

Существенным недостатком приемников, использованных в экспериментах GPS/MET и CHAMP, являлась реализованная в них система фазовой автоподстройки. Эта система неустойчиво работала в условиях сильных флуктуаций фазы и амплитуды сигнала, характерных для измерений в нижних 4 км в тропиках. Это приводило к отрицательным систематическим ошибкам измерения фазы. В силу того, что эта ошибка падала с высотой, она приводила также к отрицательной ошибке определения угла рефракции и, следовательно, индекса рефракции.

Эксперимент COSMIC (Constellation Observing System for Meteorology, Ionosphere, Climate) с улучшенной моделью приемника, работающего в режиме открытой петли, и включающий систему из 6 низкоорбитальных спутников, обсуждался, начиная с 2000 года [55]–[58]. Сам эксперимент стартовал в 2006 году [59]–[61]. Система COSMIC поставляла ежедневно до 3000 глобально распределенных зондирований атмосферы. Большой объем данных измерений позволил выполнить большое количество различных исследований, как нейтральной атмосферы, так и ионосферы [62]–[84]. Реализация режима открытой петли позволила существенно сократить систематическую ошибку восстановления индекса рефракции в тропосфере, но тем не менее не устранила ее [69], [84], [86]. В приведенных работах анализировались различные механизмы возникновения отрицательной ошибки, связанные как со сверхрефракцией, так и с флуктуациями индекса рефракции. В настоящее время ресурс системы COSMIC почти исчерпан. Разрабатывается план запуска системы COSMIC-2, включающей 12 спутников [87].

Ниже мы разберем методы интерпретации радиозатменных данных.

## **1. Показатель преломления нейтральной атмосферы**

### **1.1. Показатель преломления в приближении идеального газа**

Основной вклад в показатель преломления нейтральной атмосферы вносят сухой воздух (смесь кислорода и азота), водяной пар и углекислый газ  $\text{CO}_2$  [88], [89]. Полосы поглощения атмосферных газов, лежат не ниже микроволнового

диапазона, а в основном занимают инфракрасный и ультрафиолетовый диапазон. Поэтому, начиная от статических полей, и до частот 1–2 ГГц, показатель преломления нейтральной атмосферы можно с хорошей точностью считать независимым от частоты. Парциальные давления сухого воздуха  $P_d$ , водяного пара  $P_w$  и углекислого газа  $P_c$  с точностью около 0.1% описываются уравнением состояния идеального газа [90]:

$$P_{d,w,c} = N_{d,w,c}kT, \quad (1)$$

где  $N_d$ ,  $N_w$  и  $N_c$  – плотности числа молекул соответствующих газов,  $k$  – постоянная Больцмана, а  $T$  – абсолютная температура. В этом случае можно записать в приближении разреженного газа:

$$N = C_1 \frac{P_d}{T} + C_2 \frac{P_w}{T} + C_3 \frac{P_w}{T^2} + C_4 \frac{P_c}{T}, \quad (2)$$

где  $C_{1-4}$  – физические константы, определяемые экспериментально. Во всех уравнениях мы будем пользоваться безразмерными единицами для индекса рефракции  $N = n - 1$ . Поскольку характерное значение индекса рефракции у поверхности Земли составляет около  $3 \times 10^{-4}$  и экспоненциально падает с высотой, для представления результатов удобно измерять его также в миллионных долях (ppm), называемых также N-единицами:  $N[\text{ppm}] = 10^6(n - 1)$ . Типичное значение  $N$  у поверхности Земли равно 300 ppm. В ряде публикаций значения констант приводятся в расчете на измерение  $N$  в ppm, здесь мы умножаем их значения на  $10^{-6}$ .

Для практических целей часто используется упрощенная формула [88], [89]:

$$N = C_1 \frac{P}{T} + C_3 \frac{P_w}{T^2}, \quad (3)$$

где не учитывается различие между коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$ , и где  $P = P_d + P_w + P_c$  – полное атмосферное давление. Типичное содержание  $\text{CO}_2$  в атмосфере мало и составляет около 0.03–0.0375% (300–375 ppm), поэтому обычно его давление не учитывается непосредственно, а подбираются коэффициенты  $C_1$  и  $C_3$ , обеспечивающие наилучшую аппроксимацию экспериментальных данных в предположении фиксированного содержания  $\text{CO}_2$ . Это является хорошим приближением, поскольку общий вклад  $\text{CO}_2$  в показатель преломления составляет около 0.02% [91]. Для коэффициентов широко используются следующие значения [88]:

$$C_1 = 77.6 \times 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{гПа}}; \quad C_3 = 0.373 \frac{\text{K}^2}{\text{гПа}}. \quad (4)$$

Точность формулы (4) составляет около 0.2% [92], и этого достаточно для задач, связанных с численным прогнозом погоды. Это является причиной широкого использования этой формулы, несмотря на наличие более точных экспериментальных значений констант и более точных формул [91], [92], [93]. Однако для исследования климата точность 0.2% может оказаться недостаточной.

## 1.2. Учет сжимаемости

Для улучшения точности формулы для показателя преломления следует учесть отклонения уравнения состояния реального газа от уравнения состояния идеального газа. Существуют различные формы уравнения состояния реального газа [90]: уравнение Ван-дер-Ваальса, уравнение Бертелло, уравнение Камерлинг-

Оннеса. Для параметризации показателя преломления используют форму уравнения, которая ближе всего к последнему [92], [93]:

$$P_{d,w,c} = Z_{d,w,c} (P_{d,w,c}, T) N_{d,w,c} kT, \quad (5)$$

где  $Z_{d,w,c}$  – сжимаемость соответствующих компонент воздуха. В явном виде сжимаемость была впервые введена в формулу показателя преломления в работе [92], хотя отклонения от уравнения состояния идеального газа уже учитывались ранее [95]. Это позволяет записать формулу для показателя преломления в общей форме:

$$N = C_1 \frac{P_d}{T} Z_d^{-1} + C_2 \frac{P_w}{T} Z_w^{-1} + C_3 \frac{P_w}{T^2} Z_w^{-1} + C_4 \frac{P_c}{T} Z_c^{-1}, \quad (6)$$

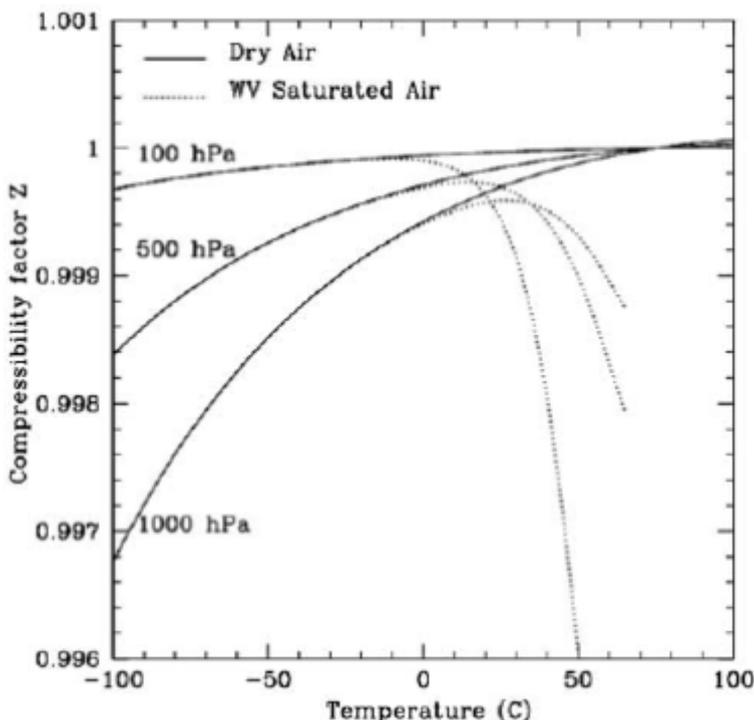


Рис. 1. Поведение сжимаемости в экстремальных условиях [93]

В [92] использованы приближенные выражения для  $Z_d$  и  $Z_w$ , полученные в [96]:

$$Z_d^{-1} = 1 + P_d \left[ 57.90 \times 10^{-3} \left( 1 + \frac{0.52}{T} \right) - 9.4611 \times 10^{-4} \frac{t}{T^2} \right], \quad (7)$$

$$Z_w^{-1} = 1 + 1650 \frac{P_w}{T^3} \left( 1 - 0.01317t + 1.75 \times 10^{-4} t^2 + 1.44 \times 10^{-6} t^3 \right),$$

где  $t = T - 273.15$  К – температура относительно  $0^\circ\text{C}$ , и численные значения коэффициентов даны для давления  $P_d$  и  $P_w$ , выраженного в гПа,  $t$  – в  $^\circ\text{C}$  и  $T$  – в К.

Следуя [91], [93], приведем оптимальные значения коэффициентов, полученные в предположении, что содержание  $\text{CO}_2$  составляет 375 ppm:

$$\begin{aligned} C_1 &= 77.6890 \times 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{гПа}}; & C_2 &= 71.2952 \times 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{гПа}}; \\ C_3 &= 0.375463 \frac{\text{K}^2}{\text{гПа}}. \end{aligned} \quad (8)$$

В полной формуле (2) для произвольного содержания  $\text{CO}_2$  значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_4$  равны:

$$C_1 = 77.6681 \times 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{гПа}}; \quad C_4 = 133.4800 \times 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{гПа}}. \quad (9)$$

Эти коэффициенты были получены на основе экспериментальных данных, поэтому они уже учитывают сжимаемость. Тем не менее, использование выражений  $P_{d,w,c} / T$  вместо  $kN_{d,w,c}$  может приводить к небольшому ухудшению точности вне диапазона условий, использованного для вычисления коэффициентов.

### 1.3. Уравнения гидростатики и состояния

Учитывать сжимаемость следует также при вычислении показателя преломления по данным моделей численного прогноза погоды для их сравнения с данными дистанционного зондирования. Модели, как правило, оперируют сеточными полями температуры и влажности, заданными на широтно-долготных сетках и на уровнях с заданным давлением или геопотенциальной высотой. Геопотенциальная высота  $H$  определяется как геометрическая высота над поверхностью уровня моря, на которой потенциал силы тяжести имел бы то же значение, что и в заданной точке, в однородном поле тяжести со стандартным ускорением  $g_0 = 9.806655 \text{ м/с}^2$ :

$$dH = \frac{g(z)}{g_0} dz, \quad (10)$$

где  $z$  – геометрическая высота над уровнем моря и  $g(z)$  – высотный профиль ускорения силы тяжести, который зависит также от географической широты и долготы. Геопотенциальная высота измеряется в геопотенциальных метрах [гп. м] или километрах [гп. км]. Это уравнение позволяет найти зависимости  $H(z)$  и  $z(H)$ , чтобы привязать поля модели к пространственным точкам.

Для вычисления давления на заданной сетке геопотенциальных высот или высот на заданной сетке давлений используется уравнение гидростатики [97]:

$$dH = -\frac{dP}{g_0 \rho(P)} \quad \text{или} \quad dP = -g_0 \rho(H) dH, \quad (11)$$

дополненное уравнением состояния. Уравнение состояния удобно переписать, введя виртуальную температуру. Обозначим через  $q_{w,c}$  удельные содержания водяного пара и углекислого газа:  $q_{w,c}$  обозначает массу соответствующей компоненты, приходящуюся на единичную массу смеси и измеряется в кг/кг. Уравнение состояния идеального газа имеет следующий вид [90]:

$$P = (\rho_d R_d + \rho_w R_w + \rho_c R_c) T, \quad (12)$$

где  $\rho_{d,w,c}$  – плотности компонент воздуха,  $R_{d,w,c}$  – их удельные газовые постоянные, равные универсальной газовой постоянной  $R$ , деленной на их молярные массы  $\mu_{d,w,c}$ . Приведем значения газовых постоянных:

$$\begin{aligned} R &= 8.3144621 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}, \\ R_d &= 287.06 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \\ R_w &= 461.52 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \\ R_c &= 188.92 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выразим плотности компонент через их удельные содержания и общую плотность смеси  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \rho_d &= \rho(1 - q_w - q_c), \\ \rho_{w,c} &= \rho q_{w,c}. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение состояния можно теперь переписать в форме уравнения состояния сухого воздуха:

$$P = \rho R_d \left( 1 + q_w \frac{R_w - R_d}{R_d} + q_c \frac{R_c - R_d}{R_d} \right) T \equiv \rho R_d T_v, \quad (15)$$

где  $T_v$  – виртуальная температура, которую можно определить для любого количества компонент воздушной смеси:

$$T_v = \left( 1 + \sum_i q_i \frac{R_i - R_d}{R_d} \right) T. \quad (16)$$

Несложно включить в это определение жидкие или твердые аэрозольные частицы (например, капельная вода или кристаллы льда в облаках): поскольку они не дают вклада в атмосферное давление, их формальные газовые постоянные следует положить равными 0. Содержанием  $\text{CO}_2$  мы будем чаще всего пренебрегать.

Получим выражение для парциального давления водяного пара:

$$P_w = q_w \rho R_w T = q_w \frac{R_w}{R_d} \rho R_d T = \frac{P q_w}{\frac{R_d}{R_w} + \sum_i q_i \frac{R_i - R_d}{R_w}}. \quad (17)$$

Если можно пренебречь вкладом всех дополнительных компонент воздушной смеси, кроме водяного пара, то эту формулу можно переписать в виде:

$$P_w = \frac{P q_w}{\frac{R_d}{R_w} + q_w \frac{R_w - R_d}{R_w}}. \quad (18)$$

Часто используется относительная влажность воздуха  $r_w$ , равная отношению парциального давления водяного пара к давлению насыщенного водяного пара. В этом случае можно воспользоваться формулой Антуана для давления насыщенного пара, являющейся следствием уравнения Клапейрона–Клаузиуса [93]:

$$P_w = r_w P_0 \exp\left(\frac{17.27T^\circ\text{C}}{237.3 + T^\circ\text{C}}\right), \quad (19)$$

где  $P_0 = 6.11$  гПа – давление насыщенного водяного пара при  $0^\circ\text{C}$ ,  $T^\circ\text{C} = T - 273.16$  – температура в градусах Цельсия. Если  $r_w$  выражено в процентах, то в правой части следует добавить множитель 0.01. Из формулы (18) получим выражение для  $q_w$ :

$$q_w = \frac{P_w}{P \frac{R_w}{R_d} - P_w \frac{R_w - R_d}{R_d}}. \quad (20)$$

Формулы (18) – (20) позволяют пересчитывать  $q_w$  в  $r_w$  и обратно.

Пользуясь уравнением состояния, можно переписать уравнение гидростатики в замкнутой форме, допуская численное интегрирование:

$$dH = -\frac{R_d T_v(P)}{g_0} d \ln P \quad \text{или} \quad d \ln P = -\frac{g_0}{R_d T_v(H)} dH. \quad (21)$$

#### 1.4. Приближенный учет сжимаемости

Поскольку эффект сжимаемости мал, его можно учесть в первом порядке, введя единый для всех газов фактор сжимаемости  $Z(P, T, q_w)$  [93]. Абсолютная точность величины  $Z - 1$  должна быть около  $10^{-4}$ . Поскольку  $Z - 1$  имеет значение около  $10^{-3}$ , то достаточно невысокой относительной точности около 10%. Уравнение состояния можно записать следующим образом:

$$P = \rho R_d T_v Z(P, T, q_w). \quad (22)$$

Тогда уравнение гидростатики можно переписать в следующей форме:

$$dH = -\frac{R_d T_v(P) Z(P, T(P), q_w(P))}{g_0} d \ln P; \quad (23)$$

$$dP = -\frac{g_0 P(H)}{R_d T_v(H) Z(P(H), T(H), q_w(H))} dH.$$

Для  $Z$  было найдено следующее эмпирическое выражение [98], [99]:

$$Z = 1 - \frac{P}{T} \left[ a_0 + a_1 T^\circ\text{C} + a_2 (T^\circ\text{C})^2 + (b_0 + b_1)x + (c_0 + c_1)x^2 \right] + \frac{P^2}{T^2} (d + ex^2), \quad (24)$$

где  $x$  – молярная доля водяного пара:

$$x = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_d \mu_d + \rho_w \mu_w} = \frac{q_w \mu_w}{\mu_d + q_w (\mu_w - \mu_d)}, \quad (25)$$

а коэффициенты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.58123 \times 10^{-4} \text{ К гПа}^{-1}; & a_1 &= 2.9331 \times 10^{-6} \text{ гПа}^{-1}; \\ a_2 &= 1.1043 \times 10^{-8} \text{ К}^{-1} \text{ гПа}^{-1}; \\ b_0 &= 5.707 \times 10^{-4} \text{ К гПа}^{-1}; & b_1 &= 2.051 \times 10^{-6} \text{ гПа}^{-1}; \\ c_0 &= 1.9898 \times 10^{-2} \text{ К гПа}^{-1}; & c_1 &= 2.376 \times 10^{-4} \text{ гПа}^{-1}; \\ d &= 1.83 \times 10^{-7} \text{ К}^{-2} \text{ гПа}^{-2}; & e &= 0.765 \times 10^{-4} \text{ К}^{-2} \text{ гПа}^{-2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Примеры поведения сжимаемости в зависимости от температуры, давления и влажности, включая экстремальные метеорологические условия, приведены на рис. 1. Для температур от  $-30$  до  $-30^\circ\text{C}$  сжимаемость лежит между 0.999 и 1.

Учет сжимаемости уменьшает систематические отклонения между данными дистанционного зондирования атмосферы и данными оперативного прогноза примерно на 0.1% [93].

### 1.5. Вклад капельной воды и кристаллов льда

До сих пор мы рассматривали лишь вклад атмосферных газов в показатель преломления. Влиянием облачности, содержащей капельную воду и кристаллы льда, чаще всего пренебрегают. В ряде случаев сильная конвекция может приводить к появлению облаков с большим содержанием кристаллов льда, которые вносят заметный вклад в показатель преломления [100], [101]. Формулу для показателя преломления следует дополнить членами, описывающими влияние капелек воды и кристаллов льда:

$$N = C_1 \frac{P_d}{T} + C_2 \frac{P_w}{T} + C_3 \frac{P_w}{T^2} + C_4 \frac{P_c}{T} + C_{LWC} W_{LWC} + C_{IWC} W_{IWC}, \quad (27)$$

где  $W_{LWC}$  – содержание капельной воды в  $\text{кг}/\text{м}^3$  (LWC – liquid water content),  $W_{IWC}$  – содержание кристаллов льда (IWC – ice water content). Согласно [102], на частоте 1.5 ГГц (длина волны 20 см) комплексные показатели преломления воды и льда равны:

$$\begin{aligned} n_{\text{water}} &= 9.3 - 0.73i, \\ n_{\text{ice}} &= 1.78 - 0.009i. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда, пользуясь можно записать [103]:

$$\begin{aligned} C_{LWC} &= \frac{3}{2\rho_{\text{water}}} \operatorname{Re} \left( \frac{n_{\text{water}}^2 - 1}{n_{\text{water}}^2 + 2} \right), \\ C_{IWC} &= \frac{3}{2\rho_{\text{ice}}} \operatorname{Re} \left( \frac{n_{\text{ice}}^2 - 1}{n_{\text{ice}}^2 + 2} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Плотность воды равна  $\rho_{\text{water}} = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Плотность льда при  $0^\circ\text{C}$  составляет  $\rho_{\text{ice}} = 920 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Это приводит к следующим значениям коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_{LWC} &= 1.45 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}; \\ C_{IWC} &= 0.69 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}. \end{aligned} \quad (30)$$

Содержание льда в облаках в условиях сильной конвекции на высотах до 12 км может достигать  $0.6 \text{ г}/\text{м}^3$ , что соответствует величине показателя преломления около 0.2 ppm, что соответствует ошибке около 0.25%.

Вклад разных факторов в показатель преломления исследовался в [[103]], где, показано, что вклад капельной воды в показатель преломления может составлять при затяжном дожде до 2 ppm, а при проливном дожде до 15 ppm. Град может давать вклад в показатель преломления до 7 ppm, а снег 0.75 ppm. Песчаная буря может дать значимый вклад в показатель преломления до 18 ppm, однако этот эффект может наблюдаться лишь в самой нижней тропосфере.

### 1.6. Зондирование на крыле линии поглощения водяного пара

Показатель преломления нейтральной атмосферы вплоть до частот системы GPS практически не зависит от частоты. С другой стороны, показатель прелом-

ления является функцией как минимум трех метеопараметров: температуры, давления и влажности. При зондировании атмосферы при помощи сигналов GPS восстанавливается, прежде всего, высотная зависимость, или профиль, показателя преломления. Восстановленный профиль дополняют уравнением гидростатики. Если рассматривать сухую атмосферу, то получатся два уравнения для двух неизвестных функций, температуры и давления, которые можно определить. Однако если вкладом влажности в показатель преломления нельзя пренебречь, то однозначно восстановить три метеопараметра без привлечения дополнительной информации не удастся. Возможные решения этой проблемы при зондировании на частотах GPS будут обсуждаться в дальнейших главах. Наиболее радикальное решение состоит в переходе к зондированию на более высоких частотах, на которых у показателя преломления появляется заметная зависимость от частоты и мнимая часть [104], [105]. В частности, для того, чтобы обеспечить восстановление влажности, можно выбрать частоты на крыле упоминавшейся линии поглощения водяного пара 22 ГГц. В качестве такого набора частот рассматривались 9, 13, 17, 22 ГГц.

### 1.7. Модель распространения миллиметровых волн

Показатель преломления на частотах до 1000 ГГц (1 ТГц) описывается моделью распространения миллиметровых волн (MPM – Millimeter-wave Propagation Model) [106], [107], [108]. Эта модель учитывает линии молекулярного кислорода, водяного пара и озона, а также поглощение за счет капельной воды и частиц льда. Вклад кислорода описывается 44 линиями. В частности, модель MPM описывает важную полосу поглощения вблизи 60 ГГц (5 мм), обладающую тонкой структурой и представленную как система большого числа отдельных линий от 50.47 ГГц до 68.96 ГГц. Вклад водяного пара описывается 34 линиями от 22.235 ГГц до 987.93 ГГц и непрерывным спектром, описываемым как крыло псевдолинии на 1.8 ТГц. Вклад озона описывает одной линией 195.43 ГГц. Показатель преломления представляется в виде недиспергирующей и диспергирующей частей. Недиспергирующая часть была рассмотрена выше.

Диспергирующая часть, связанная с молекулярным кислородом, описывается формулой:

$$N_{O_2}(f) = \sum_j S_{O_2}(f_j) F(f_j, f) + N_n(f), \quad (31)$$

где  $f = \omega / 2\pi$  – частота  $S_{O_2}(f_j)$  – интенсивность  $j$ -й линии,  $F_j(f)$  – форма линии,  $N_n$  – нерезонансный член. Сила линий задается формулой:

$$S_{O_2}(f_j) = 10^{-6} \frac{a_1}{f_j} P_d \theta^3 \exp(a_2(1-\theta)), \quad (32)$$

где  $\theta = \frac{300K}{T}$  – обратная температура. Здесь и далее давление измеряется в гПа,

и  $a_i$  – набор эмпирических коэффициентов. В качестве формы линии  $F_j(f)$  используется форм-фактор Розенкранца [[109], [110]]:

$$F(f_j, f) = v \left( \frac{1 - i\delta_j}{f_j - f - i\gamma_j} + \frac{1 + i\delta_j}{f_j + f + i\gamma_j} \right), \quad (33)$$

где  $f_j$  – частота линии,  $\gamma_j$  – параметр ширины линии, равный

$$\gamma_j = 10^{-3} a_3 (P_d \theta^{a_4} + 1.10 P_w \theta), \quad (34)$$

а  $\delta_j$  – интерференционный коэффициент, учитывающий влияние на данную линию всех остальных линий:

$$\delta_j = (a_5 + a_6 \theta) P \theta^{0.8} \quad (35)$$

Нерезонансный член равен:

$$N_n(f) = S_{O_2} F_{O_2}(f) + i S_{N_2} F''_{N_2}(f), \quad (36)$$

где первый член представляет собой вклад молекулярного кислорода:

$$S_{O_2} = 6.14 \times 10^{-11} P_d \theta^2, \quad (37)$$

$$F_{O_2}(f) = -\frac{f}{f + i 0.56 \times 10^{-3} P \theta^{0.8}},$$

а второй член описывает малый вклад молекулярного азота, проявляющийся выше 100 ГГц:

$$S_{N_2} = 1.40 \times 10^{-18} P_d^2 \theta^{3.5}, \quad (38)$$

$$F''_{N_2}(f) = \frac{f}{1 + 1.9 \times 10^{-5} f^{1.5}}.$$

Этот член связан с деформацией электронных оболочек у молекул азота вследствие столкновений, что приводит к возникновению у них небольшого дипольного момента. Размерные параметры даны для частот в ГГц и давления в гПа.

Диспергирующая часть индекса рефракции, связанная с водяным паром, описывается формулой:

$$N_{H_2O}(f) = \sum_j S_{H_2O}(f_j) F(f_j, f) + N_c(f), \quad (39)$$

где интенсивности линий выражаются следующим образом:

$$S_{H_2O}(f_j) = 10^{-6} \frac{b_1}{f_j} P_w \theta^{3.5} \exp(b_2(1-\theta)), \quad (40)$$

$F(f_j, f)$  – форм-фактор Розенкранца (33), в котором интерференционный коэффициент считается нулевым  $\delta_j = 0$ , а параметр ширины линий равен

$$\gamma_j = 10^{-3} b_3 (b_4 P_w \theta^{b_6} + P_w \theta^{b_5}). \quad (41)$$

Для давлений ниже 0.7 гПа учитывается также доплеровское уширение линий

$$\gamma_D = 1.46 \times 10^{-6} f \theta^{-1/2}, \quad (42)$$

и полная ширина линий принимается равной

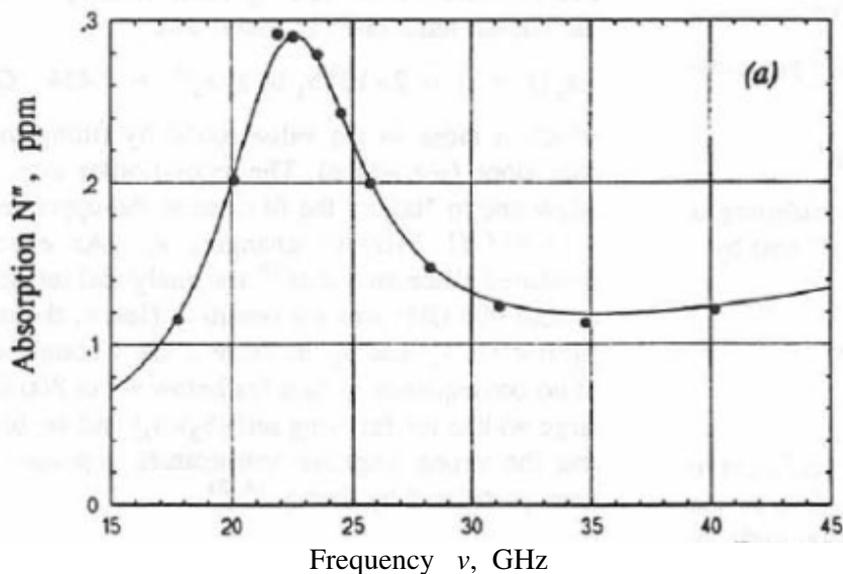
$$\gamma_j^* = 0.535 \gamma_j + \sqrt{0.217 \gamma_j^2 + \gamma_D^2}. \quad (43)$$

Для непрерывного спектра водяного пара  $N_c(f)$  используется приближенное выражение, основанное на форм-факторе Розенкранца для псевдо-линии 1780 ГГц.

Для учета вклада капельной воды используется формула  $C_{LWC} W_{LWC} + C_{IWC} W_{IWC}$ , где  $C_{LWC}$  и  $C_{IWC}$  описываются формулой (29). Частотно-зависимая относительная диэлектрическая проницаемость воды описывается эмпирической формулой [111]:

$$\epsilon_{\text{water}} = \epsilon_{\text{water}}^{(0)} - f \left( \frac{\epsilon_{\text{water}}^{(0)} - \epsilon_{\text{water}}^{(1)}}{f + i \gamma_{\text{water}}^{(1)}} + \frac{\epsilon_{\text{water}}^{(1)} - \epsilon_{\text{water}}^{(2)}}{f + i \gamma_{\text{water}}^{(2)}} \right), \quad (44)$$

где



**Рис. 2.** Частотная зависимость мнимой части показателя преломления в окрестности линии водяного пара 22 ГГц для температуры 318 К, давления 1013 ГПа и относительной влажности 80%

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{water}}^{(0)} &= 77.66 + 103.3(\theta - 1), \\ \varepsilon_{\text{water}}^{(1)} &= 0.0671 \varepsilon_{\text{water}}^{(0)},\end{aligned}\quad (45)$$

$$\varepsilon_{\text{water}}^{(2)} = 3.52,$$

$$\gamma_{\text{water}}^{(1)} = 20.20 - 146(\theta - 1) + 316(\theta - 1)^2, \quad (46)$$

$$\gamma_{\text{water}}^{(2)} = 39.8 \gamma_{\text{water}}^{(1)}.$$

Для относительной диэлектрической проницаемости льда используется следующая эмпирическая формула [112]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{ice}} &= 3.15 + i \left( \frac{a_{\text{ice}}}{f} + b_{\text{ice}} f \right), \\ a_{\text{ice}} &= (\theta - 0.171) \exp(17.0 - 22.1\theta), \\ b_{\text{ice}} &= 10^{-5} \left[ \left( \frac{0.233\theta}{\theta - 0.993} \right)^2 + \frac{6.33}{\theta} - 1.31 \right].\end{aligned}\quad (47)$$

На рис. 2 приведен пример частотной зависимости мнимой части показателя преломления в окрестности линии водяного пара 22 ГГц.

## 2. Интегрирование уравнений геометрической оптики

### 2.1. Вычисление лучей, фазы и амплитуды

Рассмотрим методы численной реализации приближения геометрической оптики. Удобство геометрической оптики состоит в том, что для вычисления фазы

в заданной точке при однолучевом распространении достаточно вычислить всего один луч, а для вычисления амплитуды необходимо вычислить малую или бесконечно малую лучевую трубку. Однако геометрическая оптика обладает и рядом неудобств. Они проявляются в задачах, связанных с появлением каустик и многолучевого распространения. Проблема состоит не только в том, что на каустиках нарушаются условия применимости геометрической оптики. При вычислении поля в заданной точке в многолучевой зоне необходимо найти все лучи, приходящие в эту точку, что может потребовать значительного объема вычислений, поскольку число лучей заранее неизвестно. Эту трудность можно обойти, вычисляя пучок лучей, излучаемых источником, достаточно широкий, чтобы покрыть заданную область и достаточно плотный, чтобы можно было интерполировать амплитуду и фазу. В этом случае можно определять число лучей в каждой точке и суммировать поля разных лучей в многолучевых областях.

Напомним, что в геометрической оптике решение ищется в виде

$$u(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\exp(ik\Psi(\mathbf{x})), \quad (48)$$

где волновое поле  $u(\mathbf{x})$  можно рассматривать как в области, так и в окрестности одной бесконечно малой лучевой трубки. Амплитуда  $A(\mathbf{x})$  представляется в виде:

$$A(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\sqrt{\mu_I(\mathbf{x})}. \quad (49)$$

Лучи и эйконал задаются гамильтоновой системой:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \dot{\Psi} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}, \quad (50)$$

которую можно интегрировать для одного отдельно взятого луча. Плотность меры  $\mu_I(\mathbf{x})$  определяется уравнением сохранения меры относительно лучевой динамики:

$$L_{\mathbf{V}(H)}\left(i^* \mu_I dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\right) = 0, \quad (51)$$

что эквивалентно уравнению:

$$\dot{\mu}_I dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + \mu_I \sum_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^i \wedge \dots \wedge dx^n = 0, \quad (52)$$

Дополнительный амплитудный множитель  $\varphi(\mathbf{x})$  описывается уравнением переноса:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{p}} \varphi. \quad (53)$$

Для скалярного волнового уравнения Гельмгольца гамильтониан и уравнения лучей имеют вид [113]:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{x})), \quad (54)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = n\nabla n, \quad \dot{\Psi} = n^2,$$

и соответствующий параметр лучевой траектории определяется соотношением  $d\tau = ds / n$ .

В определении меры  $\mu_I(\mathbf{x})$  и амплитудного множителя  $\varphi(\mathbf{x})$  присутствует произвол: функцию  $\varphi(\mathbf{x})$  можно умножить на произвольный ненулевой постоянный множитель  $\alpha$ , а меру  $\mu_I(\mathbf{x})$  умножить на  $\alpha^{-2}$ , и при этом амплитуда  $A(\mathbf{x})$  не изменится. Можно договориться о каком-либо определении плотности меры, а начальные условия включать в множитель  $\varphi(\mathbf{x})$ .

Рассмотрим решение задачи, в которой заданы начальная точка и начальное направление луча. Для определения траектории луча и фазы необходимо численно интегрировать гамильтонову систему (50), например, методом Рунге–Кутты [114], [115] или методом дробных шагов [116]. Такое вычисление фазы не учитывает каустических добавок. Вычисляя только один луч, невозможно определить, касался ли он каустика. Для этого необходимо вычислить малую лучевую трубку. Это позволит также вычислить амплитуду.

Простейший способ вычисления лучевой трубки использует конечные разности. Достаточно задать четыре близкие начальные точки  $\mathbf{x}_{0-3}(0)$  и соответствующие начальные импульсы  $\mathbf{p}_{0-3}(0)$ , и рассмотреть эволюцию элемента объема  $\delta V(\tau)$ , натянутого на вектора  $\delta \mathbf{x}_i(\tau) = \mathbf{x}_i(\tau) - \mathbf{x}_0(\tau)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и равного  $(\delta \mathbf{x}_1(\tau), [\delta \mathbf{x}_2(\tau), \delta \mathbf{x}_3(\tau)])$ . Начальные точки должны выбираться так, чтобы элемент объема, натянутый на векторы  $\delta \mathbf{x}_i(0)$  был ненулевым. Начальные импульсы должны соответствовать заданной исходной лучевой конфигурации падающего волнового поля. Это потребует интегрирования уравнений для четырех лучей. Достаточно, однако, вычислять лишь три луча, поскольку можно положить  $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_0(0 + \delta\tau)$ , и  $\mathbf{p}_1(0) = \mathbf{p}_0(0 + \delta\tau)$ , где  $\delta\tau$  – достаточно малый фиксированный шаг по параметру луча. В этом случае:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(\tau) &= \mathbf{x}_0(\tau + \delta\tau), \\ \mathbf{p}_1(\tau) &= \mathbf{p}_0(\tau + \delta\tau), \\ \delta \mathbf{x}_1(\tau) &= \dot{\mathbf{x}}\delta\tau = \frac{d\mathbf{x}}{ds} n(\mathbf{x}) \delta\tau, \end{aligned} \quad (55)$$

где  $ds$  – элемент длины луча,  $d\mathbf{x} / ds$  – единичный вектор направления луча, и мы учли, что  $d\tau = ds / n$ . В этом случае элемент объема равен:

$$\delta V(\tau) = \left( \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{ds}, [\delta \mathbf{x}_2(\tau), \delta \mathbf{x}_3(\tau)] \right) n(\mathbf{x}) \delta\tau = n(\mathbf{x}(\tau)) \delta\sigma(\tau) \delta\tau, \quad (56)$$

где  $\delta\sigma$  – площадь перпендикулярного сечения лучевой трубки. В этом случае плотность меры задается в виде:

$$\begin{aligned} \mu_I(\tau) &= \sqrt{\frac{n(\mathbf{x}(0)) \delta\sigma(0)}{n(\mathbf{x}(\tau)) \delta\sigma(\tau)}}, \\ \delta\sigma(\tau) &= \left( \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{ds}, [\delta \mathbf{x}_2(\tau), \delta \mathbf{x}_3(\tau)] \right). \end{aligned} \quad (57)$$

В таком определении всегда  $\mu_I(0) = 1$ , и  $\varphi(0)$  равно начальному условию для амплитуды поля. При интегрировании уравнений лучей необходимо следить за эволюцией лучевой трубки и определять ее перегибы, соответствующие каустикам. В таких точках к фазе добавляется каустический сдвиг.

Недостаток метода конечных разностей состоит в необходимости вычислять малые разности координат, которые определяются с численными погрешностями. Это может приводить к потере разрядов. Вместо вычисления конечных разностей можно интегрировать линеаризованную гамильтонову систему для вариаций  $\delta \mathbf{x}_{2,3}$  и  $\delta \mathbf{p}_{2,3}$ :

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \otimes \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \otimes \partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p}, \quad (58)$$

$$\delta \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x},$$

где все производные гамильтониана вычисляются на невозмущенной траектории  $\mathbf{x}(\tau)$ . Начальное условие задается в следующем виде:

$$\delta \mathbf{p}_{2,3}(0) = \frac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{x}} \delta \mathbf{x}_{2,3}(0), \quad (59)$$

где  $d\mathbf{p} / d\mathbf{x}$  вычисляется для заданной исходной лучевой конфигурации падающего поля. Недостаток этого метода состоит в том, что он требует вычисления вторых производных поля показателя преломления, что может представлять вычислительные трудности в случае моделирования атмосферы на основе заданных сеточных полей метеопараметров. В любом случае, первые производные поля показателя преломления необходимы для решения уравнений геометрической оптики, тогда как уравнение Гельмгольца включает только показатель преломления.

Приведенные определения даны для случая задания начальных условий на некоторой поверхности. Если имеется точечный источник в среде, то его мы окружим достаточно малой сферой, внутри которой среду можно считать однородной, и поле соответствует сферической волне. На этой сфере зададим начальные условия.

Приведенные уравнения относятся, прежде всего, к нейтральной атмосфере. Геометрооптическое описание распространения волн в анизотропной среде, какой является ионосфера, существенно сложнее [117]–[120]. Как мы видели, в ионосфере поле представляется в виде суммы мод, соответствующих обыкновенной и необыкновенной волне. Если в однородной анизотропной среде, эти волны не взаимодействуют, то в неоднородной среде это уже не так. Если направление оси анизотропии неоднородно, то поляризация мод будет разной в разных точка пространства. Поэтому каждая мода, распространяясь, будет постоянно расщепляться на новые локальные моды. Для распространения волн, излучаемых системами глобальной спутниковой навигации в дециметровом диапазоне, эффекты анизотропии слабы, и можно пользоваться стандартными геометрооптическими уравнениями.

## 2.2. Методы возмущений в геометрической оптике

Методы возмущений основаны на линеаризации геометрооптических уравнений по отношению к малым возмущениям поля показателя преломления. Пусть задана вариация функции Гамильтона  $\delta H$ , понимаемая как вариация формы функции при фиксированных аргументах. Пусть имеются решения для лучей  $\mathbf{x}_0(\tau)$ ,  $\mathbf{p}_0(\tau)$  в невозмущенной среде с исходной функцией Гамильтона  $H$ . Запишем уравнения для малых возмущений лучей  $\delta \mathbf{x}(\tau)$ ,  $\delta \mathbf{p}(\tau)$  в рамках первого порядка теории возмущений:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \otimes \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p} \otimes \partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \delta H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (60)$$

$$\delta \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \frac{\partial \delta H}{\partial \mathbf{x}},$$

где все функции в правой части вычисляются вдоль невозмущенных лучей  $\mathbf{x}_0(\tau)$ ,  $\mathbf{p}_0(\tau)$ . Эти уравнения представляют собой линейную неоднородную систему из шести дифференциальных уравнений первого порядка. Для этой системы можно формулировать как задачу с начальными условиями, так и задачу с закрепленными концами (нахождение луча между двумя заданными точками). Решение этой системы задает вариации траекторий в виде линейного оператора от вариации функции Гамильтона  $\delta H$ .

Помимо теории возмущений для лучей, можно строить теорию возмущений для эйконала. Рассмотрим вариацию действия в окрестности невозмущенных лучей:

$$\delta S = \delta \int_a^b (\mathbf{p} \dot{\mathbf{x}} - H) d\tau = - \int_a^b \delta H d\tau. \quad (61)$$

Здесь остается лишь член, связанный с вариацией формы функции Гамильтона. Остальные члены равны вариации невозмущенного действия в окрестности невозмущенного луча и должны давать в сумме нуль в силу вариационного принципа Ферма. Величина  $\delta S$  равна вариации эйконала  $\delta \Psi$ . В частности, для гамильтониана (54) имеем простое выражение для возмущения эйконала:

$$\delta \Psi = \int n \delta n d\tau = \int \delta n ds, \quad (62)$$

где интеграл берется вдоль невозмущенного луча.

Рассмотрим вычисление вариации направления прихода луча в заданную точку при варьировании поля показателя преломления. Как показано в [121], применение теории возмущений для лучей и для эйконала приводит к тождественно равным ответам. Это связано с тем, что применение теории возмущений для эйконала неотделимо от лучевых представлений. Рассмотрим невозмущенный луч  $\mathbf{x}_0(s)$ , который здесь будет удобнее параметризовать длиной дуги  $s$ . Существует бесконечно много различных способов параметризовать возмущенную траекторию. Мы будем представлять возмущение траектории в форме:

$$\delta \mathbf{x}(s) = \mathbf{e}_1(s) \delta x_1 + \mathbf{e}_2(s) \delta x_2, \quad (63)$$

где  $\mathbf{e}_{1,2}(s)$  – базисные векторы в плоскости, перпендикулярной направлению невозмущенного луча  $\dot{\mathbf{x}}_0(s)$ . Для вычисления возмущения направления прихода луча необходимо вычислить производную возмущения эйконала в конечной точке луча по направлениям  $\mathbf{e}_{1,2}(s)$ . Поскольку возмущение эйконала представляется интегралом (62) по невозмущенным лучам, для решения задачи необходимо рассмотреть веер невозмущенных лучей, исходящих из источника. Эти лучи мы будем рассматривать как возмущения исходного луча вследствие малой вариации начального направления. Параметр  $s$  для возмущенных лучей уже не будет длиной дуги. Вычислим элемент длины дуги возмущенного луча

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0(s) + \delta \mathbf{x}(s) \quad (64)$$

в первом порядке теории возмущений:

$$|\dot{\mathbf{x}}| ds = \left( |\dot{\mathbf{x}}_0| + 2\dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_1 \delta x_1 + 2\dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_2 \delta x_2 \right)^{1/2} ds = \left( 1 + \dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_1 \delta x_1 + \dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_2 \delta x_2 \right) ds. \quad (65)$$

Таким образом, возмущение эйконала будет равно:

$$\delta\Psi = \int \sum_j \left( \nabla \delta n \mathbf{e}_j + \delta n \dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_j \right) \delta x_j ds, \quad (66)$$

Производные возмущения эйконала вдоль волнового фронта в окрестности точки наблюдения будут вычисляться следующим образом:

$$\frac{\delta\Psi}{\delta X_{1,2}} = \int \sum_j \left( \nabla \delta n \mathbf{e}_j + \delta n \dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_j \right) \frac{\delta x_j}{\delta X_{1,2}} ds, \quad (67)$$

где  $X_{1,2}$  – координаты в плоскости перпендикулярной лучу в точке наблюдения.

Дополнительное соотношение для векторов  $\mathbf{e}_j$  и их производных  $\dot{\mathbf{e}}_j$  следует из вариационного принципа. Вариация эйконала для невозмущенной траектории в невозмущенной среде равна:

$$\delta\Psi = \int \sum_j \left( \nabla n \mathbf{e}_j + n \dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_j \right) \delta x_j ds, \quad (68)$$

где  $\delta x_j$  – произвольные вариации траектории. Поскольку вариация эйконала обязана быть равной нулю, получаем:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{e}}_j = -\frac{\nabla n}{n} \mathbf{e}_j. \quad (69)$$

Поэтому:

$$\frac{\delta\Psi}{\delta X_{1,2}} = \int \sum_j \left( \nabla \delta n - \delta n \frac{\nabla n}{n} \right) \mathbf{e}_j \frac{\delta x_j}{\delta X_{1,2}} ds, \quad (70)$$

### 2.3. Системы координат. Двумерное приближение

В произвольной системе координат определим импульс соотношением  $p_i = g_{ij} \dot{x}^j$ , где  $(g_{ij})$  – метрический тензор. Поскольку при этом форма  $\mathbf{p} d\mathbf{x}$  инвариантна относительно замен координат, то и каноническая форма гамильтоновой системы будет инвариантна [127]. Тогда функция Гамильтона имеет вид:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left( p_i g^{ij} p_j - n^2(\mathbf{x}) \right), \quad (71)$$

где  $(g^{ij})$  – обратный метрический тензор. Отсюда следуют уравнения лучей:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = g^{ij} p_j, \quad (72)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = n \frac{\partial n}{\partial x^i} - \frac{1}{2} p_k \frac{\partial g^{kj}}{\partial x^i} p_j.$$

Система координат, в которой выполняется численное интегрирование уравнений, выбирается в соответствии с решаемой задачей. В случае моделирования радиозатменных экспериментов удобнее всего пользоваться 3-мерной декартовой системой координат. Эта система оказывается удобнее, чем, например, сферическая система координат. Декартовы координаты однородны, у них нет особых

точек, что облегчает моделирование произвольной геометрии наблюдений. У сферической системы координат имеются особые точки на полюсах.

Горизонтальные градиенты показателя преломления нейтральной атмосферы существенно меньше вертикальных. Это позволяет приближенно считать лучи кривыми в вертикальной плоскости. Пользуясь полученный выше приближенной формулой для возмущения направления прихода луча, оценим боковое смещение луча по отношению к вертикальной плоскости, определяемой тремя точками: центром Земли, источником  $T$  и приемником  $R$ . Будем снова обозначать расстояния от источника и приемника до лимба планеты как  $D_{T,R}$ . Будем рассматривать только боковые смещения луча и применим теорию возмущений, считая, что невозмущенный показатель преломления  $n = 1$ . Примем следующую оценку бокового смещения луча:

$$\delta x = D_T \varepsilon_T = D_R \varepsilon_R, \quad (73)$$

где  $\varepsilon_{T,R}$  – боковые возмущения углов выхода луча у источника и прихода у приемника. Считая невозмущенные лучи в плане прямыми, можно записать формулу через возмущение угла выхода:

$$\delta x = D_T \int \nabla \delta n \mathbf{e} \frac{D_T + D_R - x}{D_T + D_R} ds. \quad (74)$$

Поскольку основной вклад в интеграл дает узкая область вблизи перигея, величину  $x$  можно заменить на  $D_T$ , что приведет к следующей формуле:

$$\delta x = \frac{D_T D_R}{D_T + D_R} \int \nabla \delta n \mathbf{e} ds = D \int \nabla_{\perp} \delta n ds. \quad (75)$$

Такая же формула получится и для вычисления через возмущение угла прихода. Оценим боковое смещение луча. Характерное значение индекса рефракции у поверхности Земли близко к 300 ppm, а температуру можно считать близкой к 300 К. Если температура меняется на 1 К на расстоянии 50 км, это соответствует градиенту показателя преломления 1 ppm на 50 км или  $2 \times 10^{-8} \text{ км}^{-1}$ . Воспользуемся оценкой характерного масштаба взаимодействия луча и атмосферы:  $L = 450 \text{ км}$  и характерной для радиозатменных наблюдений величиной  $D = 3000 \text{ км}$ . Тогда получим:  $\delta x \approx DL \nabla n = 0.06 \text{ км}$ . Таким образом, характерные боковые смещения лучей не превышают десятков метров, что существенно меньше характерных горизонтальных масштабов метеополей. Это позволяет в численном моделировании пользоваться двумерным приближением, считая, что луч лежит в вертикальной плоскости.

В двумерном приближении существенно упрощается решение задачи нахождения луча между двумя точками. Луч характеризуется одной переменной (например, начальным направлением у источника  $\gamma$ ). Поэтому задача сводится к решению одномерного уравнения вида  $f(\gamma) = 0$ , где  $f$  величина «промаха» луча мимо приемника. Такое уравнение можно эффективно решать методом дихотомии. Задаются исходные грубые оценки пределов, в которых лежит решения, т.е. исходное направление луча  $\gamma_0^+$ , при котором он заведомо пройдет выше приемника, и направление  $\gamma_0^-$ , при котором он заведомо пройдет ниже. Затем этот отрезок делится пополам, и вычисляется луч в направлении  $(\gamma_0^- + \gamma_0^+)/2$ . Если луч прошел выше приемника, то для следующей итерации задаем  $\gamma_1^+ = (\gamma_0^- + \gamma_0^+)/2$ ,  $\gamma_1^- = \gamma_0^-$ . В противном случае  $\gamma_1^+ = \gamma_0^-$ ,  $\gamma_1^- = (\gamma_0^- + \gamma_0^+)/2$ . На каждом шаге интервал локализации решения сужается вдвое. Итерации продолжаются, пока не будет достигнута за-

данная точность. Для практических целей этот метод удобнее методов типа Ньютона – Рафсона, поскольку он прост в реализации и заведомо находит решение.

### 2.4. Уравнения лучей в полярных координатах

Введем в вертикальной плоскости полярные координаты  $r, \theta$ . Метрический тензор в этих координатах имеет вид:

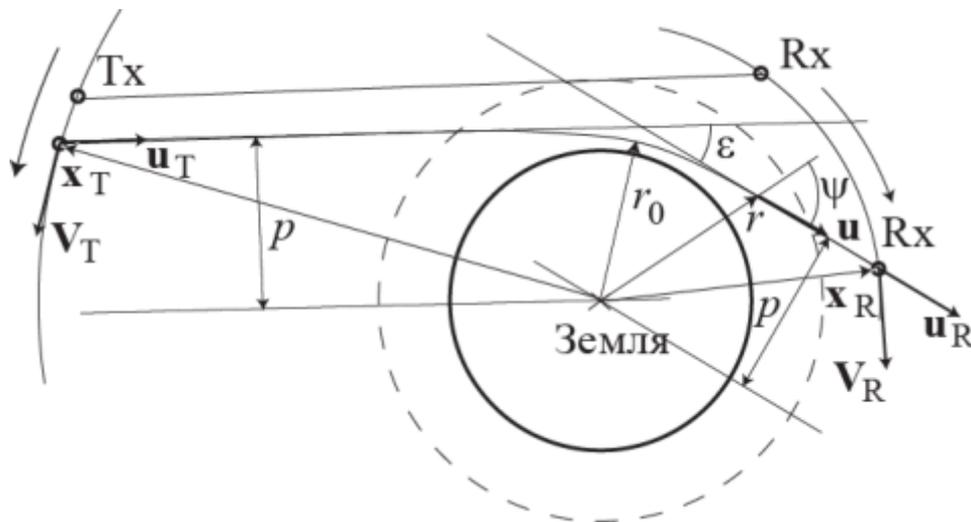


Рис. 3. Геометрия радиозатменного эксперимента

$$g_{ij} = \text{diag}(1, r^2), \quad (76)$$

$$g^{ij} = \text{diag}(1, r^{-2}).$$

Применяя уравнения (71) и (72), получаем соотношения для угловой компоненты импульса  $p_\theta$ , которую удобнее обозначить просто  $p$ :

$$p = r^2 \dot{\theta} = nr \frac{rd\theta}{ds} = nr \sin \psi, \quad (77)$$

$$\dot{p} = n \frac{\partial n}{\partial \theta},$$

где  $\psi$  – угол между направляющим вектором луча  $\dot{\mathbf{x}}$  и локальной вертикалью  $\mathbf{x}$ . Поскольку  $\partial g^{kj} / \partial \theta = 0$ , эта система уравнений замкнута, т.е. не содержит радиальной компоненты импульса  $p_r = \dot{r}$ . В уравнение для  $\dot{p}_r$  войдет ненулевой член  $-p^2(\partial g^{22} / \partial r) / 2$ .

В сферически-слоистой среде  $p$  инвариант, равный прицельному расстоянию луча до и после его взаимодействия с атмосферой (рис. 3). Это утверждение называется законом Снеллиуса, или формулой Бугера для сферически-слоистой среды.

Пользуясь уравнениями (77) и соотношением  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$  получаем уравнение лучевых траекторий:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r}{p} \sqrt{n^2 r^2 - p^2}. \quad (78)$$

Здесь и далее верхний знак относится к восходящей части лучевой траектории от точки перигея до приемника, а нижний – к нисходящей от источника до точки перигея. В сферически-слоистой среде это уравнение описывает луч с заданным прицельным параметром  $p$ . В общем случае это уравнение следует использовать вместе с динамическим уравнением (77).

### 2.5. Угол рефракции

В дальнейшем, в формулировках обратных задач зондирования атмосферы, мы будем пользоваться зависимостью угла рефракции от прицельного параметра  $\varepsilon(p)$ . Здесь мы получим аналитическое выражение для угла рефракции, которое будет использоваться при решении обратных задач. Дифференциальное уравнение для угла рефракции выводится из (77) и (78). Получим формулу для угла рефракции в виде интеграла по радиусу от высоты точки перигея луча  $r_0$ . На восходящей части траектории:

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= d(\psi + \theta), \\ \psi &= \arcsin \frac{p}{nr}, \end{aligned} \quad (79)$$

На нисходящей части траектории, где интегрирование идет также от точки перигея:

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= -d(\psi + \theta), \\ \psi &= \pi - \arcsin \frac{p}{nr}. \end{aligned} \quad (80)$$

Эти формулы можно объединить:

$$d\varepsilon = d \arcsin \frac{p}{nr} \pm \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^{-1} dr. \quad (81)$$

С учетом уравнения траектории луча (78) получаем:

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= \frac{nr}{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}} \left( \frac{dp}{nr} - \frac{p}{nr^2} dr - \frac{p}{n^2 r} \left( \frac{\partial n}{\partial r} dr + \frac{\partial n}{\partial \theta} d\theta \right) \right) + \frac{pdr}{r\sqrt{n^2 r^2 - p^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}} \left( dp - \frac{p}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial r} dr + \frac{\partial n}{\partial \theta} d\theta \right) \right). \end{aligned} \quad (82)$$

Теперь учтем динамическое уравнение для прицельного параметра (77):

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial n}{\partial \theta} \frac{ds}{d\theta} d\theta = \frac{\partial n}{\partial \theta} \sqrt{\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2} d\theta = \frac{\partial n}{\partial \theta} \frac{nr^2}{p} d\theta, \\ d\varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}} \left( \frac{\partial n}{\partial \theta} \frac{nr^2}{p} d\theta - \frac{p}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial r} dr + \frac{\partial n}{\partial \theta} d\theta \right) \right). \end{aligned} \quad (83)$$

И еще раз учитывая уравнение траектории луча (78), получим окончательно:

$$d\varepsilon = \left( -\frac{p}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \pm \frac{\partial n}{r \partial \theta} \frac{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}}{n} \right) \frac{dr}{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}}. \quad (84)$$

В произвольной среде эта формула должна использоваться вместе с уравнением (77), которое позволит определить зависимости  $p_{\pm}(r)$  для двух ветвей траектории.

В произвольной точке луча введем локальные декартовы координаты  $(dr, r d\theta)$ . В этом базисе направляющий вектор луча равен  $(\cos \psi, \sin \psi)$ . Выражение в скобках в формуле (84) равно скалярному произведению градиента показателя преломления и вектора:

$$\left( -\frac{p}{n}, \pm \frac{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}}{n} \right) = r \left( -\frac{p}{rn}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{p}{rn} \right)^2} \right) = r(-\sin \psi, \cos \psi). \quad (85)$$

Таким образом, приращение угла рефракции выражается через проекцию градиента показателя преломления на нормаль к лучу.

Для сферически-слоистой среды, где прицельный параметр является инвариантом луча, получаем формулу:

$$\varepsilon(p) = -2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{pn'_r dr}{n \sqrt{n^2 r^2 - p^2}}, \quad (86)$$

где высота перигея луча  $r_0$  определяется из уравнения  $n(r_0)r_0 = p$ .

Связь профиля показателя преломления  $n(r)$  с профилем угла рефракции  $\varepsilon(p)$  (86) носит нелинейный характер. Однако если перейти к рефракционному радиусу  $x$  при помощи нелинейной замены координат  $x = n(r)r$  то эта связь становится линейной относительно  $\ln n$ :

$$\varepsilon(p) = -2 \int_p^{\infty} \frac{d \ln n}{dx} \frac{p dx}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad (87)$$

Все нелинейные эффекты описываются зависимостью  $x(r)$ .

## 2.6. Сверхрефракция и волноводное распространение

Рефракционный радиус позволяет описать явление волноводного распространения, проиллюстрированное на рис. 4. Рассмотрим случай немонотонной зависимости  $x(r)$ . Как следует из уравнения (77), на луче  $x \geq p$ . Для заданного прицельного параметра  $p$  выделим на оси  $r$  связанные множества, удовлетворяющие условию  $x(r) \geq p$ . Если такое множество является лучом от минимального значения  $r_0$  до бесконечности, то оно соответствует лучу на трассе космос–космос. Если это множество является конечным отрезком, то оно соответствует лучу, заключенному в волноводе. Луч, выпущенный горизонтально на верхней границе волновода, будет бесконечно скользить вдоль этой границы. Эта ситуация называется критической рефракцией: радиус кривизны луча, выпущенного горизонтально, точно равен расстоянию до центра сферической симметрии среды. Если радиус кривизны луча, выпущенного горизонтально, меньше этого расстояния, то такая ситуация называется сверхрефракцией. Сверхрефракция реализуется внутри волновода. Нормальной рефракцией называется ситуация, когда радиус кривизны луча, выпущенного горизонтально, больше расстояния до центра сферической

симметрии среды. В соответствии с рис. 4 можно записать следующие условия этих трех ситуаций:

$$\begin{aligned} dx/dr > 0 & \text{ нормальная рефракция,} \\ dx/dr = 0 & \text{ критическая рефракция,} \\ dx/dr < 0 & \text{ сверхрефракция.} \end{aligned} \quad (88)$$

К этим формулам можно прийти непосредственно, записав динамическое уравнение для радиальной компоненты импульса:

$$\dot{p}_r = \ddot{r} = n \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{p^2}{r^3}. \quad (89)$$

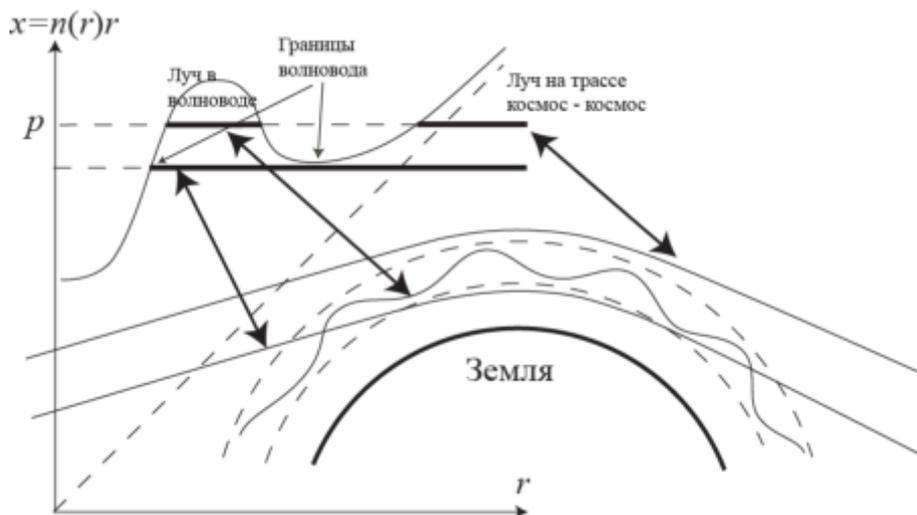


Рис. 4. Геометрия сверхрефракции и волноводного распространения в сферически-слоистой среде

В точке перигея  $p = nr$ , поэтому:

$$\ddot{r} = n \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{n^2}{r} = \frac{n}{r} \frac{dx}{dr}. \quad (90)$$

Приведем еще один способ вывода условий (88). Рассмотрим 2-мерное волновое уравнение в декартовых координатах  $(X, Y)$ :

$$\Delta u + k^2 n^2 u = 0. \quad (91)$$

Считая двумерное пространство комплексной плоскостью  $Z = X + iY$ , выполним конформное преобразование  $Z' = \ln(Z / r_E) = \ln(r / r_E) + i\theta$ , где  $r_E$  – радиус Земли. Пользуясь законом преобразования оператора Лапласа [128], запишем это уравнение в новых координатах:

$$\left| \frac{dZ'}{dZ} \right|^2 \Delta' u + k^2 n^2 u = \frac{1}{r^2} \Delta' u + k^2 n^2 u = 0, \quad (92)$$

которое можно переписать следующим образом:

$$\Delta' u + k^2 n^2 r^2 u = 0. \quad (93)$$

Поэтому координаты  $(\ln(r/r_E), \theta)$  с точки зрения распространения волн и геометрической оптики можно рассматривать как декартовы, если заменить показатель преломления  $n(r)$  на приведенный показатель преломления  $n(r)r$ , совпадающий с рефракционным радиусом  $x(r)$ . В этих координатах три условия (88) соответствуют типам распространения луча, выпущенного горизонтально: 1) луч искривляется вверх, 2) луч распространяется горизонтально, 3) луч искривляется вниз.

Вместо безразмерных координат  $(\ln r, \theta)$  рассмотрим координаты

$$r_E (\ln(r/r_E), \theta) \approx (r - r_E, r_E \theta). \quad (94)$$

Эти координаты реализуют приближение плоской Земли с приведенным показателем преломления  $n(r)r/r_E$ . Такие координаты часто используются в задачах распространения радиоволн в тропосфере.

При радиозатменном зондировании точки перигея лучей на трассе космос-космос не могут оказаться внутри волновода, поскольку луч, выпущенный горизонтально внутри волновода, никогда не сможет покинуть волновод. У лучей, чьи точки перигея приближаются к верхней или нижней границе волновода, угол рефракции возрастает до бесконечности.

Разумеется, это рассмотрение носит формальный характер. В рамках теории дифракции ситуация будет иной. Например, невозможно рассматривать отдельные лучи. Узконаправленная волна, выпущенная на верхней границе волновода, будет рассеиваться, и плотность энергии на верхней границе волновода, будет очень быстро убывать. Волновые моды, возбуждаемые внутри волновода, будут терять энергию, поскольку за счет эффектов дифракции, она будет высвечиваться через границу волновода.

## 2.7. Определение углов рефракции по измерениям фазы

В радиозатменных экспериментах прямые измерения угла рефракции не проводятся, так как это сопряжено с техническими трудностями. Вместо этого измеряется доплеровская частота принимаемых радиосигналов. Если передатчик, например, на спутнике системы GPS излучает сигнал с частотой  $\omega_T$ , а приемник установленный на низкоорбитальном спутнике принимает сигнал с частотой  $\omega_R$ , то между ними имеется следующее соотношение [129]:

$$\omega_R = \omega_T \frac{c - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{u}_R}{c - \mathbf{V}_T \cdot \mathbf{u}_T} \sqrt{\frac{c^2 - V_T^2}{c^2 - V_R^2}}, \quad (95)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\mathbf{V}_R$  и  $\mathbf{V}_T$  – скорости низкоорбитального спутника и спутника системы GPS,  $\mathbf{u}_R$  и  $\mathbf{u}_T$  – направления луча у приемника и у передатчика.

Доплеровская частота, измеряемая в течение радиозахода, преобразуется в фазовую задержку (или набег оптического пути), определяемую следующим образом:

$$\Delta\Psi(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^t (\omega_R^{(0)}(t') - \omega_R(t')) dt', \quad (96)$$

$$\omega_R^{(0)} = \omega_T \frac{c - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{u}^{(0)}}{c - \mathbf{V}_T \cdot \mathbf{u}^{(0)}} \sqrt{\frac{c^2 - V_T^2}{c^2 - V_R^2}}, \quad (97)$$

где  $\mathbf{u}^{(0)}$  – единичный вектор направления передатчик-приемник,  $\omega_R^{(0)}(t)$  – вакуумная доплеровская частота, которая была бы измерена в отсутствие атмосферы. Таким образом, фазовая задержка  $\Delta\Psi(t)$  целиком связана с эффектом атмосферы. Из фазовой задержки вычислим относительный доплеровский сдвиг частоты:

$$d = \frac{\omega_R - \omega_T}{\omega_T} = \frac{\omega_R^{(0)} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d\Delta\Psi(t)}{dt}}{\omega_T} - 1 = d^{(0)} - \frac{1}{c} \frac{d\Delta\Psi(t)}{dt}, \quad (98)$$

где  $d^{(0)}$  – вакуумный относительный доплеровский сдвиг. Чтобы определить угол рефракции для сферически-слоистой атмосферы, можно пользоваться соотношениями (95) и (98), дополненными законом Снеллиуса в векторной форме:

$$\frac{c - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{u}_R}{c - \mathbf{V}_T \cdot \mathbf{u}_T} \sqrt{\frac{c^2 - V_T^2}{c^2 - V_R^2}} - 1 = d, \quad (99)$$

$$\mathbf{x}_R \times \mathbf{u}_R = \mathbf{x}_T \times \mathbf{u}_T,$$

где  $\mathbf{x}_R$  и  $\mathbf{x}_T$  – координатные вектора спутников. Соотношений (99) вместе с условием, что  $\mathbf{u}_R$  и  $\mathbf{u}_T$  являются единичными векторами, достаточно для нахождения этих векторов по измеренной доплеровской частоте и баллистическим данным спутников. В этом случае угол рефракции  $\epsilon$  определяется как угол между  $\mathbf{u}_R$  и  $\mathbf{u}_T$ , а прицельный параметр  $p$  равен  $|\mathbf{x}_R \times \mathbf{u}_R|$ , или  $|\mathbf{x}_R \times \mathbf{u}_R|$ , что эквивалентно.

Система GPS имеет две частоты (канал L1 – 1.57542 ГГц и канал L2 – 1.22763 ГГц), что позволяет существенно уменьшить вклад ионосферы в угол рефракции. Простейшая схема ионосферной коррекции основана на том, что в первом приближении ионосферное возмущение угла рефракции является линейным функционалом от ионосферного поля показателя преломления [129]. Тогда ионосферная компонента угла рефракции обратно пропорциональна квадрату частоты. Это позволяет записать нейтральный угол рефракции в виде линейной комбинации углов рефракции на частотах L1 и L2. Остаточная погрешность ионосферной коррекции, обусловленная мелкомасштабными ионосферными возмущениями и аппаратными шумами, является главным источником ошибок измерений на высотах более 10 км [130]. В нижней тропосфере эффект этих шумов оказывается пренебрежимо мал по сравнению с нейтрально-атмосферными вариациями углов рефракции.

Эта методика определения угла рефракции по измерениям доплеровской частоты имеет два ограничения.

Во-первых, поскольку реальная атмосфера не является сферически-слоистой, то определение угла рефракции и прицельного параметра по этим формулам будет приводить к ошибкам [131], [132]. Следует также отметить, что в этом случае прицельный параметр не является инвариантом луча, как следует из (77). Например, если в атмосфере имеется возмущение типа атмосферного фронта с перепадом температуры 10 К и относительного влагосодержания 3 г/кг на расстоянии 100 км, то это примерно соответствует перепаду показателя преломления  $\Delta n = 30 \times 10^{-6} = 30$  ppm. Тогда, исходя из динамического уравнения (77), вариация  $p$  оценивается как  $\Delta p \approx a \Delta n = 200$  м, где  $a = 6371$  км – радиус Земли. Если нужно восстанавливать высоты изобарических поверхностей с точностью не хуже 10 м, то примерно с та-

кой же точностью необходимо определять и прицельный параметр. Характерные вариации прицельного параметра в средних широтах составляют около 10 м, тогда как в тропиках эта величина достигает 100–200 м. Это означает, что точность приближения сферической симметрии в нижней тропосфере недостаточна.

Ниже мы обсудим, каким образом можно обойти эту трудность в рамках подхода, основанного на 3- или 4-мерном прямом усвоении рефрактометрических данных в модели глобальной циркуляции атмосферы.

Второе ограничение связано с многолучевым распространением радиоволн. Формула (95) применима только для случая однолучевого распространения. В случае же интерференции нескольких лучей, фаза принимаемого поля определяется фазами и амплитудами всех лучей, и доплеровская частота не может быть использована напрямую для определения угла рефракции и прицельного параметра из соотношений (99).

Многолучевое распространение является типовой ситуацией для нижней тропосферы. С другой стороны, данные по нижней тропосфере очень существенны для численного прогноза погоды. Это показывает важность разработки методов определения лучевой структуры волнового поля, измеренного в многолучевой зоне. В следующей главе мы рассмотрим различные подходы к этой задаче.

## 2.8. Амплитуда радиозатменных сигналов

Амплитуда измеряемого поля играет существенную роль в интерпретации радиозатменных данных. В частности, в предположении однолучевого распространения и отсутствия поглощения, из измерений амплитуды можно определить угол рефракции и восстановить вертикальный профиль показателя преломления [122]–[125]. Пользуясь связью между амплитудой и углом рефракции, можно по фазовым и амплитудным измерениям определять интегральное поглощение. Измерения амплитуды также необходимы для интерпретации радиозатменных данных при помощи алгоритмов, основанных на волновой оптике. Ниже мы приведем вывод выражения для амплитуды радиозатменных сигналов в геометрическом приближении [123], [126], [125].

Пусть в некоторый момент времени задано взаимное положение источника и приемника, определяемое радиальными координатами спутников  $r_T$ ,  $r_R$  и их угловым разнесением  $\theta$  (рис. 5). Амплитуда определяется из закона сохранения энергии. Будем параллельно рассматривать задачу в 2-х и 3-х измерениях (2-мерные формулы используются для сравнения с результатами моделирования волновой задачи методом фазовых экранов, которое также проводится в 2-мерном пространстве). Энергия, излучаемая передатчиком с всенаправленной антенной в бесконечно малом конусе, задается следующим выражением:

$$dE_T = \frac{P}{2\pi} d\psi_T \left\{ \frac{1}{2} \sin \psi_T d\phi \right\}_{3D}, \quad (100)$$

где  $P$  – полная мощность излучения,  $\psi_T$  – угол между направлением луча и направлением  $Tx-O$  у передающего спутника,  $\phi$  – угол вращения вокруг линии  $Tx-O$ . Множитель в фигурных скобках относится к 3-мерному случаю. В общем случае атмосферы с горизонтальными градиентами прицельный параметр меняется вдоль луча, и нужно использовать различные прицельные параметры: у передатчика  $p_T$ , у приемника  $p_R$ , и эффективный прицельный параметр  $p$ , определя-

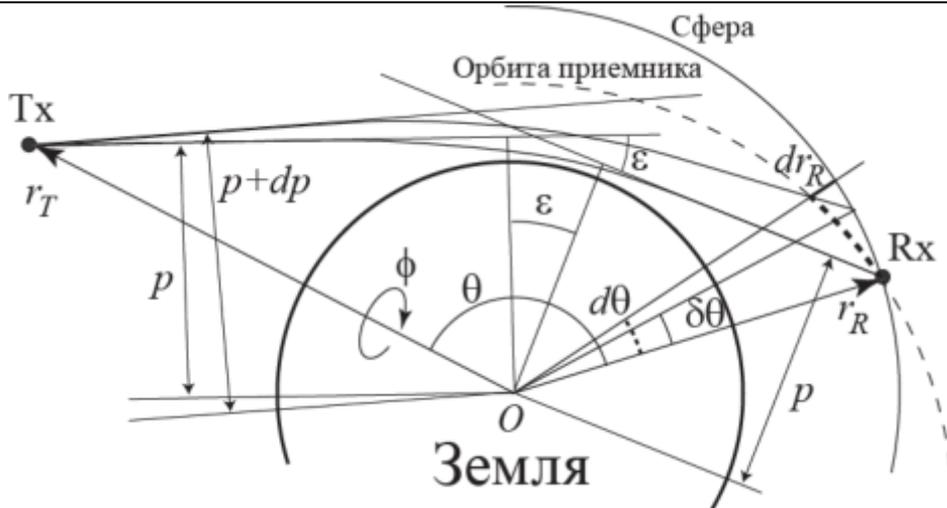


Рис. 5. Геометрия лучевой трубки к вычислению амплитуды радиозатменных сигналов

емый из доплеровской частоты на основании уравнения (99). Прицельный параметр  $p_T$  равен  $r_T \sin \psi_T$ . Отсюда получаем

$$dp_T = r_T \cos \psi_T d\psi_T = \sqrt{r_T^2 - p_T^2} d\psi_T. \quad (101)$$

Поэтому для распределения энергии по прицельным параметрам мы получаем выражение

$$dE_T = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_T^2 - p_T^2}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{p_T}{r_T} d\phi \right\}_{3D} \frac{dp_T}{dp}. \quad (102)$$

Рассмотрим приемную апертуру в виде бесконечно малого элемента сферы с центром в центре Земли. Принимаемая энергия равна  $A_0^2 \cos \psi_R dS$ , где  $A_0$  рефракционная амплитуда (вычисляемая в предположении отсутствия поглощения),  $\psi_R$  – угол между лучевой трубкой и нормалью к приемной апертуре,  $dS$  площадь апертуры:

$$\begin{aligned} dE_R &= A_0^2 \cos \psi_R r_R \left\{ \frac{1}{2} r_R \sin \theta d\phi \right\}_{3D} \delta\theta = \\ &= A_0^2 \sqrt{r_R^2 - p_R^2} \left\{ \frac{1}{2} r_R \sin \theta d\phi \right\}_{3D} \delta\theta. \end{aligned} \quad (103)$$

Символ  $\delta$  означает частный дифференциал вдоль сферы, вычисляемый при фиксированных  $r_R, r_T$ . Приравнявая излученную и принятую энергию, получаем выражение для амплитуды:

$$A_0^2 = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_R^2 - p_R^2} \sqrt{r_T^2 - p_T^2}} \left\{ \frac{p_T}{r_T r_R \sin \theta} \right\}_{3D} \left( \frac{\delta\theta}{dp_T} \right)^{-1}. \quad (104)$$

Для сферически-слоистой атмосферы  $p_T \equiv p_R \equiv p$ , и можно записать:

$$A_0^2 = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_R^2 - p^2} \sqrt{r_T^2 - p^2}} \left\{ \frac{p}{r_T r_R \sin \theta} \right\}_{3D} \left( \frac{\delta\theta}{dp} \right)^{-1}. \quad (105)$$

Для вычисления производной размера виртуальной апертуры по прицельному параметру  $\frac{\delta\theta}{dp}$  воспользуемся следующим геометрическим соотношением:

$$\theta = \varepsilon(p) + \arccos \frac{p}{r_T} + \arccos \frac{p}{r_R}. \quad (106)$$

Угловой размер апертуры  $\delta\theta$  вычисляется как частная вариация при постоянных  $r_G$  и  $r_L$ :

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial p} dp = \left( \frac{d\varepsilon(p)}{dp} - \frac{1}{\sqrt{r_T^2 - p^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_R^2 - p^2}} \right) dp. \quad (107)$$

Это приводит к известному выражению для амплитуды [123], [126]:

$$\begin{aligned} A_0^2 &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{p}{r_T r_R \sin \theta} \right\}_{3D} \frac{1}{D_T D_R \frac{d\varepsilon(p)}{dp} - D_R - D_T} = \\ &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{p}{r_T r_R \sin \theta} \right\}_{3D} \frac{1}{(D_R + D_T) \left( D \frac{d\varepsilon(p)}{dp} - 1 \right)}, \end{aligned} \quad (108)$$

где  $D_{T,R} = \sqrt{r_{T,R}^2 - p^2}$  и  $D = (D_R^{-1} + D_T^{-1})^{-1}$ . При многолучевом распространении

множитель  $D \frac{d\varepsilon(p)}{dp} - 1$  может обращаться в 0 и становится отрицательным. Это

соответствует тому, что на каустиках геометрооптическая амплитуда бесконечна, а для лучей, касающихся каустика, мнимая амплитуда эквивалентна фазовой добавке  $\pm\pi/2$ . Как мы видели в разделе 4.2, применение асимптотических методов позволяет избавиться от бесконечности в амплитуде.

## 2.9. Определение углов рефракции по измерениям амплитуды

Выражение (108) для амплитуды включает производную  $\frac{d\varepsilon}{dp}$ . Однако, из ам-

плитуды нельзя непосредственно определить эту производную, поскольку в эту формулу входит также прицельный параметр, который сам должен быть определен для заданных положений передатчика и приемника. Мы воспользуемся выражением (105) для амплитуды и геометрическим соотношением (106). Можно записать:

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial p} dp = d\theta - \frac{\partial\theta}{\partial r_T} dr_T - \frac{\partial\theta}{\partial r_R} dr_R = d\theta \left( 1 - \frac{dr_T}{d\theta} \frac{p}{r_T D_T} - \frac{dr_R}{d\theta} \frac{p}{r_R D_R} \right), \quad (109)$$

где  $d\theta$ ,  $dr_G$  и  $dr_L$  – полные дифференциалы вдоль траектории спутников. Из выражения (105) получаем:

$$\frac{dp}{\delta\theta} = D_T D_R \left\{ \frac{r_T r_R \sin \theta}{p} \right\}_{3D} \frac{A_0^2}{P/2\pi}. \quad (110)$$

С учетом (109) получаем следующее дифференциальное уравнение [[124]]:

$$\frac{dp}{d\theta} = \left( 1 - \frac{dr_T}{d\theta} \frac{p}{r_T D_T} - \frac{dr_R}{d\theta} \frac{p}{r_R D_R} \right) D_T D_R \left\{ \frac{r_T r_R \sin \theta}{p} \right\}_{3D} \frac{A_0^2}{P/2\pi}. \quad (111)$$

Поскольку угловое разнесение спутников  $\theta$  взаимно-однозначно связано со временем  $t$ , орбитальные данные спутников  $r_L$ ,  $r_G$  и измеряемая амплитуда сигнала  $A_0$  могут быть выражены как функции от  $\theta$ . Поэтому правая часть в (111) является известной функцией от  $p$  и  $\theta$ , и это уравнение может быть численно проинтегрировано. Нормировочный множитель амплитуды  $P/2\pi$  может быть определен по измерениям амплитуды на высотах более 60 км, где влияние рефракции несущественно. Начальное условие для прицельного параметра также должно быть задано на достаточно большой высоте и может быть определено, например, по фазовым измерениям [124]. Пользуясь полученной зависимостью  $p(\theta)$  и соотношением (106), можно определить углы рефракции  $\varepsilon(p(\theta))$ .

### 2.10. Определение фазы и амплитуды по профилю угла рефракции

В условиях однолучевого распространения профиль угла рефракции позволяет вычислить фазовую задержку  $\Delta s(t)$  и амплитуду  $A(t)$ . Для вычисления фазовой задержки необходимо найти момент времени  $t$ , когда наблюдается луч с заданным прицельным параметром  $p$  и углом рефракции  $\varepsilon$ . Для этого следует численно решить уравнение:

$$\theta(t) = \varepsilon + \arccos \frac{p}{r_T(t)} + \arccos \frac{p}{r_R(t)}, \quad (112)$$

где  $\theta(t)$  – угловое разнесение спутников, а  $r_{T,R}(t)$  – расстояния от центра Земли (или локального центра кривизны сечения эллипсоида плоскостью радиозахода) до спутников. Далее по прицельному параметру  $p$  и координатам спутников  $x_{T,R}(t)$  мы находим единичные векторы направлений луча  $\mathbf{u}_{T,R}(t)$ , из которых определяем доплеровский сдвиг, пользуясь формулой (99). Интегрируя доплеровский сдвиг по времени, мы определим фазовую задержку. Амплитуду мы определим по формуле (108).

Такая модель вычисления радиозатменного сигнала имеет ограниченное применение. Она удобна для применения совместно с гладкой климатологической моделью атмосферы, в которой не возникает многолучевого распространения. В этом случае, пользуясь геометрической моделью, удобно вычислять опорный сигнал, применяемый в радиолографических методах, которые будем обсуждать ниже.

### 2.11. Определение поглощения по измерениям амплитуды и фазы

Небольшое поглощение (до 1 дБ) может быть замечено в радиозатменных данных на частотах GPS. Однако, как мы видели в разделе 2.3, на более высоких частотах (9–30 ГГц) поглощение становится существенным. Поглощение является функцией от метеопараметров и частоты, описываемой моделью распростра-

нения микроволн, и оно может быть использовано для формулировки обратной задачи восстановления метеопараметров. Поглощение можно определять, пользуясь измерениями амплитуды и фазы. Измерения поглощения в трех частотных каналах (например, 9.6 ГГц, 17.25 ГГц и 22.6 ГГц) в принципе (т.е. при достаточно высокой точности измерения амплитуды) позволяет восстанавливать профили давления, температуры и влажности без априорной информации. Разрабатывался проект запуска системы низкоорбитальных спутников, оснащенных передатчиками и приемниками радиосигналов на указанных частотах [133].

Для описания поглощения вводится мнимая часть показателя преломления  $N_i$ . Интегральное поглощение вдоль луча равно  $\tau = k \int N_i ds$ . Измеряемая амплитуда при этом равна  $A = A_0 k \equiv A_0 \exp(-\tau)$ . Здесь  $k$  – амплитуда, нормированная на вычисленную выше рефракционную амплитуду без учета поглощения  $A_0$ . Пользуясь фазовыми измерениями можно определить прицельные параметры и углы рефракции, и значит, найти  $A_0$ . Пользуясь измеренной амплитудой  $A$ , можно определить интегральное поглощение  $\tau = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\ln k$ .

На рис. 6 показаны примеры зависимости мнимой части показателя преломления от частоты для сухой и влажной атмосферы. Водяной пар имеет линию поглощения с центром около 22.6 ГГц. Набор частот 9.6, 17.25 и 22.6 ГГц позволяет хорошо выделять влажную составляющую показателя преломления. Во влажной атмосфере (в тропиках) поглощение на 22.6 ГГц будет достаточно сильным, чтобы восстанавливать влажность до высот 15–20 км. При этом ниже 5 км сигнал на этой частоте практически пропадает, и в алгоритмах восстановления используются только два оставшихся канала.

Ошибка определения интегрального поглощения равна следующему выражению:

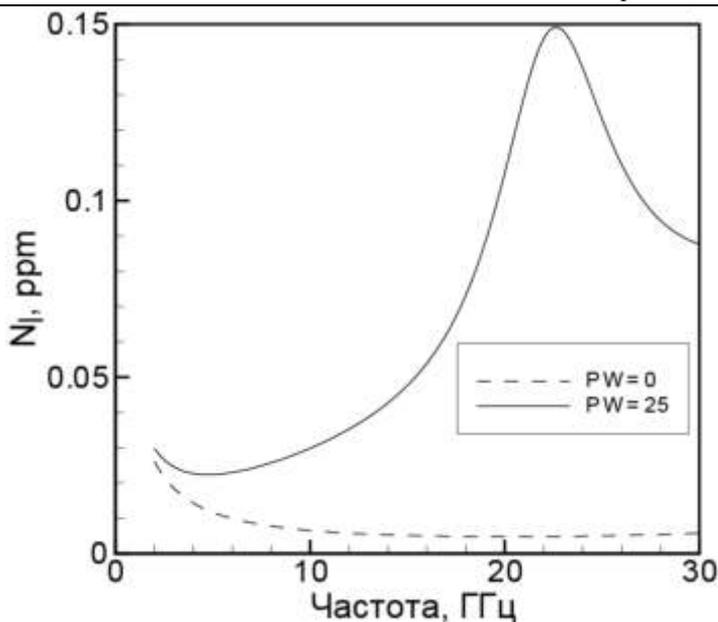
$$\frac{\delta\tau}{\tau} = \frac{\delta k}{k} = \frac{\delta A}{A_0} \frac{\exp \tau}{\tau}. \quad (113)$$

Эта функция возрастает как при  $\tau \rightarrow 0$ , так и при  $\tau \rightarrow \infty$ . Это соответствует тому, что малое поглощение незаметно на фоне ошибок измерения амплитуды, а при большом поглощении сама амплитуда становится малой, и падает точность ее определения.

Получим явное выражение для интегрального поглощения в сферически-слоистой среде. Элемент длины луча может быть записан в следующей форме:

$$\begin{aligned} ds &= \left( dr^2 + r^2 d\theta^2 \right)^{1/2} = \left( 1 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right)^{1/2} dr = \\ &= \left( 1 + \frac{p^2}{n^2 r^2 - p^2} \right)^{1/2} dr = \frac{nr}{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}} dr = \frac{x}{\sqrt{x^2 - p^2}} \frac{dr}{dx}. \end{aligned} \quad (114)$$

Мы предполагаем, что в каждый момент времени наблюдается не более одного луча. Поэтому измеряемая амплитуда и интегральное поглощение будут функциями прицельного параметра. Интегральное поглощение можно записать в следующей форме:



**Рис. 6.** Примеры зависимости мнимой части показателя преломления от частоты для давления 1000 гПа и температуры 300 К: 1) пунктирная линия – для сухой атмосферы, 2) сплошная линия – при парциальном давлении водяного пара 25 гПа

$$\tau(p) = 2 \int_p^{\infty} kn_I(x) \frac{x}{\sqrt{x^2 - p^2}} \frac{dr}{dx} dx. \quad (115)$$

## 2.12. Приближение вертикальной геометрии и неподвижного источника

На основе методов геометрической оптики мы введем важное приближение, которое существенно упрощает прямое моделирование радиозатменных экспериментов. Модель радиозатменных экспериментов должна описывать эффекты многолучевого распространения. Простейший способ такого моделирования в рамках геометрической оптики заключается в том, что вычисляемой величиной является профиль угла рефракции  $\varepsilon(p)$ . Метод моделирования основан на вычислении веера лучей в вертикальной плоскости с фиксированным источником и с использованием двумерного приближения. Чтобы результаты моделирования можно было сопоставлять с реальными наблюдениями, необходимо выбирать такую вертикальную геометрию максимально близкой к фактической геометрии наблюдений. Для этого мы вводим преобразование геометрии радиозахода к вертикальной со стационарным источником.

Введем локальную систему координат. Для этого оценим положение проекций точек перигея радиолучей на поверхность Земли. Поскольку углы рефракции в атмосфере Земли достаточно малы, это можно делать, пренебрегая рефракцией. В этом приближении точка радиозахода  $\mathbf{r}_{\text{occ}} = (x_1, x_2, x_3)$  оценивается как проек-

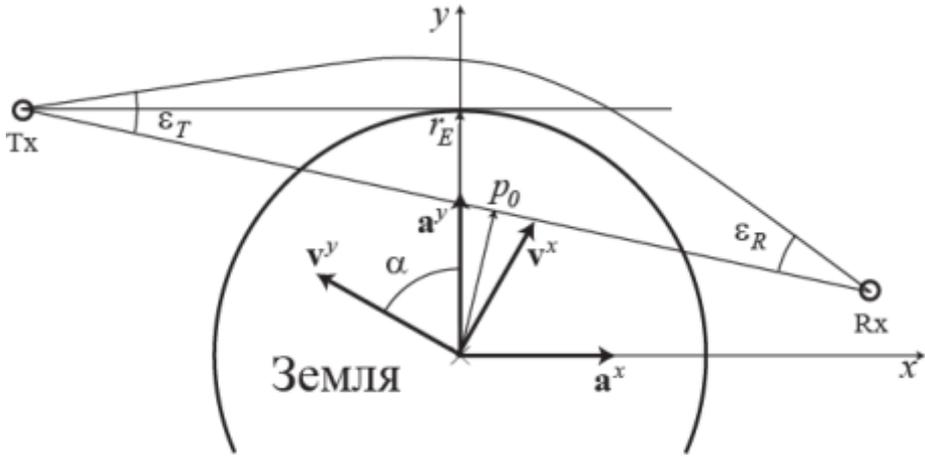


Рис. 7. Геометрия стационаризации спутника GPS

ция на поверхность Земли точки перигея самой нижней прямой соединяющей спутник GPS и низкоорбитальный спутник во время радиозахода.

Обозначим через  $\mathbf{r}_T(t_i)$  и  $\mathbf{r}_R(t_i)$  координаты спутников в моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1..N$  во время радиозахода. Азимутальный угол плоскости радиозахода  $\theta$  оценим как угол между векторами  $[\mathbf{r}_T(t_N), \mathbf{r}_R(t_N)]$  и  $[\mathbf{a}_p, \mathbf{r}_{occ}]$ , где  $\mathbf{a}_p$  – полярная ось.

Теперь мы определим положение центра кривизны сечения стандартного эллипсоида плоскостью радиозахода. Пользуясь теоремой Эйлера [134], нормальная секционная кривизна  $k$  может быть записана в виде:

$$k = k_m \cos^2 \theta + k_p \sin^2 \theta, \quad (116)$$

где  $k_m$  – меридиональная кривизна, а  $k_p$  – параллельная кривизна, которые могут быть вычислены следующим образом:

$$k_m = \frac{R_p R_e^4}{\left( R_e^4 + (R_p^2 - R_e^2)(x_1^2 + x_2^2) \right)^{3/2}}, \quad (117)$$

$$k_p = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

где  $\varphi$  – геодезическая широта точки радиозахода. Для вычисления  $k_p$  мы применили теорему Менье (Meusnier) [134]. Центр локальной кривизны может быть найден следующим образом:

$$\mathbf{r}_{LC} = \mathbf{r}_{occ} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}_{occ})}{k}, \quad (118)$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{occ}) = (\cos \varphi \sin \lambda, \cos \varphi \cos \lambda, \sin \varphi)$  – локальная вертикаль,  $\lambda$  – геодезическая долгота точки радиозахода.

Для заданных траекторий спутников  $\mathbf{r}_T(t)$  и  $\mathbf{r}_R(t)$  мы введем движущийся ортонормированный базис  $\mathbf{a}^x(t)$ ,  $\mathbf{a}^y(t)$ , определяющий координаты  $x$ ,  $y$  в плоскостях в  $\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_{LC} - \mathbf{r}_R(t)$ . Базисные векторы определяются требованием, чтобы у-ко-

ордината спутника GPS была всегда равна локальному радиусу кривизны  $r_E = \frac{1}{k}$ .

Введем вспомогательный ортонормированный базис так, чтобы один из базисных векторов был направлен на источник:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T(t) &= \frac{\mathbf{r}_T(t)}{|\mathbf{r}_T(t)|}, \\ \mathbf{v}_R(t) &= \frac{\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{v}_T(t)(\mathbf{v}_T(t) \cdot \mathbf{r}_R(t))}{|\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{v}_T(t)(\mathbf{v}_T(t) \cdot \mathbf{r}_R(t))|}, \end{aligned} \quad (119)$$

и повернув его на угол:

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{r_E}{|\mathbf{r}_T(t)|}, \quad (120)$$

получим искомый базис:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^x(t) &= -\sin \alpha \mathbf{v}_T(t) + \cos \alpha \mathbf{v}_R(t), \\ \mathbf{a}^y(t) &= \cos \alpha \mathbf{v}_T(t) + \sin \alpha \mathbf{v}_R(t). \end{aligned} \quad (121)$$

Вычислим координаты спутников во введенном движущемся базисе:

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \mathbf{a}^x(t)(\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_{LC}), \\ y_T(t) &= \mathbf{a}^y(t)(\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_{LC}), \\ x_R(t) &= \mathbf{a}^x(t)(\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{r}_{LC}), \\ y_R(t) &= \mathbf{a}^y(t)(\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{r}_{LC}). \end{aligned} \quad (122)$$

Зафиксируем базисные векторы, взятые для самой нижней точки радиозахода, а координаты спутников отнесем к соответствующей фиксированной вертикальной плоскости. Такое преобразование координат означает, что мы считаем горизонталью касательную к поверхности Земли проведенную со спутника GPS и пренебрегаем вращением этой конфигурации по отношению к Земле во время радиозахода. Кроме этого, относительное движение низкоорбитального спутника проектируется в фиксированную вертикальную плоскость.

После описанного преобразования координат  $y_T(t)$  всегда равна  $r_E$ . Остающееся медленное движение спутника GPS совершается вдоль  $x$ -координаты. Чтобы полностью стационаризовать спутник GPS мы применяем второе преобразование координат.

Вводя прицельные углы  $\varepsilon_T$  и  $\varepsilon_R$ , определяемые как углы между лучом и прямой линией соединяющей спутники, мы можем приближенно записать закон Снеллиуса:

$$\varepsilon_{TxT} = \varepsilon_{RxR} = p - p_0, \quad (123)$$

где  $p$  – прицельное расстояние луча относительно локального центра кривизны,  $p_0$  – прицельное расстояние прямой, соединяющей спутники (рис. 7), мы имеем соотношение для угла рефракции  $\varepsilon = \varepsilon_T + \varepsilon_R$ :

$$p - p_0 = \frac{x_T x_R}{x_T + x_R} \varepsilon. \quad (124)$$

Поэтому если мы изменим координаты спутников таким образом, что  $\frac{x_T x_R}{x_T + x_R} = \text{const}$ , то угол рефракции и прицельный параметр не изменятся. Если зафиксировать положение спутника GPS в самой нижней точке радиозахода, то мы придем к следующему преобразованию координат:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{x_T(t)x_R(t)}{x_T(t)+x_R(t)}, \\ x'_T &= x_T(t_N), \\ x'_R(t) &= \frac{f(t)x'_T}{x'_T - f(t)}. \end{aligned} \tag{125}$$

Таким образом, преобразованные координаты спутников окончательно могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_T &= x'_T \mathbf{a}^x(t_N) + y'_T \mathbf{a}^y(t_N), \\ \mathbf{x}'_R(t) &= x'_R(t) \mathbf{a}^x(t_N) + y'_R(t) \mathbf{a}^y(t_N). \end{aligned} \tag{126}$$

Геометрооптическое моделирование выполняется следующим образом. Выполняется численное интегрирование уравнений лучей (50) с фиксированной начальной точкой и с разными направлениями. Интегрирование выполняется до пересечения луча с траекторией приемника. Для каждого луча вычисляется угол рефракции и прицельный параметр на основе формул (99).

Описанное преобразование геометрии будет особенно полезным в дифракционном моделировании радиозатменных экспериментов.

### 2.13. Моделирование поля показателя преломления в атмосфере

В численном моделировании радиозатменных экспериментов нам потребуется модель трехмерного поля показателя и его производных. В частности, для решения дифракционной задачи на основе скалярного волнового уравнения требуется поле показателя преломления  $n(\mathbf{x})$ , а для решения геометрооптических уравнений лучей требуется также градиент показателя преломления  $\nabla n(\mathbf{x})$ . При разработке же линеаризованной геометрооптической модели, которая необходима для прямого вариационного усвоения радиозатменных данных, потребуется также матрица вторых производных  $\nabla \otimes \nabla n(\mathbf{x})$  (гессиан). Понятие вариационного усвоения будет рассмотрено в разделе 5.3.

При моделировании мы будем пользоваться глобальными полями метеопараметров из анализов ECMWF. Поскольку метеопараметры в модели ECMWF представлены в виде сеточных полей на модельных сетках, необходимо разработать процедуру интерполяции этих данных в произвольную пространственную точку. Следует также отметить, что мы будем моделировать только нейтральную компоненту показателя преломления.

В моделях глобальной циркуляции ECHAM3, ECHAM4 и аналогичной им модели, используемой в ECMWF [135], используются поля температуры  $T_{ijk}$ , удельной влажности  $q_{ijk}$ , и давления на поверхности Земли  $P_{s,jk}$ , заданные на прямо-

угольной сетке широт и долгот  $\{\varphi_j, \lambda_k\}$ . Эти данные определяют сетку геопотенциальных уровней  $\phi_{ijk}$  следующим образом.

Вводятся полусцелые модельные уровни, давление на которых определяется давлением на поверхности по следующим формулам:

$$P_{i+\frac{1}{2},jk} = A_{i+\frac{1}{2}} + B_{i+\frac{1}{2}} P_{s,jk}, \quad (127)$$

где  $A_{i+\frac{1}{2}}$  и  $B_{i+\frac{1}{2}}$  – стандартные наборы коэффициентов (вертикальные координаты). Нумерация уровней идет сверху вниз. Для этих уровней геопотенциальные высоты определяются из уравнения статики:

$$\phi_{i+\frac{1}{2},jk} - \phi_{i-\frac{1}{2},jk} = -R_d T_{v,ijk} \ln \left( \frac{P_{i+\frac{1}{2},jk}}{P_{i-\frac{1}{2},jk}} \right), \quad (128)$$

$$\phi_{i_{\max}+\frac{1}{2},jk} = \phi_{s,jk},$$

где  $R_d$  – газовая постоянная для сухого воздуха,  $\phi_{s,jk}$  – геопотенциал на поверхности Земли (орография), задающий начальные условия для уравнения статики,  $T_{v,ijk}$  – виртуальные температуры на целых уровнях, определяемые как

$$T_{v,ijk} = T_{ijk} \left( 1 + \left( \frac{R_d}{R_v} - 1 \right) q_{ijk} \right), \quad (129)$$

где  $R_v$  – газовая постоянная для водяного пара. Целые геопотенциальные уровни определяются соотношениями:

$$P_{ijk} = \frac{1}{2} \left( P_{i-\frac{1}{2},jk} + P_{i+\frac{1}{2},jk} \right), \quad (130)$$

$$\phi_{ijk} = \phi_{i+\frac{1}{2},jk} + \alpha_{ijk} R_d T_{v,ijk},$$

где коэффициенты  $\alpha_{ijk}$  определяются следующим образом:

$$\alpha_{ijk} = \begin{cases} \ln 2, & i = 1 \\ 1 - \frac{P_{i-\frac{1}{2},jk}}{P_{i+\frac{1}{2},jk} - P_{i-\frac{1}{2},jk}} \ln \left( \frac{P_{i+\frac{1}{2},jk}}{P_{i-\frac{1}{2},jk}} \right), & i > 1 \end{cases} \quad (131)$$

Пользуясь формулой для парциального давления водяного пара:

$$P_{w,ijk} = \frac{q_{ijk} P_{ijk}}{\frac{R_d}{R_v} + \left( 1 - \frac{R_d}{R_v} \right) q_{ijk}}, \quad (132)$$

можно определить сеточное поле показателя преломления  $n_{ijk}$ :

$$n_{ijk} = 1 + c_1 \frac{P_{ijk}}{T_{ijk}} + c_2 \frac{P_{w,ijk}}{T_{ijk}^2} \quad (133)$$

Данные анализов ECMWF даны до высоты около 28 км. Однако точное вычисление углов рефракции требует наличия полей показателя преломления до высоты около 100 км. Поэтому мы дополняем сетку геопотенциальных уровней и сеточное поле показателя преломления, пользуясь климатологической моделью MSIS-90 [136]. Для этого мы задаем логарифмическую сетку полущелых уровней давления от 20 гПа (первый ненулевой уровень давления данных ECMWF) до  $10^{-5}$  гПа с отношением соседних уровней  $10^{1/3}$ , вводя целые уровни и вычисляя температуры на них, мы определяем геопотенциальные высоты, пользуясь уравнением статики так же, как это делалось выше. Из сеточных полей температуры и давления MSIS мы определяем поле показателя преломления.

В переходной области ECHAM–ECMWF уравнение статики, вообще говоря, нарушается. Чтобы восстановить уравнение статики, мы домножаем показатель преломления MSIS на корректирующий коэффициент. Поскольку для сухой атмосферы, показатель преломления пропорционален плотности, это эквивалентно умножению вертикального профиля давления MSIS на константу с сохранением вертикального профиля температуры.

Полученное сеточное поле геопотенциальных высот мы преобразуем в поле геометрических координат в системе центра Земли. При этом мы используем модель стандартного эллипсоида с полуосями  $R_e = 6378.1363$  км и  $R_p = 6356.7516$  км, соответствующую модель гравитационного поля и приближенные формулы для вычисления геометрических высот из геопотенциальных [137]–[139].

Так гравитационное поле на геоцентрической широте  $\varphi$  на высоте  $z$  над стандартным эллипсоидом вычисляется по приближенной формуле:

$$g = g_s \frac{R_0^2}{(R_0 + z)^2}, \quad (134)$$

где  $g_s$  гравитационное поле на поверхности:

$$g_s = g_e \left( 1 + f_2 \sin^2 \varphi - f_4 \frac{\sin^2(2\varphi)}{4} \right), \quad (135)$$

$R_0$  – эффективный радиус:

$$R_0 = \frac{g_s}{g_e} \frac{R_e}{\left( 1 + f + m + \left( -3f + \frac{5}{2}m \right) \sin^2 \varphi \right)}, \quad (136)$$

$g_e$  – гравитационное поле на экваторе:

$$g_e = \frac{GM}{10^6 R_e^2 \left( 1 - f + \frac{3}{2}m - \frac{15}{14}mf \right)} \quad (137)$$

$f = \frac{R_e - R_p}{R_e}$  – сплюснутость стандартного эллипсоида,  $GM = 3.9860044 \times 10^{14} \text{ м}^3 / \text{с}^2$

– гравитационная постоянная Земли,  $m = 0.00345$  – отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе,  $f_2 = -f + \frac{5}{2}m - \frac{17}{14}fm + \frac{15}{14}m^2$ ,  $f_4 = -\frac{f^2}{2} + \frac{5}{2}fm$ .

Высота  $z$  над стандартным эллипсоидом вычисляется из геопотенциальной высоты  $\phi$  по приближенной формуле:

$$z = \frac{R_0 \phi}{g_s R_0 - \phi}. \quad (138)$$

Для улучшения точности использовалась также модель геоида EGM-96 [140], [141]. При этом отклонения геоида от стандартного эллипсоида включалось в определение геопотенциала на поверхности  $\phi_{s,jk}$ .

Таким образом, мы вычисляем сеточное поле показателя преломления  $n_{ijk}$  и сетки геодезических координат: высоты  $z_{ijk}$ , широты  $\varphi_j$  и долготы  $\lambda_k$ . Сетка высот зависит от широты и долготы. Для произвольной заданной пространственной точки  $(z, \varphi, \lambda)$  мы используем следующую схему интерполяции.

Пусть заданная точка проектируется в ячейку  $(\varphi_{J..J+1}, \lambda_{K..K+1})$  широтно-долготной прямоугольной сетки. Тогда для четырех углов этой ячейки сначала производится сплайн интерполяция функции  $\ln(n-1) \equiv \ln N$  по  $z$ -координате и вычисляются четыре интерполированных значения  $\ln N_{jk}(z)$ , и производные  $\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial z}$  и  $\frac{\partial^2 \ln N_{jk}(z)}{\partial z^2}$  для индексов  $j = J..J+1$  и  $k = K..K+1$ , которые затем

линейно интерполируются по широте и долготе. При этом горизонтальной компонентой градиента показателя преломления мы пренебрегаем. Таким образом, у градиента и гессиана вычисляется лишь по одной ненулевой компоненте:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial z} &= N \frac{\partial \ln N}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} &= N \left( \frac{\partial^2 \ln N}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial \ln N}{\partial z} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (139)$$

Возможность пренебрежения горизонтальной компонентой градиента основана на том, что для счета лучей наиболее существенна вертикальная компонента. Наиболее существенный вклад в угол рефракции вносится отрезком луча в окрестности точки перигея, где луч почти горизонтален, и продольная компонента  $\nabla n$ , которая в любом случае существенно меньше вертикальной, почти не влияет на распространение луча. Поперечная компонента приводит к боковым возмущениям луча, которые составляют не более чем десятки метров, при длине трассы распространения в тысячи километров, и которыми поэтому можно также пренебречь.

Возможна, однако, и более сложная схема горизонтальной интерполяции, учитывающая горизонтальную компоненту градиента показателя преломления. Можно использовать  $4 \times 4 = 16$  точек широтно-долготной сетки для индексов  $j = J-1..J+2$ ,  $k = K-1..K+2$  и строить полиномиальную интерполяцию по широтам и долготам.

Двумерная интерполяция на прямоугольной сетке может быть представлена как прямое произведение двух одномерных интерполяций по долготе и широте. В этом случае интерполированное значение функции может быть записано в виде:

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{j,k} w_j^\varphi(\varphi) w_k^\lambda(\lambda) f_{jk}, \quad (140)$$

где  $f_{jk}$  – сеточные значения функции,  $w_j^\varphi(\varphi)$  и  $w_k^\lambda(\lambda)$  – весовые функции для одномерной интерполяции по широте и по долготе. Производные интерполированной функции вычисляются по формуле:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial \varphi^\alpha \partial \lambda^\beta} f(\varphi, \lambda) = \sum_{j,k} \frac{\partial^\alpha}{\partial \varphi^\alpha} w_j^\varphi(\varphi) \frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} w_k^\lambda(\lambda) f_{jk}, \quad (141)$$

при условии, что весовые функции обладают соответствующей гладкостью.

Мы сейчас опишем одномерную кусочно-полиномиальную интерполяцию с непрерывными первыми производными. Для заданного интервала индексов  $j = J - 1..J + 2$  мы будем строить кубический полином в интервале  $\varphi_j.. \varphi_{j+1}$ , с заданными значениями  $f_j$ ,  $f_{j+1}$  и производными  $d_j$ ,  $d_{j+1}$  на краях интервала. При этом производные в узлах сетки мы определим конечно-разностным отношением:

$$d_j = \frac{1}{2} \left( \frac{f_{j+1} - f_j}{\varphi_{j+1} - \varphi_j} + \frac{f_j - f_{j-1}}{\varphi_j - \varphi_{j-1}} \right). \quad (142)$$

В этом случае соответствующие четыре весовые функции будут выражаться формулами:

$$\begin{aligned} w_1^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_2)(\varphi - \varphi_3)^2}{2(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_3)^2}, \\ w_2^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_3)}{(\varphi_2 - \varphi_3)^3} \left( (3\varphi_2 - \varphi_3 - 2\varphi)(\varphi - \varphi_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_2) \left( \varphi - \varphi_2 + \frac{(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)(\varphi - \varphi_3)}{\varphi_2 - \varphi_3} \right) \right), \\ w_3^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_2)}{(\varphi_3 - \varphi_2)^3} \left( (3\varphi_3 - \varphi_2 - 2\varphi)(\varphi - \varphi_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_3) \left( \varphi - \varphi_3 + \frac{(\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_2)(\varphi - \varphi_2)}{\varphi_3 - \varphi_2} \right) \right), \\ w_4^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_3)(\varphi - \varphi_2)^2}{2(\varphi_4 - \varphi_3)(\varphi_3 - \varphi_2)^2}. \end{aligned} \quad (143)$$

Мы записали формулы для интервала индексов 1..4, интерполяционный полином строится между 2-м и 3-м узлами. На краях сетки широт (т.е. у полюсов) достаточно задать только одно значение производной и строить квадратичный полином. Так у Южного полюса весовые функции вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 w_2^\varphi &= \frac{(\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi)(\varphi - \varphi_3)}{2(\varphi_2 - \varphi_3)^2}, \\
 w_3^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_2)}{(\varphi_3 - \varphi_2)^2} \left( 2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi + \frac{(2\varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4)(\varphi - \varphi_3)}{2(\varphi_3 - \varphi_4)} \right), \\
 w_4^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_2)(\varphi - \varphi_3)}{2(\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_4 - \varphi_3)}.
 \end{aligned} \tag{144}$$

Аналогично у Северного полюса:

$$\begin{aligned}
 w_1^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_2)(\varphi - \varphi_3)}{2(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_3)}, \\
 w_2^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_3)}{(\varphi_2 - \varphi_3)^2} \left( 2\varphi_2 - \varphi_3 - \varphi + \frac{(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)(\varphi - \varphi_2)}{2(\varphi_2 - \varphi_1)} \right), \\
 w_3^\varphi &= \frac{(\varphi - \varphi_2)(\varphi_3 - 2\varphi_2 + \varphi)}{2(\varphi_3 - \varphi_2)^2}.
 \end{aligned} \tag{145}$$

Аналогично строятся формулы для интерполяции по долготе с тем лишь упрощением, что всегда используются формулы типа (143). Необходимо лишь в алгоритме предусмотреть корректную обработку нулевого меридиана, в окрестности которого могут использоваться, скажем, четыре долготы 358°, 359°, 0°, 1° для интерполяции между 359° и 0°.

Пользуясь этими интерполяционными полиномами с непрерывной первой производной для интерполяции  $\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \ln N_{jk}(z)$ ,  $\alpha = 0..2$ , можно вычислить

$\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \varphi^\beta} \frac{\partial^\gamma}{\partial \lambda^\gamma} n(z, \varphi, \lambda)$ ,  $\beta = 0..1$ ,  $\gamma = 0..1$ . Таким образом, мы вычисляем все 3 компоненты градиента, а у гессиана мы теперь пренебрегаем лишь элементами  $\frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2}$  и  $\frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2}$ .

Поскольку в дальнейшем при счете лучей и волн мы будем пользоваться декартовыми координатами, то градиент и гессиан должны быть преобразованы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial x_i} &= \frac{\partial \check{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial n}{\partial \check{x}_j}, \\
 \frac{\partial^2 n}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \check{x}_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial n}{\partial \check{x}_k} + \frac{\partial \check{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \check{x}_l}{\partial x_j} \frac{\partial^2 n}{\partial \check{x}_k \partial \check{x}_l},
 \end{aligned} \tag{146}$$

где мы обозначили  $\check{x}_j = (z, \varphi, \lambda)$  – геодезические координаты,  $x_j$  – декартовы координаты.

Следует также отметить, что геодезические координаты имеют особенности на полюсах. Мы, однако, всюду пренебрегаем этим, поскольку вероятность того, что будет необходимо обрабатывать данные, измеренные в очень малой его окрестности полюса, крайне невысока, и такие данные можно всегда отбросить.

Возможны и более сложные схемы интерполяции, например, двумерная сплайн-интерполяция по широте и долготе, обеспечивающая непрерывность первых и вторых производных. Существенным недостатком этой схемы является то, что для нее требуется большой объем вычислений, и она в результате оказывается довольно медленной. Причина этого состоит в том, что сплайн зависит от данных во всех точках сетки, тогда как предлагаемая схема интерполяции локальна.

Можно использовать  $6 \times 6 = 36$  точек долготно-широтной сетки и строить интерполяционные полиномы пятой степени с непрерывными первыми и вторыми производными. Формулы для таких полиномов, конечно, оказываются довольно громоздкими, а объем вычислений возрастает примерно вдвое по сравнению с 16-точечной схемой. При этом даже точность простейшей линейной интерполяции по широте и долготе чаще всего оказывается достаточной для наших целей.

### 3. Решение обратной задачи в приближении геометрической оптики

#### 3.1. Обращение углов рефракции

Мы переходим к решению обратной задачи радиозатменного зондирования атмосферы Земли. Простейший подход состоит в использовании приближений геометрической оптики и сферической симметрии атмосферы.

Радиозатменные данные представляют собой массивы измерений, включающих следующие переменные: орбитальные данные спутников: координаты спутника системы GPS или, в общем случае, спутника, оборудованного передатчиком,  $x_T(t)$ , и координаты спутника, оборудованного приемником  $x_R(t)$ , и измерения фазовой задержки  $\Delta s_{1,2}(t)$  и амплитуды  $A_{1,2}(t)$ . Нижний индекс относится к номеру частотного канала. Как мы видели в разделе 5.1, посвященном описанию геометрооптической модели радиозатменных экспериментов, нелинейная система уравнений (99) при наложении условия сферической симметрии среды и однолучевого распространения однозначно связывает производные фазовой задержки и орбитальные данные с направлениями луча у источника и приемника через, а значит, и с прицельными параметрами и углами рефракции в двух частотных каналах. Таким образом, определяются профили углов рефракции  $\varepsilon_{1,2}(p)$ . Измеряемые фазовые задержки и получаемые из них углы рефракции включают ионосферную компоненту. Поскольку ионосферный индекс рефракции обратно пропорционален квадрату частоты, то в рамках линейного приближения нейтральный угол равен линейной комбинации углов рефракции в двух частотных каналах [142]:

$$\varepsilon(p) = \frac{f_1^2 \varepsilon_1(p) - f_2^2 \varepsilon_2(p)}{f_1^2 - f_2^2}. \quad (147)$$

Как мы отмечали, линейная комбинация подавляет лишь крупномасштабную компоненту ионосферного вклада. Мелкомасштабная компонента приводит к появлению остаточной ошибки ионосферной коррекции. Связь между углом рефракции и профилем показателя преломления задается уравнением (87), которое мы перепишем в виде свертки, перейдя к переменным  $x^2$  и  $p^2$  и введя дополнительный нормировочный множитель:

$$\frac{\varepsilon(p)}{2\sqrt{\pi p}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_p^\infty \frac{d \ln n}{d(x^2)} \frac{d(x^2)}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad (148)$$

Рассмотрим решение уравнений такого типа. Оператор вида:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty \frac{f(x) dx}{\sqrt{x - y}}, \quad (149)$$

переводящий функцию  $f(x)$  в функцию  $g(y)$ , обладает интересным свойством: его квадрат равен оператору интегрирования с переменным нижним пределом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{g(y) dy}{\sqrt{y - x}} &= \frac{1}{\pi} \int_x^\infty \int_y^\infty \frac{f(x') dx'}{\sqrt{x' - y}} \frac{dy}{\sqrt{y - x}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_x^\infty f(x') \int_x^{x'} \frac{dy}{\sqrt{(x' - y)(y - x)}} dx' = \int_x^\infty f(x') dx'. \end{aligned} \quad (150)$$

Это позволяет записать решение уравнения (149):

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{g(y) dy}{\sqrt{y - x}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{dg}{dy} \frac{dy}{\sqrt{y - x}}, \quad (151)$$

где мы воспользовались свойством производной свертки:

$$(g * h)' = g' * h = g * h'. \quad (152)$$

Взаимно-обратные интегральные преобразования (149) и (151) носят имя выдающего норвежского математика Нильса Хенрика Абеля. С использованием преобразований с ядром типа  $(y - x)^{-\alpha}$  вводятся операторы дробного интегрирования и дифференцирования произвольной степени [143]. В частности, операторы (149) и (151) являются операторами половинного интегрирования и дифференцирования соответственно.

Поскольку уравнение (148) аналогично (151), его решение аналогично (149):

$$\ln n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty \frac{\varepsilon(p)}{p} \frac{d(p^2)}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_x^\infty \frac{\varepsilon(p) dp}{\sqrt{p^2 - x^2}}. \quad (153)$$

или

$$n(x) = \exp \left( \frac{1}{\pi} \int_x^\infty \frac{\varepsilon(p) dp}{\sqrt{p^2 - x^2}} \right). \quad (154)$$

Эта формула дает точное решение обратной задачи для сферически-слоистой среды без волноводов. Эта формула очень широко применяется как приближенное решение для реальной атмосферы с горизонтальными градиентами [144]–

[149]. Восстановленную зависимость  $n(x)$  можно преобразовать в  $n(r)$ , пользуясь формулой  $r(x) = \frac{x}{n(x)}$ .

### 3.2. Влияние волноводов

Вывод формулы для угла рефракции в разделе 5.1 не требовал отсутствия волноводов, но он справедлив лишь для лучей с единственной точкой перигея, т.е. для любого луча на трассе космос–космос. Этот вывод неприменим для луча, заключенного в бесконечном волноводе. Формально угол рефракции такого луча бесконечен. Рассмотрим ситуацию с волноводом в интервале радиусов от  $r_1$  до  $r_2$ . Как следует из рассмотрения в разделе 5.1 (рис. 4),  $n(r_1)r_1 = n(r_2)r_2 = x_s$ . В реалистичных условиях профили показателя преломления практически всегда монотонно убывают с высотой. В частности, для волновода в силу того, что  $r_1 < r_2$ , должно быть  $n(r_1) > n(r_2)$ . Рассмотрим профиль  $n^*(x)$ , составленный из участков профилей  $n(x)$  под волноводом и над волноводом. В точке  $x_s$  логарифм этого профиля имеет отрицательный скачок  $\Delta \ln n = \ln n(r_2) - \ln n(r_1)$ . Чтобы точно восстановить профиль  $n^*(x)$  по формуле (154), необходим профиль угла рефракции, равный:

$$\varepsilon^*(p) = \begin{cases} \varepsilon(p), & p > x_s \\ -2p \int_p^{x_s} \frac{d \ln n^*}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} + \frac{2p |\Delta \ln n|}{\sqrt{x_s^2 - p^2}}, & p < x_s \end{cases} \quad (155)$$

где добавка учитывает дельта функцию в производной  $\ln n$  для лучей с точками перигея ниже волновода. Фактически измеряемый профиль угла рефракции при  $p < x_s$  можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(p) = -2p \int_p^{x_s} \frac{d \ln n^*}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} + 2p \int_{n_1}^{n_2} \frac{|d \ln n|}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad (156)$$

где последний член относится к участку профиля  $n$  внутри волновода, и где  $x > x_s$ . В силу этого мы приходим к оценке:

$$2p \int_{n_1}^{n_2} \frac{|d \ln n|}{\sqrt{x^2 - p^2}} < \frac{2p |\Delta \ln n|}{\sqrt{x_s^2 - p^2}}. \quad (157)$$

Следовательно  $\varepsilon(p) < \varepsilon^*(p)$  при  $p < x_s$ . Это приводит к тому, что применение формулы обращения в присутствии волноводов будет приводить к систематической отрицательной ошибке восстановления  $n(r)$ , при этом восстановить структуру волновода оказывается невозможным.

Это рассмотрение носило формальный характер. Угол рефракции имеет особенность при  $p = x_s$ . Практически измеряемые углы рефракции всегда конечны. Сильные пики в профиле угла соответствуют сигналам с низкой амплитудой, которые могут теряться на фоне измерительных шумов. Это усиливает систематическую отрицательную ошибку [151], [152]. Волноводы систематически образуются на высотах 1–2 км в морском пограничном слое в определенных регионах над Атлантическим и Тихим океанах, где они могут приводить к значительным систематическим ошибкам восстановления показателя преломления [153].

### 3.3. Восстановление метеопараметров

Восстановленные профили  $n(r)$  используются для определения температуры. При этом используются уравнение состояния:

$$P = R_d (1 + c_q q) \rho T, \quad (158)$$

где  $c_q = \frac{R_v}{R_d} - 1$ , и уравнение статики:

$$\frac{dP(z)}{dz} = -g(z) \rho(z), \quad (159)$$

где  $R_d$  – газовая постоянная для сухого воздуха,  $R_v$  – газовая постоянная для водяного пара,  $q$  – удельная влажность,  $\rho$  – плотность воздуха,  $g(z)$  – ускорение силы тяжести на высоте  $z$ .

На высотах более 7–12 км влажность атмосферы становится пренебрежимо малой. Если ионосферный вклад в угол рефракции исключен, то восстановленный показатель преломления целиком относится к нейтральной атмосфере. Тогда можно определить плотность:

$$\rho(z) = \frac{N(z)}{C_1 R_d}. \quad (160)$$

Интегрируя затем уравнение статики (159), получаем давление  $P(z)$ , и из уравнения состояния (158) с  $q = 0$  находим температуру  $T(z)$ .

В нижней тропосфере нужно определять две неизвестных величины: температуру  $T(z)$  и удельное влагосодержание  $q(z)$ . Одного только профиля показателя преломления  $n(z)$  для этого уже недостаточно. Возможны следующие способы обработки нижнетропосферных данных.

1. Восстановление «сухой температуры» в пренебрежении вкладом влажности. Такой способ очень удобен для оценки точности определения угла рефракции в численных экспериментах. При этом вместо сравнения найденного профиля угла рефракции с эталонным сравниваются профили сухой температуры. Мы будем пользоваться этим методом сравнения.

2. Можно использовать восстановленный показатель преломления  $n(z) = 1 + N(z)$  и априорно заданный (например, на основании численного прогноза) профиль влажности  $q(z)$  для определения температуры. Воспользуемся соотношением (18):

$$P_w = \frac{Pq}{a_q + b_q q}, \quad (161)$$

где  $a_q = \frac{R_d}{R_v}$ ,  $b_q = 1 - \frac{R_d}{R_v}$ . Отсюда и из (3) можно найти зависимость

$$T(P, q, N) = \frac{C_1 P + \sqrt{C_1^2 P^2 + \frac{4C_3 N P q}{a_q + b_q q}}}{2N}. \quad (162)$$

Тогда из (158) и (159) получаем:

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{g(z)P(z)}{R_d(1+c_q q(z))T(P(z), q(z), N(z))}. \quad (163)$$

При заданных  $N(z)$  и  $q(z)$  правая часть здесь является известной функцией давления. Это позволяет проинтегрировать уравнение (163) и найти профиль давления  $P(z)$  и профиль температуры  $T(z) = T(P(z), q(z), N(z))$ . Такая температура называется гибридной [150], [144].

3. Аналогично определяется гибридный профиль влажности из восстановленного показателя преломления  $n(z)$  и заданной температуры  $T(z)$ . Из формул (3) и (161) получаем зависимость:

$$q(P, T, N) = \frac{a_q T (C_1 P - NT)}{b_q NT^2 - (C_1 b_q T + C_3) P}. \quad (164)$$

Уравнение статики тогда запишется в виде:

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{g(z)P(z)}{R_d(1+c_q q(P(z), T(z), N(z)))T(z)}. \quad (165)$$

Его можно проинтегрировать и вычислить профиль давления  $P(z)$ , а затем найти профиль влажности  $q(z) = q(P(z), T(z), N(z))$ .

### 3.4. Восстановление комплексного показателя преломления

Формула обращения для поглощения выводится из (115) аналогично формуле обращения для углов рефракции:

$$kn_I(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{dx}{dr} \int_x^\infty \frac{d\tau}{dp} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - x^2}}. \quad (166)$$

Снова пользуясь свойством свертки (152), преобразуем формулу обращения:

$$\begin{aligned} kn_I(x) &= -\frac{1}{\pi} \frac{dx}{dr} \int_x^\infty \frac{d\tau}{dp^2} \frac{dp^2}{\sqrt{p^2 - x^2}} = -\frac{1}{\pi} \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx^2} \int_x^\infty \tau(p) \frac{dp^2}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \\ &= -\frac{1}{\pi x} \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} \int_x^\infty \tau(p) \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - x^2}} = -\frac{1}{\pi x} \frac{d}{dr} \int_x^\infty \tau(p) \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - x^2}}. \end{aligned} \quad (167)$$

Этот вариант формулы удобнее для практических применений, поскольку дифференцирование применяется не непосредственно к зашумленной измеряемой функции  $\tau(p)$ , а к ее интегральному преобразованию, обладающего свойством сглаживания.

### 3.5. Обращение комплексного показателя преломления

По восстановленным профилям комплексного показателя преломления на нескольких частотах можно восстанавливать профили давления, температуры и влажности. Дисперсия действительной части показателя преломления пренебрежимо мала, поэтому можно считать, что имеются профили  $N(z)$  и  $N_I^{(i)}(z)$ ,  $I = 1, K$ , где  $K$  – количество частотных каналов. Модель распространения миллиметровых волн, которую мы обсуждали в разделе 2.3, определяет зависимость комплексно-

го показателя преломления от метеопараметров:  $N = N^{(MPM)}(P, T, q)$ ,  $N_I = N_I^{(MPM)}(f, P, T, q)$ . Поэтому можно записать нелинейную систему из  $K+1$  уравнений:

$$\begin{aligned} N(z) &= N^{(MPM)}(P, T, q), \\ N_I^{(i)}(z) &= N_I^{(MPM)}(f_i, P, T, q). \end{aligned} \quad (168)$$

где давление  $P$  является свободным параметром, от которого зависят решения  $T(P, N(z), N_I(z))$  и  $q(P, N(z), N_I(z))$ , через  $N_I$  мы обозначили совокупность мнимых частей показателя преломления во всех каналах  $\{N_I^{(i)}, I = 1..K\}$ . Эту систему можно решать численно, например, методом оптимизации по Роджеру, который учитывает априорную информацию об ошибках восстановления профилей показателя преломления. Профиль давления можно найти, интегрируя уравнение статики:

$$\frac{dP(z)}{dz} = - \frac{g(z)P(z)}{R_d(1 + c_q q(P(z), N(z), N_I(z)))T(P(z), N(z), N_I(z))}. \quad (169)$$

Подставляя полученный профиль давления в решения системы (168), мы получаем профили температуры  $T(z) = T(P(z), N(z), N_I(z))$  и влажности  $q(z) = q(P(z), N(z), N_I(z))$ .

Простую модель ошибок восстановления мнимой части показателя преломления можно получить из формулы (113) для ошибки интегрального поглощения:

$$\delta N_I(x) = CN_I(x) \frac{\exp \tau(x)}{\bar{\kappa}(x)}, \quad (170)$$

где нормированная амплитуда  $\bar{\kappa}(x)$  вычисляется для гладкой модели атмосферы. Нормировочный множитель  $C$  зависит от ковариационных матриц ошибок измерения, и проще всего его определить по восстановленным значениям  $N_I$  на высотах 20–25 км. Априори известно, что поглощение на этих высотах очень мало, и поэтому восстановленный профиль  $N_I$  будет давать оценку уровня шумов.

Модель распространения миллиметровых волн определяет зависимость комплексного показателя преломления также от других метеопараметров, таких как содержание жидкой (капельной) воды, скорость выпадение дождя, содержание льда. Поэтому можно аналогично сформулировать задачу восстановления большего количества метеопараметров, например, температуры, давления, влажности и содержания жидкой воды. Практически, однако, такая задача оказывается неустойчивой, если использовать только частотные каналы на крыле линии поглощения водяного пара.

## Литература

- [1] *Fjeldbo G., Eshleman V.R.* The Bistatic Radar-Occultation Method for the Study of Planetary Atmospheres // *J. Geophys. Res.* 1965. V. 70(13). P. 3217–3225.
- [2] *Mariner Stanford Group.* Venus Ionosphere and Atmosphere as Measured by Dual-Frequency Radio Occultation of Mariner V. *Science* 1967. V. 158(3809). P. 1678–1683.
- [3] *Kliore A., Tito D.A.* Radio occultation investigations of the atmosphere of Mars // *J. Spacecraft Rockets* 1967. V. 4(5). P. 578–582.
- [4] *Phinney R.A., Anderson D.L.* On the Radio Occultation method for studying planetary atmospheres // *J. Geophys. Res.* 1968. V. 73(5). P. 1819–1827.

- [5] *Fjeldbo G., Eshleman V.R.* The atmosphere of Mars analyzed by integral inversion of the Mariner IV occultation data // *Planet. Space Sci.* 1968. V. 16(8). P. 1035–1059.
- [6] *Kliore A., Fjeldbo G., Seidel B.* First Results of the Mariner-6 Radio Occultation Measurement of the Lower Atmosphere of Mars // *Radio Sci.* 1970. V. 5(2). P. 373–379.
- [7] *Hogan J.S., Stewart R.W., Rasool S.I.* Radio Occultation Measurements of The Mars Atmosphere with Mariners 6 and 7 // *Radio Sci.* 1972. V. 7(5). P. 525–537.
- [8] *Kliore A.J., Cain D.L., Fjeldbo G., Seidel B.L., Sykes M.J., Rasool S.I.* The atmosphere of Mars from mariner 9 radio occultation measurements // *Icarus.* 1972. V. 17(2). P. 484–516.
- [9] *Fjeldbo G., Seiden B., Sweetnam D.* The Mariner 10 Radio Occultation Measurements of the Ionosphere of Venus // *J. Atmos. Sci.* 1975. V. 32(6). P. 1232–1236.
- [10] *Fjeldbo G., Kliore A., Seidel B., Sweetnam D., Cain D.* The Pioneer 10 radio occultation measurements of the ionosphere of Jupiter // *Astronomy and Astrophysics.* 1975. V. 39(1). P. 91–96.
- [11] *Kolosov M.A. et al.* Radio occultation measurements of Venus atmosphere by means of satellites Venera-9 and Venera-10 // *Radiotekhnika I Elektronika.* 1976. V. 21(8). P. 1585–1594.
- [12] *Aleksandrov Y.N. et al.* Preliminary results of the two-frequency radio occultation of the nocturnal ionosphere of Venus using the Venera 9 and 10 satellites // *Doklady Akademii Nauk SSSR.* 1976. V. 229(1). P. 55–58.
- [13] *Kolosov M.A., Yakovlev O.I., Efimov A.I., Pavelyev A.G., Matyugov S.S.* Radio occultation of the Venusian atmosphere and bistatic radiolocation of the surface of Venus using the Venera-9 and Venera-10 satellites // *Radio Sci.* 1979. V. 14(1). P. 163–173.
- [14] *Kliore A.J. et al.* Vertical structure of the ionosphere and upper neutral atmosphere of Saturn from the Pioneer Radio Occultation // *Science.* 1980. V. 207 (4429). P. 446–449.
- [15] *Goff R.W., Grossi M.D., Harrington J.V., Langworthy B.M.* Orbiter-to-orbiter radio occultation measurements of planetary atmospheres and ionospheres // *AIAA J.* 1970. V. 8(7). P. 1335–1342.
- [16] *Timofeeva T.S., Efimov A.I., Iakovlev O.I.* Influence of refraction on amplitude fluctuations of radio waves in the radio occultation of the Venusian atmosphere // *Radiotekhnika I Elektronika.* 1980. V. 25. P. 449–458.
- [17] *Marouf E.A., Tyler G.L., Eshleman V.R.* Theory of radio occultation by Saturn's rings // *Icarus.* 1982. V. 49 (2). P. 161–193.
- [18] *Marouf E.A., Tyler G.L., Rosen P.A.* Profiling Saturn's rings by radio occultation // *Icarus.* 1986. V. 68 (1). P. 120–166.
- [19] *Rangaswamy S.* Recovery of atmospheric parameters from the Apollo/Soyuz-ATS-F radio occultation data // *Geophys. Res. Lett.* 1976. V. 3 (8). P. 483–486.
- [20] *Калашников И.Э., Яковлев О.И.* О возможности исследования атмосферы Земли методом радиопросвечивания // *Космические исследования.* 1978. Т. 16. № 6. С. 943–948.
- [21] *Калашников И.Э., Яковлев О.И.* Об определении параметров атмосферы Земли методом радиопросвечивания // *Труды пятого всесоюзного совещания по радиометеорологии.* М.: Гидрометиздат, 1981. С. 184.
- [22] *Калашников И.Э., Матюгов С.С., Павельев А.Г., Яковлев О.И.* Анализ особенностей метода радиопросвечивания атмосферы Земли // *Электромагнитные волны в атмосфере и космическом пространстве.* М.: Наука, 1986. С. 208.
- [23] *Елисеев С.Д., Яковлев О.И.* Радиопросвечивание атмосферы Земли в диапазоне миллиметровых радиоволн // *Известия вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 32. № 1. С. 3–10.

- [24] Яковлев О.И., Гришмановский В.А., Елисеев С.Д., Кучерявенков А.И., Матюгов С.С. Радиопросвечивание атмосферы Земли с помощью двух спутников // Докл. АН. 1990. Т. 315. № 1. С. 101–103.
- [25] Яковлев О.И., Вилков И.А., Гришмановский В.А., Елисеев С.Д., Кучерявенков А.И., Ломаева В.В., Матюгов С.С., Молотов Е.П. Рефракционное ослабление при радиопросвечивании атмосферы Земли на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. № 1. С. 42–48.
- [26] Вилков И.А., Матюгов С.С., Яковлев О.И. Флуктуации амплитуды при радиопросвечивании атмосферы Земли на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 5. С. 795–803.
- [27] Yakovlev O.I., Matyugov S.S., Vilkov L.A. Attenuation and scintillation of radio waves Earth atmosphere in radio occultation experiments on the satellite-to-satellite link // Radio Sci. 1995. V. 30. № 3. P. 591–602.
- [28] Яковлев О.И., Вилков И.А., Захаров А.И., Кучерявенкова И.Л., Кучерявенков А.И., Матюгов С.С. Изменение частоты, запаздывание и рефракция радиоволн в затменных экспериментах на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40. № 9. С. 1337–1345.
- [29] Яковлев О.И., Матюгов С.С., Вилков И.А., Захаров А.И., Кучерявенкова И.Л. Флуктуации фазы и частоты радиоволн в затменных экспериментах на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 9. С. 1088–1093.
- [30] Гурвич А.С., Красильникова Т.Г. Навигационные спутники для радиозондирования атмосферы Земли // Исследования Земли из космоса. 1987. Т. 7. № 6. С. 1124–1131.
- [31] Melbourne W.G., Yunck T.P., Young L.E., Hager B.H., Lindal G.F., Liu C.H., Born G.H. GPS geoscience instrument for EOS and Space Station // JPL Proposal to NASA AO OSSA-1-88. PL, 1988.
- [32] Gorbunov M.E., Sokolovskiy S.V. Remote sensing of refractivity from space for global observations of atmospheric parameters // Max-Planck-Institut für Meteorologie. 1993. Report Number 119.
- [33] Gorbunov M.E., Sokolovskiy S.V., Bengtsson L. Space refractive tomography of the atmosphere Modeling of direct and inverse problems. Max-Planck-Institut für Meteorologie Report No. 210, Hamburg, Germany. 1996.
- [34] Ware R., Exner M., Feng D., Gorbunov M., Hardy K., Herman B., Kuo Y.-H., Meehan T., Melbourne W., Rocken C., Schreiner W., Sokolovskiy S., Solheim F., Zou X., Anthes R., Businger S., Trenberth K. GPS sounding of the atmosphere from Low Earth Orbit Preliminary results // Bulletin of the Amer. Meteorol. Soc. 1996. No. 77. P. 19–40.
- [35] Kursinski E.R. et al. Initial Results of Radio Occultation Observations of Earth's Atmosphere Using the Global Positioning System // Science. 1996. V. 271(5252). P. 1107–1110.
- [36] Rocken C., Anthes R., Exner M., Hunt D., Sokolovskiy S., Ware R., Gorbunov M., Schreiner W., Feng D., Herman B., Kuo Y.-H., Zou X. Analysis and validation of GPS/MET data in the neutral atmosphere // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. No. D25. P. 29849–29866.
- [37] Gorbunov M.E., Gurvich A.S. Algorithms of inversion of Microlab-1 satellite data including effects of multipath propagation // Intern. J. Remote Sensing. 1998. V. 19. N 12. P. 2283–2300.
- [38] Gorbunov M.E., Gurvich A.S. Microlab-1 experiment multipath effects in the lower troposphere. J. Geophys. Res. 1998. V. 103. N D12. P. 13819–13826.
- [39] Gorbunov M.E., Kornblueh L. Analysis and validation of GPS/MET radio occultation data // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. N D15. P. 17161–17169.
- [40] Schreiner W.S., Sokolovskiy S.V., Rocken C., Hunt D.C. Analysis and validation of GPS/MET radio occultation data in the ionosphere // Radio Sci. 1999. V. 34(4). P. 949–966.

- [41] Vorob'ev V.V., Gurvich A.S., Kan V., Sokolovskiy S.V., Fedorova O.V., Shmakov A.V. Structure of the ionosphere from the radio-occultation GPS-"Microlab-1" satellite data Preliminary results // Earth Observation and Remote Sensing. 1999. V. 15. P. 609–622.
- [42] Gorbunov M.E., Gurvich A.S., Shmakov A.V. Back-propagation and radio-holographic methods for investigation of sporadic ionospheric E-layers from Microlab-1 data // Int. J. Remote Sens. 2002. V. 23 (4). P. 675–685.
- [43] Sokolovskiy S., Schreiner W., Rocken C., Hunt D. Detection of high-altitude ionospheric irregularities with GPS/MET // Geophys. Res. Lett. 2002. V. 29 (3). P. 1033.
- [44] Wickert J. et al. Atmosphere sounding by GPS radio occultation First results from CHAMP // Geophys. Res. Lett. 2001. V. 28 (17). P. 3263–3266.
- [45] Jakowski N., Wehrenpfennig A., Heise S., Reigber Ch., Lühr H., Grunwaldt L., Meehan T.K. GPS radio occultation measurements of the ionosphere from CHAMP Early results // Geophys. Res. Lett. 2002. V. 29 (10). P. 1457.
- [46] Beyerle G., Hocke K., Wickert J., Schmidt T., Marquardt C., Reigber C. GPS radio occultations with CHAMP A radio holographic analysis of GPS signal propagation in the troposphere and surface reflections // J. Geophys. Res. 2002. V. 107(D24). P. 4802.
- [47] Gorbunov M.E. Canonical transform method for processing radio occultation data in the lower troposphere // Radio Sci. 2002. V. 37(5). P. 1076.
- [48] Gorbunov M.E., Kornblueh L. Analysis and validation of Challenging Minisatellite Payload (CHAMP) radio occultation data // J. Geophys. Res. 2003. V. 108. P. 4584.
- [49] Marquardt C., Schöellhammer K., Beyerle G., Schmidt T., Wickert J., Reigber C. Validation and Data Quality of CHAMP Radio Occultation Data // First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies / Reigber C., Lühr H., Schwintzer P. (eds.). Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2003. P. 384–396.
- [50] Beyerle G., Wickert J., Schmidt T., Reigber C. Atmospheric sounding by global navigation satellite system radio occultation An analysis of the negative refractivity bias using CHAMP observations // J. Geophys. Res. 2004. V. 109. D01106.
- [51] Jensen A.S., Lohmann M.S., Benzon H.-H., Nielsen A.S. Full spectrum inversion of radio occultation signals // Radio Sci. 2003. V. 38. P. 1040.
- [52] Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S., Benzon H.-H. Geometrical optics phase matching of radio occultation signals // Radio Sci. 2004. V. 39. RS3009.
- [53] Gorbunov M.E., Benzon H.-H., Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S. Comparative analysis of radio occultation processing approaches based on Fourier integral operators. Radio Sci. 2004. V. 39. RS6004
- [54] Gorbunov M.E., Lauritsen K.B. Analysis of wave fields by Fourier integral operators and their application for radio occultations // Radio Sci. 2004. V. 39. RS4010.
- [55] Rocken C., Kuo Y.-H., Schreiner W.S., Hunt D., Sokolovskiy S., McCormick C. COSMIC System Description // Terr. Atmos. Oceanic Sci. 2000. V. 11 (1). P. 21–52.
- [56] Anthes R.A., Rocken C., Kuo Y.-H. Applications of COSMIC to Meteorology and Climate // Terr. Atmos. Ocean. Sci. 2000. V. 11 (1). P. 115–156.
- [57] Cucurull L., Kuo Y.-H., Barker D., Rizvi S.R.H. Assessing the Impact of Simulated COSMIC GPS Radio Occultation Data on Weather Analysis over the Antarctic A Case Study // Mon. Wea. Rev. 2004. V. 134 (11). P. 3283–3296.
- [58] Wu B.-H., Chu V., Chen P., Ting T. FORMOSAT-3/COSMIC science mission update // GPS Solut. 2005. V. 9 (2). P. 111–121.
- [59] Sokolovskiy S.V., Rocken C., Lenschow D.H., Kuo Y.-H., Anthes R.A., Schreiner W.S., Hunt D.C. Observing the moist troposphere with radio occultation signals from COSMIC // Geophys. Res. Lett. 2007. V. 34. L18802.

[60] Schreiner W., Rocken C., Sokolovskiy S., Syndergaard S., Hunt D. Estimates of the precision of GPS radio occultations from the COSMIC/FORMOSAT-3 mission // *Geophys. Res. Lett.* 2007. V. 34. L04808.

[61] Wang K.-Y., Lin S.-C. First continuous GPS soundings of temperature structure over Antarctic winter from FORMOSAT-3/COSMIC constellation // *Geophys. Res. Lett.* 2007. V. 34. L12805.

[62] Sokolovskiy S., Schreiner W., Rocken C., Hunt D. Optimal Noise Filtering for the Ionospheric Correction of GPS Radio Occultation Signals // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 2009. V. 26(7). P. 1398–1403.

[63] Sokolovskiy S., Rocken C., Schreiner W., Hunt D., Johnson J. Postprocessing of L1 GPS radio occultation signals recorded in open-loop mode // *Radio Sci.* 2009. V. 44. RS2002.

[64] Schreiner W., Rocken C., Sokolovskiy S., Hunt D. Quality Assessment of COSMIC/FORMOSAT-3 GPS radio occultation data derived from single- and double-difference atmospheric excess phase processing // *GPS Solut.* 2009. V. 14 (1). P. 13–22.

[65] Zeng Z., Sokolovskiy S. Effect of sporadic E clouds on GPS radio occultation signals // *Geophys. Res. Lett.* 2010. V. 37. L18817.

[66] Yue X., Schreiner W.S., Lei J., Sokolovskiy S.V., Rocken C., Hunt D.C., Kuo Y.-H. Error analysis of Abel retrieved electron density profiles from radio occultation measurements // *Ann. Geophys.* 2010. V. 28. P. 217–222.

[67] Yue X., Schreiner W.S., Lei J., Rocken C., Kuo Y.-H., Wan W. Climatology of ionospheric upper transition height derived from COSMIC satellites during the solar minimum of 2008 // *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2010. V. 72 (17). P. 1270–1274.

[68] Sun B., Reale A., Seidel D.J., Hunt D.C. Comparing radiosonde and COSMIC atmospheric profile data to quantify differences among radiosonde types and the effects of imperfect collocation on comparison statistics // *J. Geophys. Res.* 2010. V. 115. D23104.

[69] Sokolovskiy S., Rocken C., Schreiner W., Hunt D. On the uncertainty of radio occultation inversions in the lower troposphere // *J. Geophys. Res.* 2010. V. 115. D22111.

[70] Schreiner W., Rocken C., Sokolovskiy S., Hunt D. Quality assessment of COSMIC/FORMOSAT-3 GPS radio occultation data derived from single- and double-difference atmospheric excess phase processing // *GPS Solut.* 2010. V. 14 (1). P. 13–22.

[71] Lin L., Zou X., Anthes R., Kuo Y.-H. COSMIC GPS radio occultation temperature profiles in clouds // *Mon. Wea. Rev.* 2010. V. 138 (4). P. 1104–1118.

[72] Ho S.-P., Kuo Y.-H., Schreiner W., Zhou X. Using SI-traceable global positioning system radio occultation measurements for climate monitoring // *State of the Climate in 2009 // Bull. Amer. Meteor. Sci.* 2010. V. 91 (7). S36–S37.

[73] Gorbunov M.E., Lauritsen K.B., Leroy S.S. Application of Wigner distribution function for analysis of radio occultations // *Radio Sci.* 2010. V. 45. RS6011.

[74] Ho S.-P., Zhou X., Kuo Y.-H., Hunt D., Wang J.-H. Global Evaluation of Radiosonde Water Vapor Systematic Biases using GPS Radio Occultation from COSMIC and ECMWF Analysis // *Remote Sens.* 2010. V. 2 (5). P. 1320–1330.

[75] Schreiner W., Sokolovskiy S., Hunt D., Rocken C., Kuo Y.-H. Analysis of GPS radio occultation data from the FORMOSAT-3/COSMIC and Metop/GRAS missions at CDAAC // *Atmos. Meas. Tech.* 2011. V. 4. P. 2255–2272.

[76] Pirscher B., Kirchengast G., Steiner A.K., Kuo Y.-H., Foelsche U. Quantifying uncertainty in climatological fields from GPS radio occultation an empirical-analytical error model // *Atmos. Meas. Tech.* 2011. V. 4 (9). P. 2019–2034.

[77] Scherllin-Pirscher B., Steiner A.K., Kirchengast G., Kuo Y.-H., Foelsche U. Empirical analysis and modeling of errors of atmospheric profiles from GPS radio occultation // *Atmos. Meas. Tech.* 2011. V. 4 (9). P. 1875–1890.

- [78] Guo P., Kuo Y.-H., Sokolovskiy S.V., Lenschow D.H. Estimating atmospheric boundary layer depth using COSMIC radio occultation data // *J. Atmos. Sci.* 2011. V. 68 (8). P. 1703–1713.
- [79] Chen S.-Y., Huang C.-Y., Kuo Y.-H., Sokolovskiy S. Observational error estimation of FORMOSAT-3/COSMIC GPS radio occultation data // *Mon. Wea. Rev.* 2011. V. 139 (3). P. 853–865.
- [80] Gorbunov M.E., Lauritsen K.B., Benzon H.-H., Larsen G.B., Syndergaard S., Sørensen M.B. Processing of GRAS/METOP radio occultation data recorded in closed-loop and raw-sampling modes // *Atmos. Meas. Tech.* 2011. V. 4. P. 1021–1026.
- [81] Gorbunov M.E., Shmakov A.V., Leroy S.S., Lauritsen K.B. COSMIC radio occultation processing cross-center comparison and validation // *J. Atmos. Oceanic Technol.* 2011. V. 28. P. 737–751.
- [82] Yue X., Schreiner W.S., Kuo Y.-H. A feasibility study of the radio occultation electron density retrieval aided by a global ionospheric data assimilation model // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117. A08301.
- [83] Ho S.-P. et al. Reproducibility of GPS radio occultation data for climate monitoring Profile-to-profile inter-comparison of CHAMP climate records 2002 to 2008 from six data centers // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117. D18111.
- [84] Yue X., Schreiner W.S., Kuo Y.-H., Wu Q., Deng Y., Wang W. GNSS radio occultation (RO) derived electron density quality in high latitude and polar region NCAR-TIEGCM simulation and real data evaluation // *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2013. V. 98. P. 39–49.
- [85] Sokolovskiy S., Schreiner W., Zeng Z., Hunt D., Lin Y.-C., Kuo Y.-H. Observation, analysis, modeling of deep radio occultation signals: Effects of tropospheric ducts and interfering signals // *Radio Sci.* 2014. V. 49 (10). P. 954–970.
- [86] Gorbunov M.E., Vorob'ev V.V., Lauritsen K.B. Fluctuations of refractivity as a systematic error source in radio occultations // *Radio Sci.* 2015. V. 50. P. 656–669.
- [87] Ho S.-P., Yue X., Zeng Z., Ao C.O., Huang C.-Y., Kursinski E.R., Kuo Y.-H. Applications of COSMIC radio occultation data from the Troposphere to Ionosphere and potential impacts of COSMIC-2 data // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 2014. V. 95. ES18–ES22.
- [88] Smith E.K., Weintraub S. The constants in the equation for the atmospheric refractive index at radio frequencies // *Proc. IRE.* 1953. V. 41. P. 1035–1037.
- [89] Bean B.R., Dutton E.J. *Radio Meteorology*. Washington, DC U.S. Dept. of Commerce, 1966. 435 p.
- [90] Сивухин Д.В. *Общий курс физики*. Изд. 3-е. М.: Наука, 1990. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. 592 с.
- [91] Rüeger J.M. Refractive index formulae for electronic distance measurement with radio and millimeter waves // *Unisurv Rep. S-68*, 13 pp., Univ. of N.S.W., Sydney, N.S.W., Australia. 2002.
- [92] Thayer G.D. An improved equation for the radio refractive index of air // *Radio Sci.* 1974. V. 9. P. 803–807.
- [93] Сивухин Д.В. *Общий курс физики*. Издание 3-е. М. Наука, 1990. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. 592 с.
- [94] Aparicio J.M., Deblonde G., Garand L., Laroche S. Signature of the atmospheric compressibility factor in COSMIC, CHAMP, GRACE radio occultation data // *J. Geophys. Res.* 2009. V. 114. D16114.
- [95] Essen L., Froome K.D. The refractive indices and dielectric constants of air and its principal constituents at 24 GHz // *Proc. Phys. Soc. London. Sec. B.* 1951. V. 64 (10). P. 862–875.

- [96] *Owens J.S.* Optical refractive index of air dependence on pressure, temperature, composition // *Appl. Opt.* 1967. V. 6. P. 51–58.
- [97] *Хргуан А.Х.* Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 645 с.
- [98] *Davis R.S.* Equation for the determination of the density of moist air (1981/91) // *Metrologia.* 1992. V. 29. P. 67–70.
- [99] *Picard A., Davis R.S., Gläser M., Fujii K.* Revised formula for the density of moist air (CIPM-2007) // *Metrologia.* 2008. V. 45. P. 149–155.
- [100] *Lin L., Zou X., Anthes R., Kuo Y.-H.* COSMIC GPS cloudy profiles // *Mon. Wea. Rev.* 2010. V. 138. P. 1104–1118.
- [101] *Zou X., Yang S., Ray P.S.* Impacts of ice clouds on GPS radio occultation measurements // *J. Atm. Sci.* 2012. V. 69. P. 3670–3682.
- [102] *Ray P.S.* Broadband complex refractive indices of ice and water // *Appl. Opt.* 1972. V. 11. P. 1836–1844.
- [103] *Solheim F.S., Vivkanandan J., Ware R.H., Rocken C.* Propagation delays induced in GPS signals by dry air, water vapor, hydrometeors, other particulates // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104. P. 9663–9670.
- [104] *Kirchengast G., Hoeg P.* The ACE+ mission An Atmosphere and Climate Explorer based on GPS, Galileo, LEO–LEO radio occultation // *Occultations for probing atmosphere and climate* / Ed. by G. Kirchengast et al. Berlin: Springer, 2004. P. 201–220.
- [105] *Schweitzer S., Kirchengast G., Schwaerz M., Fritzer J., Gorbunov M.E.* Thermodynamic state retrieval from microwave occultation data and performance analysis based on end-to-end simulations // *J. Geophys. Res.* 2011. V. 116. D10301.
- [106] *Liebe H.* MPM-An atmospheric millimeter-wave propagation model // *Int. J. Infrared Millimeter Waves.* 1989. V. 10. P. 631–650.
- [107] *Liebe H.J., Manabe T., Hufford G.A.* Millimeter-wave attenuation and delay due to fog/cloud conditions // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1989. V. 37. P. 1617–1623.
- [108] *Liebe H.J., Hufford G.A., Cotton M.G.* Atmospheric propagation effects through natural and man-made obscurants for visible to MM-wave radiation (Les Effets des Conditions Defavorables de Propagation sur les Systemes Optiques, IR et a Ondes Millimetriques) // *Paper AGARD Conference Proc. 542, National Telecommun. and Inform. Administration Inst. for Telecommun. Sci.* Presented at the Electromagnetic Wave Propagation Panel Symposium, held in Palma de Malorca, Spain, 17th–20th May 1993.
- [109] *Rosenkranz P.W.* Absorption of microwaves by atmospheric gases // *Atmospheric remote sensing by microwave radiometry* / Janssen M.A. (ed.). J. Wiley & Sons, Inc., 1993. Ch. 2. P. 37–90.
- [110] *Rosenkranz P.W.* Pressure broadening of rotational bands. II. Water vapor from 300 to 1100  $\text{cm}^{-1}$  // *J. Chem. Phys.* 1987. V. 87. P. 163–170.
- [111] *Liebe H.J., Hufford G.A., Manabe T.* A model for the complex permittivity of water at frequencies below 1 THz // *Int. J. Infrared and Millimeter Waves.* 1991. V. 12. P. 659–675.
- [112] *Hufford G.A.* A model for the complex permittivity of ice at frequencies below 1 THz // *Int. J. Infrared and Millimeter Waves.* 1991. V. 12. P. 677–680.
- [113] *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
- [114] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бинном, 2001. С. 363–375.
- [115] *Ильина В.А., Силаев П.К.* Численные методы для физиков-теоретиков. Т. 2. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. С. 16–30.
- [116] *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1967. 197 с.

- [117] *Кравцов Ю.А., Найда О.Н., Фуки А.А.* Волны в слабоанизотропных трехмернонеоднородных средах квазиизотропное приближение геометрической оптики // Успехи Физических Наук. 1996. Т. 166. №2. С. 141–167.
- [118] *Budden K.G.* Radio waves in the Ionosphere. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1961. 562 p.
- [119] *Гинзбург В.Л.* Электромагнитные волны в плазме. М.: Наука, 1967. 685 с.
- [120] *Davis K.* Ionospheric Radio Waves. Wallham Mass Blaisdell, 1969. 460 p.
- [121] *Горбунов М.Е.* Методы возмущений в геометрической оптике // Изв. вузов, Радиофизика. 1995. Т. 38 (7). С. 660–667.
- [122] *Калашиников И.Э., Матюгов С.С., Павельев А.Г., Яковлев О.И.* Анализ особенностей метода радиопросвечивания атмосферы Земли // Электромагнитные волны в атмосфере и космическом пространстве. М.: Наука, 1986. С. 208.
- [123] *Павельев А.Г., Кучерявенков А.И.* Теория рефракционного ослабления радиоволн в планетных атмосферах // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23. № 7. С. 1345–1351.
- [124] *Sokolovskiy S.V.* Inversions of radio occultation amplitude data // Radio Sci. 2000. V. 35. N 1. P. 97–105.
- [125] *Яковлев О.И.* Космическая радиофизика. М.: Научная книга, 1998. 432 с.
- [126] *Eshleman R., Muhleman D.O., Nicholson P.D., Steffes P.G.* Comment on absorbing regions in the atmosphere of Venus as measured by radio occultation // Icarus. 1980. V. 44. N 3. P. 793–803.
- [127] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1978. 472 с.
- [128] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексной переменной. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 749 с.
- [129] *Воробьев В.В., Красильникова Т.Г.* Оценка точности восстановления атмосферного показателя преломления по измерениям доплеровского сдвига частоты на частотах, используемых в системе NAVSTAR // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 5. С. 626–632.
- [130] *Воробьев В.В., Кан В.* Фоновые флуктуации при радиопросвечивании ионосферы в эксперименте GPS–Microlab-1 // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1999. Т. XLII. № 6. С. 511–523.
- [131] *Ahmad B., Tyler G.L.* Systematic errors in atmospheric profiles obtained from Abelian inversion of radio occultation data: Effects of large-scale horizontal gradients // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. N D4. P. 3971–3992.
- [132] *Healy S.B.* Radio occultation bending angle errors caused by horizontal gradients A simulation study // U.K. Meteorology Office. Forecasting Res. Technical Report No. 286. UK, Reading, 1999. 31 p.
- [133] *Kirchengast G., Schweitzer S., Ladstädter F.* (invited keynote) ACCURATE Observing Greenhouse Gases, Isotopes, Wind, Thermodynamic Variables by Combined MW Radio and IR Laser Occultation 3rd International Workshop on Occultations for Probing Atmosphere and Climate (OPAC-3). Graz, Austria, September 2007.
- [134] *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 608 с.
- [135] The ECHAM3 atmospheric general circulation model / Deutsches KlimaRechen-Zentrum, Modelbetreuungsgruppe. Technical Report No. 6. Hamburg, 1994. 195 p.
- [136] *Hedin E.* Extension of the MSIS thermosphere model into the middle and lower atmosphere // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. No. A2. P. 1159–1172.
- [137] *Lambeck K.* Geophysical geodesy the slow deformation of the Earth. Oxford: Clarendon press, 1988. 718 p.

[138] NOAA U.S. Standard Atmosphere. Washington D.C. NOAA and NASA and USAF, 1976. 210 p.

[139] *List R.J.* Acceleration of gravity. Smithsonian Meteorological Tables. Edition 6. Washington D.C.: Smithsonian Institution, 1968. 220 p.

[140] EGM96. The NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model / NASA. <http://cddisa.gsfc.nasa.gov/926/egm96/egm96.html>.

[141] *Tapley B.D., Watkins M.M., Ries J.C., Davis G.W., Eanes R.J., Poole S.R., Rim H.J., Schutz B.E., Shum C.K., Nerem R.S., Lerch F.J., Marshall, J.A., Klosko S.M., Pavlis N.K., Williamson R.G.* The JGM-3 Gravity Model // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101. N B12. P. 28029–28049.

[142] *Воробьев В.В., Красильникова Т.Г.* Оценка точности восстановления атмосферного показателя преломления по измерениям доплеровского сдвига частоты на частотах, используемых в системе NAVSTAR // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1993. Т. 29. № 5. С. 626–632.

[143] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторых их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[144] *Ware R., Exner M., Feng D., Gorbunov M., Hardy K., Herman B., Kuo Y.-H., Meehan T., Melbourne W., Rocken C., Schreiner W., Sokolovskiy S., Solheim F., Zou X., Anthes R., Businger S., Trenberth K.* GPS sounding of the atmosphere from Low Earth Orbit Preliminary results // *Bull. Amer. Meteor. Sci.* 1996. V. 77 (1). P. 19–40.

[145] *Kursinski E.R., Hajj G.A., Bertie W.I., Leroy S.S., Meehan T.K., Romans L.J., Schofield J.T., McLeish D.J., Melbourne W.G., Thornton C.L., Yunck T.P., Eyre J. R., Nagasaki R.N.* Initial results of radio occultation observation of Earth's atmosphere using the Global Positioning System // *Science.* 1996. N 271. P. 1107–1110.

[146] *Kursinski E.R., Hajj G.A., Schofield J.T., Linfield R.P., Hardy K.R.* Observing Earth's atmosphere with radio occultation measurements using the Global Positioning System // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. No. D19. P. 23429–23465.

[147] *Hocke K.* Inversion of GPS meteorology data // *Annales Geophysicae.* 1997. V. 15. No. 4. P. 443–450.

[148] *Steiner A.K., Kirchengast G., Ladreiter H.P.* Inversion, error analysis, validation of GPS/MET data // *Annales Geophysicae.* 1999. V. 17. No. 2. P. 122–138.

[149] *Feng D.D., Herman B.M.* Remotely sensing the Earth's atmosphere using the Global Positioning System (GPS), the GPS/MET data analysis // *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology.* 1999. V. 16. No. 8. P. 989–1002.

[150] *Bengtsson L., Gorbunov M.E., Sokolovskiy S.V.* Space refractive tomography of the atmosphere, modeling of direct and inverse problems // *Max-Planck Inst. Meteorol. Report No. 210.* Hamburg, 1996. 59 p.

[151] *Sokolovskiy S.* Effect of superrefraction on inversions of radio occultation signals in the lower troposphere // *Radio Sci.* 2003. V. 38. No. 3. P. 1058.

[152] *Sokolovskiy S.* Modeling and inverting radio occultation signals in the moist troposphere // *Radio Sci.* 2001. V. 36. No. 3. P. 441–458.

[153] *Xie F., Wu D.L., Ao C.O., Kursinski E.R., Mannucci A.J., Syndergaard S.* Superrefraction effects on GPS radio occultation refractivity in marine boundary layers // *Geophys. Res. Lett.* 2010. V. 37. L11805.

### 4.3. Фронтальные структуры в ионосферных спорадических слоях E

*О.Г. Чхетиани<sup>1,2</sup>, С.Л. Шалимов<sup>3,1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Институт космических исследований РАН*

<sup>3</sup>*Институт физики земли им. О.Ю. Шмидта РАН*

#### **Введение**

Область верхней атмосферы, переходная от мезосферы к нижней термосфере (МНТ), занимает выделенное положение во внешних оболочках Земли. Это обусловлено рядом причин [1]. Во-первых, расположение МНТ между областями низкой и высокой устойчивости в мезосфере и термосфере соответственно. Во-вторых, МНТ – это область, где происходит диссипация внутренних гравитационных волн (ВГВ), распространяющихся снизу, из нижних слоев атмосферы, причем количество диссипируемой энергии здесь сопоставимо с поглощенной солнечной энергией. В-третьих, МНТ – это область сильного сдвига с высотой нейтрального ветра и область взаимодействия приливов с ВГВ и планетарными волнами. Наконец, среда на этих высотах представляет собой слабоионизованную плазму, погруженную в геомагнитное поле, причем плазма здесь не только служит своеобразным трассером нейтральных движений (например, при формировании так называемых спорадических слоев E, состоящих в основном из ионов металлов), но и начинает оказывать влияние на движение нейтральной компоненты [2].

Если до недавнего времени о движениях плазменной и нейтральной компоненты на высотах МНТ можно было судить, исследуя 2-мерную динамику спорадических слоев E с помощью радаров когерентного и некогерентного рассеяния [3] и посредством наблюдения за свечением ночного неба, то теперь использование лидаров позволило непосредственно наблюдать гидродинамические движения нейтралов [4], а использование когерентных интерферометрических радаров [3] – строить 3-х мерные изображения движения и ориентации ионосферных неоднородностей. Эти наблюдения привели к пониманию того, что для описания процессов, происходящих в области мезосферно-термосферного взаимодействия необходимо применять как гидродинамический, так и электродинамический подходы.

Согласно эксперименту, в указанной переходной области, несмотря на ее сильную турбулизацию, часто присутствуют (как в нейтральной, так и в плазменной компоненте) упорядоченные (квазипериодические) и вихревые структуры с горизонтальной осью ориентированной под углом к зональному направлению [3–5]. Эти образования – фронтальные структуры – имеют пространственные масштабы по вертикали порядка 5–6 км, по горизонтали – несколько десятков км и временные масштабы 1–3 часа.

Надо отметить, что образование фронтальных структур спорадических слоев E ( $E_s$ ) было известно из наблюдений ионосферы посредством ионозондов, начиная с 60-х г. прошлого века [6–10]. Наблюдения показывают, что эти структуры вытянуты в определенном азимутальном направлении, а их дрейф, соответственно, также имеет преимущественное направление – перпендикулярно фронту структуры. При наблюдениях такие структуры могут следовать одна за другой с

характерной длиной волны 10–40 км [10]. В этом отношении они аналогичны так называемым квазипериодическим (QP) радиоотражениям от E области ионосферы, которые регистрируют посредством когерентных радаров [11, 12].

Использование когерентных интерферометрических радаров [13] позволяет строить 3-мерные изображения движения и ориентации ионосферных неоднородностей. В этих экспериментах было показано, что упомянутые QP радиоотражения, в свою очередь, ассоциируются со слоями  $E_s$  и обусловлены упорядоченными (квазипериодическими) и вихревыми структурами в них (роллами) с горизонтальной осью, ориентированной под углом к зональному направлению [13, 4, 14]. Эти структурные образования имеют пространственные масштабы по вертикали порядка: 5–6 км, горизонтальные – порядка нескольких десятков км и времена жизни 1–3 ч.

В более общем контексте интерес к происхождению крупномасштабных структур в ионосфере, ориентированных определенным образом, возник в связи с исследованиями взаимодействия ионосферных E и F областей, когда было обнаружено, что сильное взаимное влияние обеих областей ассоциируется с присутствием фронтальных структур (имеющих приблизительно одинаковую ориентацию) как в нижней, так и верхней ионосфере [15, 16]. Если в области F такие крупномасштабные неоднородности со специфической ориентацией обычно связывают с развитием неустойчивости Перкинса [17], то в E области подобные неустойчивости не были известны. Недавние теоретические попытки найти такую неустойчивость привели к выводу, что на эту роль может претендовать так называемая "azimuth-dependent  $E_s$  layer instability" [18] или  $E_s$  – неустойчивость спорадического слоя E, инкремент которой зависит от ориентации возмущения и достигает максимума, когда волновой вектор возмущения повернут на  $45^\circ$  против часовой стрелки от направления на запад (при этом структуры дрейфуют на юго-запад). В результате сложилось представление, по которому образование фронтальных крупномасштабных структур в E и F областях ионосферы, а также их взаимное влияние, обуславливается плазменными неустойчивостями ( $E_s$  и Перкинса соответственно) [19–21]. Однако ряд экспериментов указывает, во-первых, на несоответствие действительности такого сценария взаимодействия областей ионосферы [22] и, во-вторых, на существование в нижней и верхней ионосфере дрейфующих фронтальных структур, когда развитие  $E_s$  – неустойчивости невозможно [23, 24].

Ниже будет показано, что развитие фронтальных структур в E области ионосферы допускает иное и более адекватное наблюдениям описание. Рассмотрен механизм образования фронтальных структур, основанный на неустойчивости экмановского типа, когда важным оказывается учет спиральности крупномасштабного ветра и турбулентности в нейтральной компоненте слабоионизованной плазмы ионосферы.

Отметим, что существует определенная аналогия между условиями в области МНТ и в нижней атмосфере – атмосферном пограничном слое (АПС). Как и в АПС (в пределах 1–2 км над поверхностью Земли) [25], так и в МНТ (на высотах вблизи 100 км) [4] наблюдают структуры с упорядоченными спиралевидными вихрями (роллами) типа конвективных валов. Критическим условием их генерации в АПС является, в частности, наличие области неустойчивой стратификации

под устойчиво стратифицированной областью, т.е. то же самое, что в области МНТ. Одним из основных условий генерации валиковой циркуляции в АПС является наличие в профиле ветра точки перегиба, обусловленной вращением вектора скорости с высотой (спираль Экмана) [25, 26]. Типичный профиль ветра в МНТ области имеет именно такую структуру [27, 4]. Наконец, развитая турбулентность является важной компонентой динамики АПС. В области МНТ наиболее вероятным источником турбулентности вязкости могут быть диссипирующие как раз на этих высотах ВГВ.

### 1. Спиральность в верхней атмосфере

Атмосферный (планетарный) пограничный слой (АПС) является природной системой, в которой спиральность  $H = \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V}$  воспроизводится естественным образом. Вращение Земли и поверхностное трение порождают крупномасштабный геострофический ветер, поворачивающийся с высотой – течение или спираль Экмана. Течение Экмана, будучи спиральным, является источником и спиральности турбулентной составляющей [28]. Недавние эксперименты подтвердили присутствие спиральности в АПС [29]. Приобретение турбулентностью спиральных свойств в свою очередь меняет структуру тензора турбулентных напряжений Рейнольдса (появляется их зависимость от завихренности среднего течения), что отражается и на установившихся стационарных режимах, то есть на самом течении Экмана.

Для турбулентной спиральности в условиях нейтральной стратификации из условий баланса можно получить оценку, связывающую ее с крупномасштабными движениями и турбулентностью:

$$H = 2K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \tau - 2K \tau \mathbf{W} (\nabla \times \mathbf{W}).$$

Здесь  $U, V$  – зональная и меридиональная компоненты скорости ветра,  $\tau$  – характерное корреляционное время турбулентности, имеющее оценку  $\tau: l^2 / K$ , где  $l$  – характерный масштаб турбулентных вихрей. Вышеприведенное выражение для спиральности может быть переписано как:

$$H = 2C_k f^2 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

где  $H$  – спиральность самого крупномасштабного движения (в данном случае – экмановского слоя),  $C_k \sim 1$ ,  $\mathbf{W}$  – завихренность.

Плотность турбулентной спиральности в пограничном слое, близком к нейтральному, оценивается величиной  $H \approx 3 \cdot 10^{-3} \div 2 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Так для АПС из наблюдений была получена величина турбулентной спиральности  $0.02\text{--}0.03 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  [29], что совпадает по порядку величины с приведенными выше теоретическими оценками и оказывается близким к спиральности характерных для АПС вторичных структур – роллов [30].

Наличие экмановского профиля ветра на высотах мезосферы-термосферы определено указывает на отличную здесь от нуля спиральность течения. Для полного описания процессов на этих высотах необходимо учитывать как факторы проводимости из-за присутствия плазмы, так и магнитное поле. Отметим, что

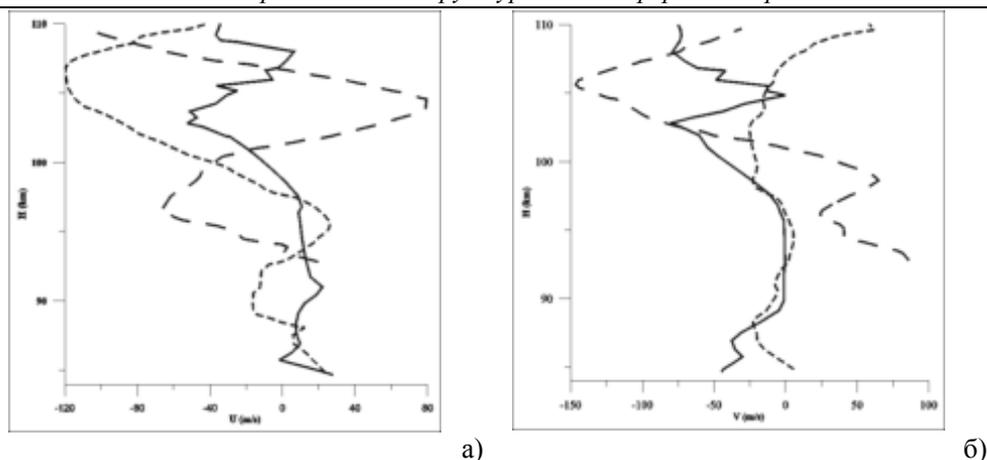


Рис. 1. Типовые профили ветра в верхней атмосфере: а) Зональная скорость, б) Меридиональная скорость

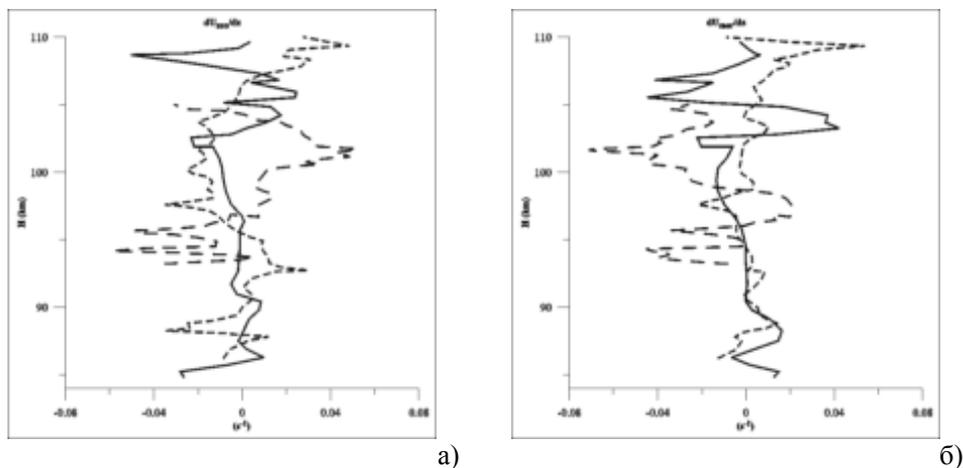


Рис. 2. Градиенты ветров в верхней атмосфере: а) Сдвиг по высоте зональной скорости, б) Сдвиг по высоте меридиональной скорости

именно на этих высотах обычно достигается максимум скорости ветра [4]. Модификация профиля скорости проводящего экмановского слоя (т.е. влияние проводящей компоненты среды на спираль Экмана в нейтральной компоненте) была замечена давно [31, 32], но влияние спиральности на него, а также вопросы устойчивости этого слоя, которые позволили бы объяснить присутствие в проводящем слое вихревых структур, не исследованы до сих пор.

Оценим сначала крупномасштабную гидродинамическую спиральность в указанной области (без учета влияния плазменной компоненты среды). Для анализа нами были взяты недавние измерения с максимумом скорости профилей скорости ветра в переходной области [4, 33]. На рис. 1 приведены профили соответственно зональной и меридиональной компонент ветров. Нетрудно видеть, что су-

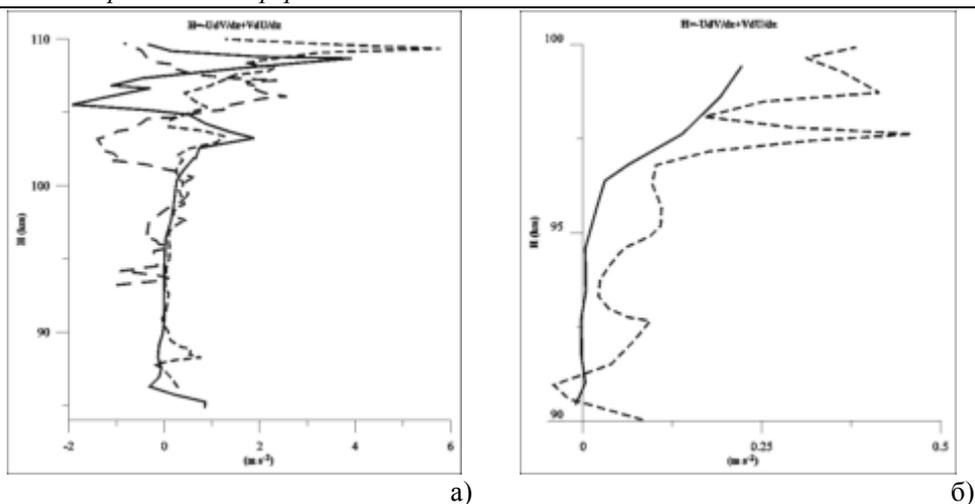


Рис. 3. а) Распределение спиральности среднего ветра с высотой. б) Распределение спиральности с высотой – область умеренных значений

ществуют области с профилями, близкими к экмановским, то есть с явно выраженным поворотом направления ветра с высотой.

На рис. 2 показаны градиенты горизонтальных компонент скорости, характеризующих завихренность в исследуемой области.

На рис. 3а приведена горизонтальная компонента спиральности, которая здесь на порядок превосходит ее вертикальную составляющую. Заметим, что исходя из представленных данных, существуют области со значительными величинами спиральности. Отдельно (рис. 3 б) показана область с умеренной спиральностью для профилей [4].

Таким образом, крупномасштабная гидродинамическая спиральность в переходной области оказывается порядка  $0.1\text{--}1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ . Это означает, что для турбулентной спиральности и спиральности вихревых слоистых структур, используя приведенную выше формулу, связывающую последнюю с градиентами среднего профиля скорости, получим значения порядка  $\text{--} 0.01\text{--}0.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Данные оценки являются лишь мгновенным срезом распределения спиральности в переходной области. Для определения типичных величин необходимы дальнейшие измерения, учитывающие зависимость от широты. Полученные значения для величины спиральности указывают на важность этого фактора и необходимость ее параметризации в моделях турбулентности в переходной области.

Отмеченная нами аналогия между АПС и областью МНТ позволяет связать образование и динамику структур на высотах области МНТ с неустойчивостью подобной неустойчивости экмановского слоя [26].

## 2. Неустойчивость экмановского типа в ионосферном слое E

Остановимся на вопросе о механизмах формирования структур в области МНТ. Генерация структур, о которых идет речь (валиковой циркуляции), в принципе

может быть здесь обусловлена простым сдвигом скорости ветра и связана с неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца (КГ) [4]. Против подобной интерпретации можно привести следующие аргументы. Во-первых, как уже было отмечено, время жизни структур, наблюдаемых в переходной области, несколько часов [4], что значительно дольше характерного времени жизни структур, сформированных в результате неустойчивости КГ. Во-вторых, если предполагать, что развитие неустойчивости КГ в нейтральной компоненте отражается в динамике плазменных спорадических слоев E (из-за большой частоты столкновений ионов с нейтральными частицами на этих высотах), то наблюдаемое разнонаправленное движение и ориентация плазменных структур [5] не укладывается в представление о простом сдвиге скорости, и надо, по-видимому, учитывать спиральную структуру ветра. В-третьих, в плазменной компоненте обычно наблюдают повторяющееся с высотой структурообразование [34], что также ассоциируется с экмановским профилем ветра, а не механизмом КГ.

Рассмотрим уравнения магнитной гидродинамики для несжимаемой нейтрально стратифицированной среды во вращающейся системе отсчёта  $(x, y, z)$ : ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  направлена на север, ось  $z$  направлена противоположно направлению силы тяжести.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2[\mathbf{W}_0 \times \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( P + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \frac{(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}}{4\pi\rho} + \nu_0 \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = ((\mathbf{H}_0 + \mathbf{H})\nabla)\mathbf{v} + \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} \Delta \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{H}$  – компоненты поля скорости и магнитного поля,  $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$  – геомагнитное поле,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\mathbf{W}_0 = (0, \Omega_0 \cos(\theta), \Omega_0 \sin(\theta))$ ,  $\Omega_0$  – частота вращения Земли,  $\theta$  – широта,  $P$  – давление,  $\rho$  – массовая плотность,  $\nu_0$  – кинематическая вязкость,  $c$  – скорость света,  $\sigma_0$  – проводимость.

Представим поле скорости и магнитное поле в виде суммы регулярной и турбулентной составляющих

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}, \quad \langle \mathbf{v} \rangle = 0,$$

$$\mathbf{H} = \langle \mathbf{H} \rangle + \mathbf{H}, \quad \langle \mathbf{H} \rangle = 0,$$

где  $\langle \dots \rangle$  – операция усреднения. Проведем усреднение уравнений (1)–(2). Для тензора возникающих здесь турбулентных напряжений Рейнольдса поля скорости  $\langle \tilde{v}_i \tilde{v}_j \rangle$  используем модифицированное представление для вихревой вязкости [28, 35, 36], учитывающее влияние турбулентной спиральности  $\chi = \langle \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \rangle$ , отличной от 0 в пограничных слоях экмановского типа. Опустив градиентные члены перенормирующие давление в приближении постоянных коэффициентов данное представление имеет вид:

$$\frac{\partial \langle \tilde{v}_i \tilde{v}_j \rangle}{\partial x_j} = -\nu \Delta \langle \mathbf{v} \rangle_i + \kappa e_j \frac{\partial \text{rot}_i \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial x_j}, \mathbf{e} = (0, 0, 1). \quad (3)$$

Здесь  $\nu \gg \nu_{ii}$  – турбулентная вязкость,  $\kappa$  – вторая вязкость, обусловленная турбулентной спиральностью. Выделенное направление  $\mathbf{e}$  обусловлено сильной вертикальной неоднородностью турбулентности в условиях нашей задачи.

Рассмотрим горизонтально однородное стационарное решение усредненных уравнений (1)–(2) с учетом уравнения (3). Уравнения теперь примут вид:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial H_x}{\partial z} + 2\Omega v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial H_y}{\partial z} - 2\Omega u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + H_0 \frac{du}{dz} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + H_0 \frac{dv}{dz} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $H_x(z)$ ,  $H_y(z)$  – горизонтальные компоненты массовой скорости и индуцированного магнитного поля соответственно,  $\Omega = \Omega_0 \sin(\theta)$  – вертикальная компонента кориолисова вектора,  $\mathbf{v} (\gg v_0)$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma$  – турбулентные транспортные коэффициенты. Влиянием турбулентной спиральности на магнитное поле (турбулентным  $\alpha^2$  – динамо [37]) в данном случае можно пренебречь.

Из уравнения статики следует

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( P + \frac{H_x^2 + H_y^2}{8\pi} \right) = -\rho g.$$

Интегрируя уравнения (6)–(7) находим

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} + H_0 u = C_1,$$

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} + H_0 v = C_2.$$

В соответствии с законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] \right)$$

и при пренебрежении током смещения в уравнении Максвелла получаем

$$C_1 = cE_y, C_2 = -cE_x.$$

Переходя к комплексным переменным для скорости, давления, магнитного и электрического полей

$$W = u + iv, \quad \Pi = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$H = H_x + iH_y, \quad E = E_y - iE_x,$$

получим уравнения движения в компактном виде

$$v(1+i\gamma) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \left( \frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2} + 2i\Omega \right) W = \Pi - \frac{\sigma H_0}{\rho c} E, \quad (8)$$

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H}{\partial z} + H_0 W = cE. \quad (9)$$

Параметр  $\gamma = \kappa / \nu \approx \eta l \chi / \varepsilon < 1$ , где  $\varepsilon = \langle \tilde{v}^2 \rangle / 2$  – плотность энергии турбулентного движения,  $l$  – длина пути перемешивания,  $\eta$  – эмпирический коэффициент, связанный с распределением средней спиральности в атмосфере [28, 29]. Например, для условий атмосферного пограничного слоя согласно оценкам, полученным на основе анализа данных для компонент поля скорости, величины параметра  $\gamma$  находятся в интервале  $(-0.1 - +0.2)$  [28, 35].

Граничные условия для (8), (9) предполагают задание горизонтальной скорости и горизонтальных компонент поля на нижней ( $z = 0$ ) и верхней ( $z = \infty$ ) границах. При  $z = \infty$

$$-\left( \frac{\sigma H_0^2}{\rho c^2} + 2i\Omega \right) W_\infty = \Pi - \frac{\sigma H_0}{\rho c} E,$$

откуда

$$-2i\Omega W_\infty = \Pi.$$

Соответственно уравнение движения имеет вид

$$v(1+i\gamma) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - 2i \left( \Omega - i \frac{\sigma H_0^2}{2\rho c^2} \right) (W - W_\infty) = 0.$$

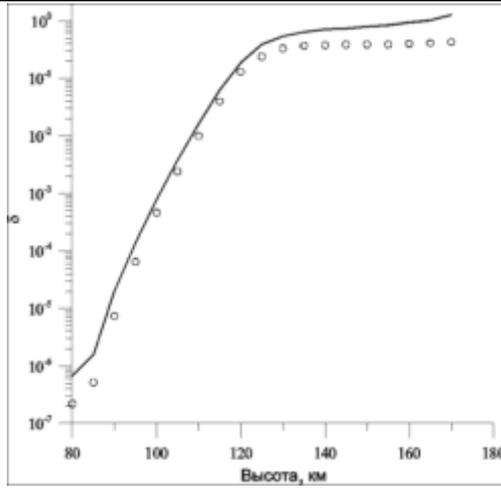
Пронормировав это уравнение на экмановский масштаб  $h_E = \sqrt{\nu / \Omega}$  и на значение скорости ветра на верхней границе  $G = (U_G^2 + V_G^2)^{1/2}$  получим для скорости новое уравнение с комплексной вязкостью, обусловленной учетом спиральности, а также комплексной частотой вращения, учитывающей конечную проводимость и геомагнитное поле

$$(1+i\gamma) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - 2i(1-i\delta)(W - W_\infty) = 0,$$

где  $\delta = \frac{\sigma H_0^2}{2\rho c^2} / \Omega$ .

Возмущения магнитного поля будут определяться полем скорости

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H}{\partial z} + H_0 (W - W_\infty) = 0$$



**Рис. 4.** Зависимость магнитного параметра  $\delta$  от высоты для условий высокой (сплошная линия) и низкой (точки) солнечной активности

С краевыми условиями, предполагающими ненулевые скорости на нижней границе (что представляется естественным для верхней атмосферы)

$$W_0 = \beta(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)), W_\infty = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \quad (10)$$

для горизонтальных компонент профиля ветра после вычислений получаем модифицированный профиль экмановской скорости для верхней атмосферы:

$$u = \cos(\varphi) - e^{-\Lambda_1 z} (\cos(\Lambda_2 z - \varphi) - \beta \cos(\Lambda_2 z - \alpha)), \quad (11)$$

$$v = \sin(\varphi) + e^{-\Lambda_1 z} (\sin(\Lambda_2 z - \varphi) - \beta \sin(\Lambda_2 z - \alpha)), \quad (12)$$

где масштабные факторы  $\Lambda_{1,2} = f_{1,2}(\gamma, \delta)$  имеют вид

$$\Lambda_1 = \frac{\delta}{\gamma_1 (2(\gamma_1 + \gamma)(1 + \delta_1))^{1/2}} + \frac{((\gamma_1 + \gamma)(1 + \delta_1))^{1/2}}{2^{1/2} \gamma_1}, \quad (13)$$

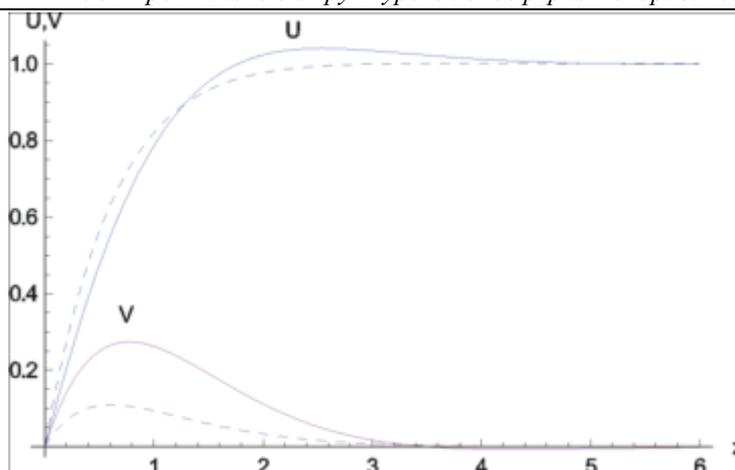
$$\Lambda_2 = \frac{\delta(\gamma_1 + \gamma)^{1/2}}{\gamma_1 (2(1 + \delta_1))^{1/2}} - \frac{(1 + \delta_1)^{1/2}}{\gamma_1 (2(\gamma_1 + \gamma))^{1/2}}, \quad (14)$$

$$\gamma_1 = (1 + \gamma^2)^{1/2}, \delta_1 = (1 + \delta^2)^{1/2}. \quad (15)$$

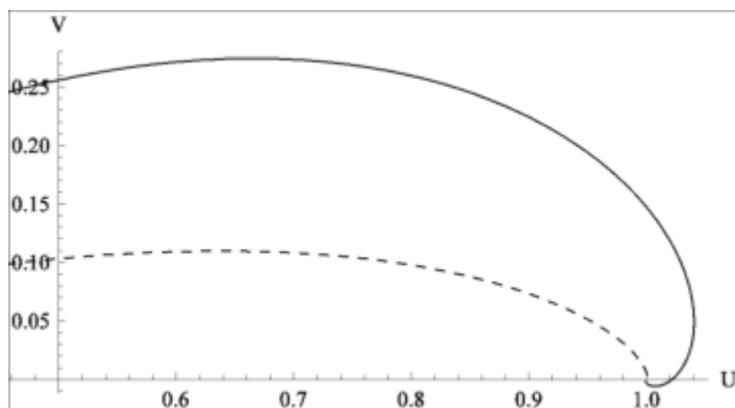
Видно, что спиральность и магнитное поле при определенных условиях могут заметно смещать точку перегиба, меняют профиль и условия устойчивости.

На рисунке 4 показан профиль параметра  $\delta$ , построенный с использованием стандартной ионосферы IRI-90 и параметров модельной атмосферы CIRA-72 для условий дневной ионосферы в максимуме (сплошная линия) и минимуме (точки) солнечной активности.

Профили компонент скорости и годографы при различных величинах параметра турбулентной спиральности  $\gamma$  и магнитного параметра  $\delta$  показаны на рис. 5 и



**Рис. 5.** Вертикальные профили компонент горизонтальной скорости (в безразмерных единицах) для параметра спиральности  $\gamma = 0.2$  и магнитного параметра  $\delta$ , равного 0 (сплошная линия) и 0.1 (штриховая линия)



**Рис. 6.** Годограф скорости (в безразмерных единицах) для параметра спиральности  $\gamma = 0.2$  и магнитного параметра  $\delta$ , равного 0 (сплошная линия) и 0.1 (штриховая линия)

рис. 6. Для простоты выбрана нулевая величина скорости на нижней границе  $\beta = 0$  и  $\varphi = 0$  на верхней границе. Видно, что уже при  $\delta$  в несколько десятых долей происходит заметное изменение профиля скорости и, как следствие, возможно изменение условий устойчивости, масштабов и ориентации вторичных квазипериодических структур.

Часто параметром  $\delta$  в условиях E области можно пренебречь (когда  $\delta \approx 10^{-3}$ ), но его роль резко возрастает с высотой и уже на границе с F областью становится заметной. Для пренебрежимо малого  $\delta$  в E области профиль ветра будет определяться только гидродинамическими факторами, так что масштабные коэффициенты  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  будут равны [36]

$$\Lambda_1 = \frac{\left(\left[1+\gamma^2\right]^{1/2} + \gamma\right)^{1/2}}{\left(1+\gamma^2\right)^{1/2}}, \Lambda_2 = \frac{\left(\left[1+\gamma^2\right]^{1/2} - \gamma\right)^{1/2}}{\left(1+\gamma^2\right)^{1/2}}$$

Рассматривая профиль скорости (11), (12) как основное состояние, исследуем его устойчивость по отношению к периодическим в горизонтальной плоскости возмущениям. Представим поле скорости в виде суммы трех составляющих

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}_r + \mathbf{v},$$

где  $\bar{\mathbf{V}} = ((U_0(z,t), V_0(z,t), 0))$  – скорость среднего движения (геострофический профиль скорости),  $\mathbf{v}_r = (u_r(y, z, t), v_r(y, z, t), w_r(y, z, t))$  – скорость движений на масштабе валиков,  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  – турбулентные движения,  $z$  – вертикальная координата, в направлении координаты  $x$  характеристики течения предполагаются постоянными.

Турбулентные движения, как и выше описываются модифицированной вязкостью, учитывающей спиральность. Ниже будем характеризовать движение в валиковой структуре двумя величинами:  $u_r$  – скоростью в направлении оси  $x$  и  $\omega_r = \text{rot}_x \mathbf{v}_r$  – проекцией завихренности на эту ось:

$$\text{Re} \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + V_0 \frac{\partial u_r}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial U_0}{\partial z} + \{\Psi, u_r\} - \langle \{\Psi, u_r\} \rangle \right) = \Delta u_r + \gamma \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \omega_r}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} + \{\Psi, \omega_r\} - \langle \{\Psi, \omega_r\} \rangle \right) = \quad (17)$$

$$\Delta \omega_r - \gamma \frac{\partial}{\partial z} \Delta u_r + 2 \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

где  $\Delta \Psi = \omega_r$ , (повсюду далее  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ),  $v_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ,  $w_r = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,

$\{a, b\} = \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial y}$  – коммутационные скобки Пуассона.  $\langle f \rangle = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} f(y, z) dy$

– оператор осреднения по координате  $y$ .

Составляющие средней скорости  $U_0(z, t)$ ,  $V_0(z, t)$  определяются уравнениями

$$\text{Re} \left( \frac{\partial U_0}{\partial t} + \langle \{\Psi, u_r\} \rangle \right) = \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} - \gamma \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} + 2(V_0 - V_G) \quad (18)$$

$$\text{Re} \left( \frac{\partial V_0}{\partial t} + \left\langle \left\{ \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} \right\rangle \right) = \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} - 2(U_0 - U_G) \quad (19)$$

где  $\text{Re} = Gh_E / \nu = G(\Omega\nu)^{-1/2}$  – число Рейнольдса, построенное по турбулентной вязкости. В соответствии с выражением (10)  $U_G = \cos(\varphi)$ ,  $V_G = \sin(\varphi)$ .

Направление оси  $x$  (направление валиков) относительно скорости ветра на верхней границе зададим углом  $\varepsilon$ , на который и поворачиваем систему координат

нат. В отсутствие валиков стационарное состояние задается модифицированным экмановским профилем скорости

$$U_0 = \cos(\varphi - \varepsilon) - e^{-z} \left( \cos(\gamma' z - \varphi + \varepsilon) - \beta \cos(\gamma' z - \alpha + \varepsilon) \right), \quad (20)$$

$$V_0 = \sin(\varphi - \varepsilon) + e^{-z} \left( \sin(\gamma' z - \varphi + \varepsilon) - \beta \sin(\gamma' z - \alpha + \varepsilon) \right), \quad (21)$$

$$\gamma' = (1 + \gamma^2)^{1/2} - \gamma.$$

В уравнениях (20), (21) коэффициент затухания в экспоненте приведен к 1 для удобства численной реализации. Соответственно граничные условия будут выглядеть как:

$$\begin{aligned} u|_{z=0} = 0, v|_{z=0} = 0, w|_{z=0} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=\infty} = \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=\infty} = w|_{z=\infty} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} U_0|_{z=0} = \beta \cos(\alpha - \varepsilon), \quad V_0|_{z=0} = \beta \sin(\alpha - \varepsilon), \\ U_0|_{z=\infty} = \cos(\varphi - \varepsilon), \quad V_0|_{z=\infty} = \sin(\varphi - \varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

Рассматривая решение уравнений (16), (17) в виде

$$\begin{aligned} \Psi = \phi(z) \exp(ip(y - c't)), \\ u = \mu(z) \exp(ip(y - c't)), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $p$  – поперечное волновое число,  $c' = c_r + ic_i$  – комплексная фазовая скорость, получим связанную систему уравнений

$$\begin{aligned} \phi^{(4)} - 2p^2 \phi^{(2)} + p^4 \phi - ip \operatorname{Re} \left[ (V - c') (\phi^{(2)} - p^2 \phi) - V^{(2)} \phi \right] + \\ + (2 + \gamma p^2) \mu^{(1)} - g \mu^{(3)} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} - p^2 \mu - ip \operatorname{Re} \left[ (V - c') \mu + U^{(1)} \phi \right] - \\ - (2 + \gamma p^2) \phi^{(1)} + g \phi^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

где цифра в скобках обозначает порядок производной по  $z$ . Граничные условия для скоростей валиковых структур переписуются как

$$\begin{aligned} \phi|_{z=0} = \phi^{(1)}|_{z=0} = \mu|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=\infty} = \phi^{(2)}|_{z=\infty} = \mu^{(1)}|_{z=\infty} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (25), (26), описывающие возмущения скорости на фоне среднего течения  $U_0$ ,  $V_0$ , определяют задачу на собственные значения и собственные функции для переменных  $\phi$  и  $\mu$  при заданных  $\operatorname{Re}$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  и  $\gamma$ . Здесь можно выделить две подзадачи, связанные с анализом структуры неустойчивых возмущений: 1) определение минимальных чисел Рейнольдса, при которых появляется первое положительное значение мнимой части  $c$ , т.е. критического числа Рейнольдса  $\operatorname{Re}_{crit}$  и 2) определение скорости роста возмущений при  $\operatorname{Re} > \operatorname{Re}_{crit}$ .

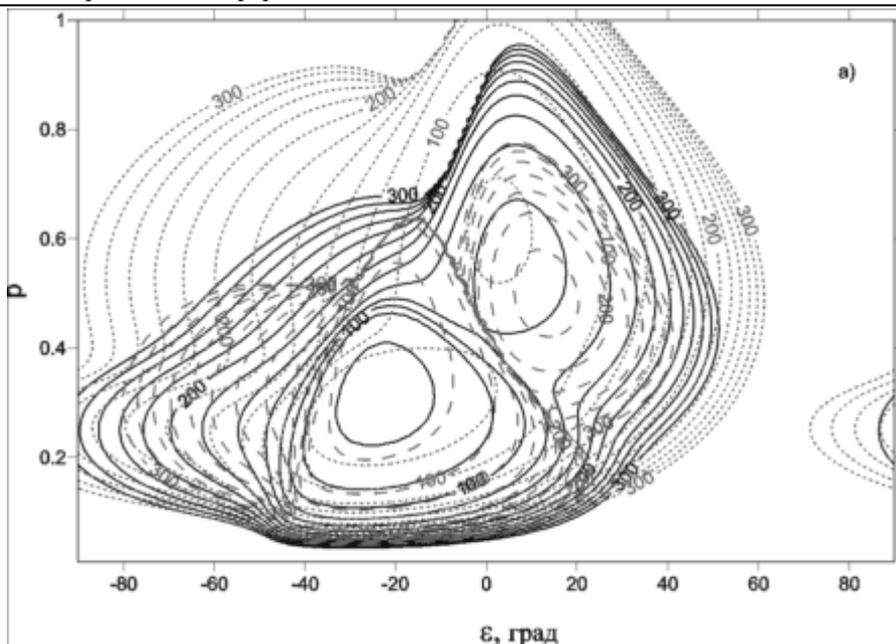
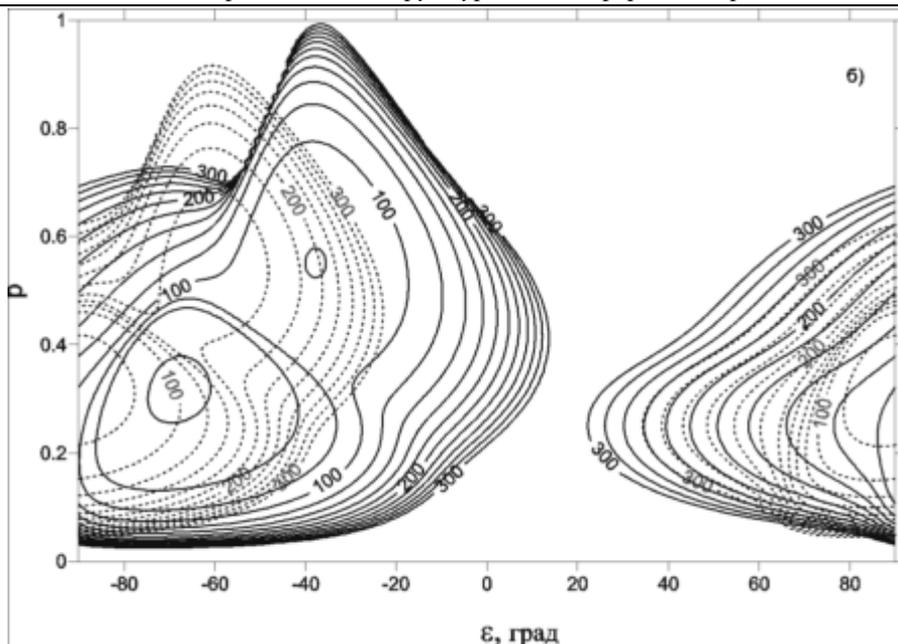


Рис. 7. Критические числа Рейнольдса для экмановского типа в атмосферном пограничном слое:  $\gamma = 0.0$  – сплошные линии уровня,  $\gamma = 0.2$  – штриховые линии уровня,  $\gamma = -0.2$  – пунктирные линии уровня

Численный алгоритм решения задачи основан на методе коллокации [38] с использованием интерполяционных многочленов Чебышева и детально обсуждался ранее [Пономарев и др., 2003].

Для экмановского слоя наблюдаются две неустойчивых ветви [26, 35, 39]. Первая – длинноволновая с горизонтальным безразмерным волновым числом  $p$ : 0.3 и критическим числом Рейнольдса  $Re_{crit}$ : 55 (так называемая параллельная неустойчивость). Название связано с тем, что энергия возмущений извлекается из геострофической компоненты ветра приблизительно сонаправленной с осью валов. Структуры, образующиеся в ходе развития этой неустойчивости повернуты на  $23^\circ$  по часовой стрелке [25] относительно направления геострофического ветра. Вторая неустойчивая ветвь – это динамическая неустойчивость с горизонтальным волновым числом  $p$ : 0.5 и критическим числом Рейнольдса  $Re_{crit}$ : 120, которая связана с присутствием точки перегиба на профиле агеострофической компоненты ветра и наблюдается в условиях как нейтрального, устойчивого, так и слабо-неустойчивого пограничных слоёв. Структуры этой ветви повернуты на  $7^\circ$  против часовой стрелки относительно направления геострофического ветра. Приведенные параметры соответствуют условиям прилипания на нижней границе и геострофическому ветру – на верхней границе.

На рисунке 7 показаны линии уровня критических чисел Рейнольдса, относительно углов поворота системы отсчета  $\epsilon$  и горизонтальных волновых чисел  $p$ , для значений параметра турбулентной спиральности  $\gamma = -0.2, 0.0, 0.2$  (более детально влияние параметра  $\gamma$  обсуждалось в [35, 39]) и нулевой скорости ветра на



**Рис. 8.** Критические числа Рейнольдса для течения экмановского типа с ненулевыми значениями скорости на нижней границе  $\beta = 1$ : сплошные линии уровня  $-\alpha = 90^\circ$ , точечные линии уровня  $-\alpha = 45^\circ$

нижней границе (условия приземного атмосферного пограничного слоя). В лабораторных экспериментах наблюдается как правило параллельная неустойчивость, в то время как в атмосферном пограничном слое, вероятнее всего, реализуется динамическая неустойчивость, инкременты которой значительно выше (см. рис. 2 в работе [39]). На рисунке 8 показано, как меняется картина распределения уровней критических чисел Рейнольдса при появлении ветра на нижней границе при  $\gamma = 0$ . Амплитуда скорости ветра на нижней границе здесь полагается равной  $\beta = 1$ . Угол поворота относительно направления на верхней границе  $\alpha = 90^\circ$ . Нетрудно видеть, что критические числа Рейнольдса здесь заметно ниже  $-40$  и  $80$  соответственно для параллельной и динамической неустойчивостей (по сравнению с  $55$  и  $120$ ). Это связано, в частности, с тем, что для такой системы эффективное число Рейнольдса можно было бы строить по разности скоростей на верхней и нижней границах  $-\text{Re}_{\text{eff}}: (1 + \beta^2 - 2\beta\cos(\alpha))^{-1/2} \text{Re}$ .

Как видно из рис. 8, волновые числа практически не меняются. Меняется ориентация структур – углы расположения минимумов критических чисел Рейнольдса.

Характерные значения средних скоростей ветра на высотах E слоя достигают значений порядка  $100$  м/с [40]. Значения турбулентной вязкости, оцениваемой в основном по разрушению внутренних волн –  $100\text{--}1000$  м<sup>2</sup>/с [41]. Следует обратить внимание, что авторы работы [42], моделировавшие развитие турбулентности в условиях мезосферы, отмечают, что неустойчивость сдвиговых течений (в данной работе рассматривалась лишь неустойчивость Кельвина–Гельмгольца)

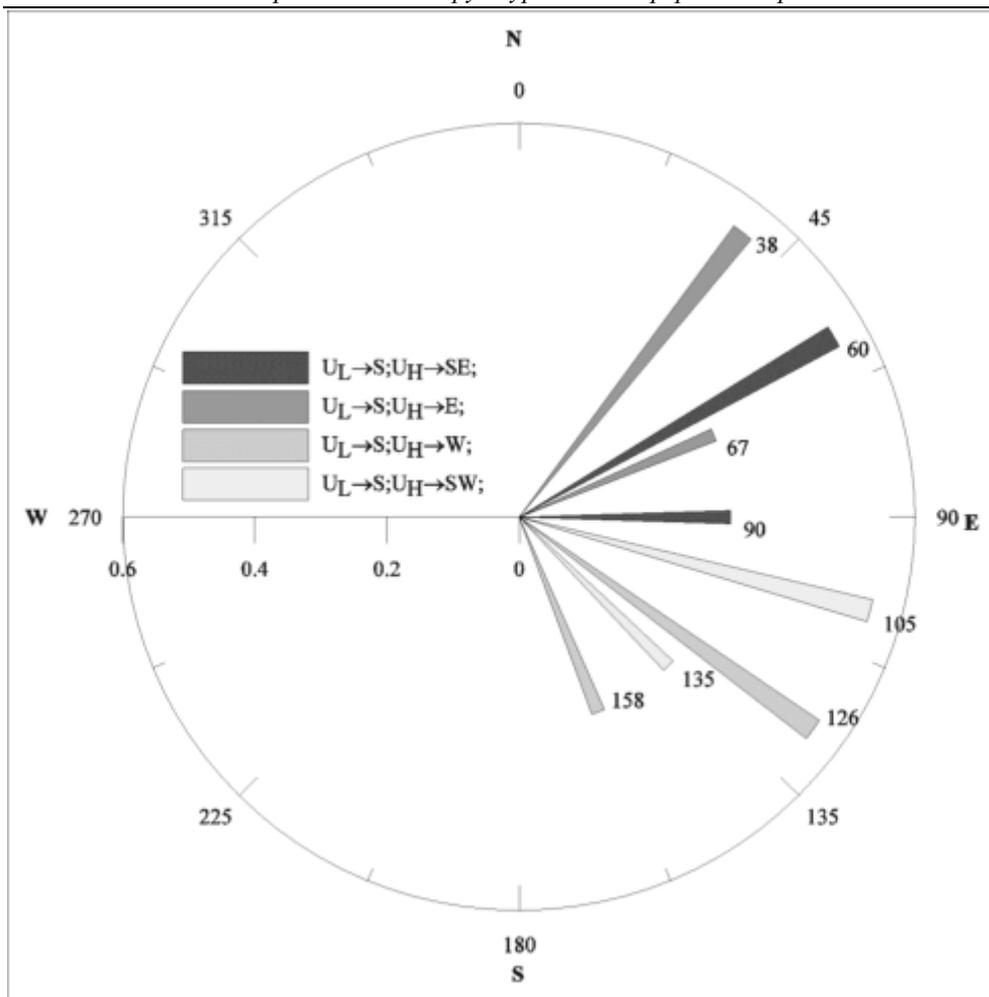
более существенна и имеет большие динамические эффекты, чем процессы разрушения ВГВ. Число Рейнольдса при указанных выше значениях физических параметров лежит в диапазоне 200–1500, что выше его критических уровней. Таким образом при формировании профиля скорости экмановского типа в слое E создаются условия для возникновения периодических вытянутых валиковых структур. При данных значениях турбулентной вязкости экмановский масштаб на средних широтах ( $\theta : 40^\circ$ ) будет порядка  $h_E : 0.5\text{--}5$  км, а масштаб возникающей при динамической неустойчивости ( $p : 0.5$ ) периодической валиковой структуры будет  $L = 2\pi h_E / p : 6\text{--}60$  км.

На рисунке 9 показаны результаты наших численных расчётов, в которых фиксируется направление ветра на нижней границе (южное) и меняется направление на верхней. По радиусу отложены величины горизонтального волнового числа, по азимуту – угол в области минимума критического числа Рейнольдса, которые определяют в основном ориентацию структур и на нелинейной стадии их развития [39]. Амплитуды скоростей на верхней и нижней границах полагались равными 1. Расчеты здесь велись при нулевом параметре турбулентной спиральности  $\gamma = 0$ . Следует отметить, что учет турбулентной спиральности ведет к изменению угла ориентации для структур, формирующихся механизмом динамической неустойчивости в пределах  $\pm(7\text{--}8)^\circ$  [35] (см. также рис. 7, 8, что не сильно смещает полученные нами значения). Значения турбулентной спиральности и "регулярной" спиральности структур в МНТ области оказываются порядка  $-0.01\text{--}0.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  [36]. Турбулентная спиральность в АПС приводит к изменениям критических чисел Рейнольдса, волнового масштаба возмущения экмановского профиля, инкрементов роста неустойчивых возмущений и сильно влияет на нелинейную динамику структур [35, 39]. Эти вопросы для условий МНТ будут предметом нашего дальнейшего исследования.

Из рисунка 9 видно, что для типичного профиля ветра на высотах МНТ получаем наблюдаемую в эксперименте ориентацию образующихся здесь крупномасштабных структур в нейтральной (следовательно, и в плазменной, из-за большой частоты столкновений нейтральных частиц с ионами) компоненте. Главную роль в ориентации структур (по механизму неустойчивости) играет южная компонента ветра (для северного полушария), она же обуславливает юго-западный дрейф структур (ведь если структуры сильно вытянуты в направлении СЗ–ЮВ, то при южном ветре фазовый фронт структуры будет перемещаться на юго-запад).

Следует отметить, что в расчетах возникают также структуры, вытянутые в направлении СВ–ЮЗ (см. рис. 9). Они наблюдаются и в эксперименте [23, 24]. Такая ориентация структур противоречит выводам теории [18], но хорошо описывается в рамках модели, предложенной в настоящей работе.

Таким образом, для типичного профиля ветра на высотах МНТ получаем наблюдаемую в эксперименте ориентацию образующихся здесь крупномасштабных структур в нейтральной (а, следовательно, и в плазменной, из-за большой частоты ион-нейтральных столкновений) компоненте. Главную роль в ориентации структур (по механизму неустойчивости) играет южная компонента ветра, она же обуславливает юго-западный дрейф структур (ведь если структуры сильно вытянуты в направлении СЗ–ЮВ, то при южном ветре фазовый фронт структуры будет перемещаться на юго-запад).



**Рис. 9.** Ориентация валиковых структур при южном ветре на нижней границе и переменном направлении скорости на верхней границе, определяемая по положению минимумов критических чисел Рейнольдса (см., например, рис. 4 а, б).  $U_L$ ,  $U_H$  – скорости ветра на нижней и верхней границах соответственно. Короткие и длинные радиальные сектора соответствуют безразмерным горизонтальным волновым числам  $p = 0.5$  и  $p = 0.3$ , цифры около концов секторов указывают на направление вытянутости структур

Следует отметить, что в эксперименте наблюдают и структуры, ориентированные в направлении СЗ-ЮВ, которые возникают и в наших численных расчетах. Однако, наблюдения структур с подобной ориентацией редки, что, по-видимому, указывает на определенные выделенные направления ветра как на верхней границе, так и на нижней границах.

Полученные выше оценки спиральности и расчет ориентации образующихся в верхней атмосфере структур позволяют по-новому интерпретировать процессы на высотах МНТ, где механизмы неустойчивостей экмановского типа ещё не рассматривались.

### Заключение

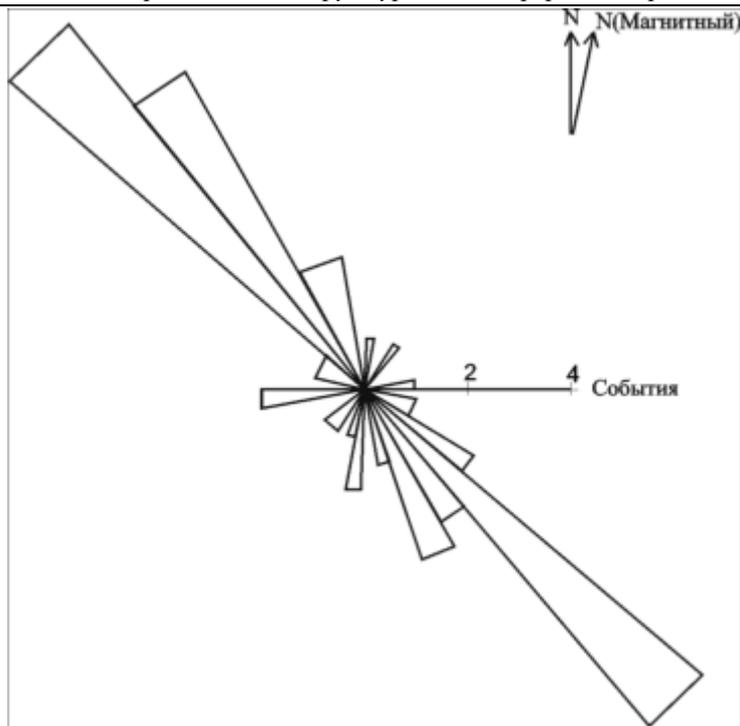
Одной из загадок ночного слоя Es остается достаточно частое его появление в виде фронтальных структур, вытянутых, как правило, вдоль направления СЗ-ЮВ (ЮЗ-СВ) в северном (южном) полушарии [6–10].

Наиболее полное исследование этого явления посредством зондирования ионосферы проведено в работе [10] (Брисбен, Австралия), где для получения данных были использованы 2 ионозонда и 4 приемника, разделенные десятками км. Десять ионосферных отражений регистрировались каждые 2 мин, начиная с сентября 1963 г. по август 1964 г. (минимум солнечной активности). Авторы выделили 2 типа Es: стабильные (steady, далее тип 1) и меняющиеся (changing, далее тип 2). Тип 1 – это слои Es, критические частоты которых менялись менее, чем на 0.2 МГц за время более 4 мин. В дневное время был зарегистрирован 41% слоёв типа 1 и 59% слоёв типа 2. В ночное время в основном регистрировали Es типа 2 (77% наблюдаемых Es). Однако среди ночных слоёв типа 2 была выделена подгруппа (третья часть наблюдений), когда изменения можно рассматривать как процесс формирования или диссипации слоёв. Остальные случаи наблюдения слоёв типа 2 (дневных и ночных) – это фронтальные структуры, дрейфующие горизонтально без изменения формы (в течение, по крайней мере, 15 мин). Сами структуры представляли собой последовательное чередование уплотнений и разрежений концентрации плазмы в Es, с типичными масштабами 10–40 км и протяженностью вдоль фронта : 100 км [9]. Именно такие структуры, скорее всего, обуславливают явление << spread E >> .

Необычным свойством дрейфующих фронтальных структур оказалось направление их дрейфа. На рисунке 6 представлено распределение направлений дрейфа структур на высоте 110 км, полученное в работе [10] и определенное для "гребней" (т.е. уплотнений плазмы  $E_s$ , для "провалов" картина аналогичная). Видно, что дрейф структур группируется около СЗ и ЮВ направлений, что соответствует протяжению фронтальных структур в направлении СВ-ЮЗ (если бы структуры не были протяженными, можно было бы ожидать более широкий разброс направлений). Как следует из рисунка 6, дрейф ориентирован вдоль направлений между 40° и 50° восточнее направления на север.

Подобные результаты для фронтальных структур и их дрейфа были получены и для северного полушария [7, 8] в Японии, где наблюдался дрейф на ЮЗ до полуночи, и на СВ после полуночи. Однако здесь дрейф имел больший разброс, чем в южном полушарии.

Как было упомянуто во введении, из наблюдений следует, что фронтальные структуры вытянуты в определенном азимутальном направлении, и их дрейф, соответственно, также имеет преимущественное направление – перпендикулярно фронту структуры. В наблюдениях такие структуры могут следовать одна за другой с характерной длиной волны 10–40 км [10]. Такую же периодичность в пространстве демонстрируют так называемые квазипериодические (QP) радиоотражения от E области ионосферы, регистрируемые посредством когерентных радаров [11, 16]. QP радиоотражения, в свою очередь, ассоциируются со слоями Es и обусловлены упорядоченными (квазипериодическими) и вихревыми структурами в них с горизонтальной осью, ориентированной под углом к зональному на-



**Рис. 10.** Гистограмма направлений дрейфа, вычисленная по 110-ти ионограммным регистрациям "гребней" спорадического слоя E [10]

правлению [13, 4, 14]. Эти структурные образования имеют пространственные масштабы по вертикали : 5–6 км, горизонтальные – порядка нескольких десятков км и времена жизни 1–3 ч.

Таким образом, возник вопрос о механизме образования ориентированных  $E_s$  слоев, который, как полагают, был решен после работы [18], в которой авторы сообщили об обнаружении так называемой azimuth-dependent  $E_s$  layer instability ( $E_s$  неустойчивости). Считается, что эта плазменная неустойчивость должна развиваться (и структурировать) E область ионосферы, причем структуры должны дрейфовать на юго-запад под углом (отсчитываемым против часовой стрелки)  $45^\circ$  относительно направления на запад ( $45^\circ$  соответствует максимальному инкременту неустойчивости).

Между тем, эксперименты указывают на несоответствие действительности такого сценария. В частности, в нижней ионосфере фронтальные структуры, с которыми ассоциируются QR радиоотражения, могут дрейфовать и на северо-восток, и на юго-восток, следуя за поворотом направления ветра [24], что никак не соответствует развитию  $E_s$  – неустойчивости, рассмотренной в работе [19]. Более того, теоретический анализ показывает [43], что, вообще говоря, крупномасштабная плазменная неустойчивость в E слое не имеет выделенного направления. Следовательно, вопрос о механизме образования и ориентации структур в E слое требовал дальнейшего исследования.

Предложенный в настоящей работе механизм естественно объясняет возникновение структур в E слое, их пространственно-временные масштабы, ориентацию и направление дрейфа. В частности, дрейф структур обусловлен, как и следовало ожидать, ветром, направление которого меняется с высотой по спирали. Следует отметить, что неустойчивость ветрового сдвига в E слое и роль этой неустойчивости в образовании структур в плазме (в частности QR радиоотражений) качественно была проанализирована в работах [44, 40] и численно в работе [45]. При этом речь шла лишь о развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, которая, как показано в работе [36], не способна объяснить время жизни, ориентацию и направление дрейфа структур в E слое. И хотя авторы экспериментальных работ [4, 46] упомянули возможность развития параллельной неустойчивости [26] в образовании валиков на высотах МНТ, но, полагаясь на полную аналогию с возникновением конвективных валов в АПС, искали (по измеренным температурным профилям) условия для возникновения конвекции в области МНТ. При этом спиральная структура ветра не была принята во внимание, а именно она является определяющей в развитии вихревых фронтальных структур в области МНТ [36]. Вопрос о дальнейшем влиянии ориентированных слоев E<sub>s</sub> на область F рассмотрен в работе [47].

## Литература

- [1] Данилов А.Д., Казимировский Э.С., Вергасова Г.В., Хачикян Г.Я. Метеорологические эффекты в ионосфере. Л.: Гидрометеоздат, 1987. 270 с.
- [2] Шалимов С.Л. О структуре крупномасштабных вихревых движений в E области ионосферы // Космич. исслед. 2003. Т. 41. Вып. 6. С. 590–595.
- [3] Kelley M.C. The Earth's Ionosphere: Plasma Physics & Electrodynamics. Academic Press, 2009. 550 p.
- [4] Larsen M.F., Liu A.Z., Gardner C.S., Kelley M.C., Collins S., Friedman J., Hecht J.H. Observations of overturning in the upper mesosphere and lower thermosphere // J. Geophys. Res. 2004. V. 109. № D2. D02S04.1–D02S04.9.
- [5] Chu Y.H., Su C.L., Larsen M.F. First measurements of neutral wind and turbulence in the mesosphere and lower thermosphere over Taiwan with chemical release experiment // J. Geophys. Res. 2007. V.112. A02301.
- [6] Bowman G.G. Some aspects of sporadic E at mid-latitudes // Planet. Space Sci. 1960. V. 2. № 4. P. 195–202.
- [7] Sinno K., Ouchi C., Nemoto C. Structure and movement of E<sub>s</sub> detected by LORAN observations // J. Geomagn. Geoelectr. 1964. V. 16. № 2. P. 75–88.
- [8] Sinno K., Ouchi C., Nemoto C., Futagawa H. Structure and movement of E<sub>s</sub> detected by LORAN observations (Loran detection of structure, movement and slanted in sporadic E region as measured at several stations) // J. Radio Res. Lab. 1965. V. 12. № 59. P. 59–63.
- [9] Goodwin G.L. The dimensions of some horizontally moving E<sub>s</sub>-region irregularities // Planet. Space Sci. 1966. V. 14. № 8. P. 759–771.
- [10] Goodwin G.L., Summers R.N. E<sub>s</sub>-layer characteristics determined from spaced ionosondes // Planet. Space Sci. 1970. V. 18. № 10. P. 1417–1432.
- [11] Yamamoto M., Fukao S., Woodman R.F., Ogawa T., Tsuda T., Kato S. Mid-latitude E region field-aligned irregularities observed with the MU radar // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. № A9. P. 15943–15949.

[12] *Haldoupis C., Bourdillon A., Kamburelis A., Hussey G.C., Koehler J.A.* 50 MHz continuous wave interferometer observations of the unstable midlatitude E region ionosphere // *Ann. Geophysics*. 2003. V. 21. № 7. P. 1589–01600.

[13] *Hysell D., Larsen M., Zhou Q.* Common volume coherent and incoherent scatter radar observations of midlatitude sporadic E layers and QP echoes // *Ann. Geophysics*. 2004. V. 22. № 9. P. 3277–3290.

[14] *Larsen M.F., Hysell D.L., Zhou Q.H., Smith S.M., Friedman J., Bishop R.L.* Imaging coherent scatter radar, incoherent scatter radar, and optical observations of quasi-periodic structures associated with sporadic E layers // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. № A6. P. A06321.1–A06321.12.

[15] *Tsunoda R.T., Cosgrove R.B.* Coupled electrodynamics in the nighttime midlatitude ionosphere // *Geophys. Res. Lett.* 2001. V. 28. № 22. P. 4171–4174.

[16] *Haldoupis C., Kelley M.C., Hussey G.C., Shalimov S.* Role of unstable sporadic-E layers in the generation of midlatitude spread-F // *J. Geophys. Res.* 2003b. V. 108. № A12. 1446. SIA 11-1–11-8.

[17] *Perkins F.* Spread F and ionospheric currents // *J. Geophys. Res.* 1973. V. 78. № 1. P. 218–226.

[18] *Cosgrove R.B., Tsunoda R.T.* A direction-dependent instability of sporadic-E layers in the nighttime midlatitude ionosphere // *Geophys. Res. Lett.* 2002. V. 29. № 18. P. 11.1–11.4.

[19] *Cosgrove R.B., Tsunoda R.T.* Coupling of the Perkins instability and the sporadic-E layer instability derived from physical arguments // *J. Geophys. Res.* 2004. V. 109. № A6. P. A06301.1–A06301.11.

[20] *Cosgrove R.B.* Generation of mesoscale F layer structure and electric fields by the combined Perkins and E<sub>s</sub> layer instabilities, in simulations // *Ann. Geophysics*. 2007. V. 25. № 7. P. 1579–1601.

[21] *Yokoyama T., Hysell D., Otsuka Y., Yamamoto M.* Three-dimensional simulations of the coupled Perkins and E<sub>s</sub>-layer instabilities in the nighttime midlatitude ionosphere // *J. Geophys. Res.* 2009. V. 114. P. A03308.1–A03308.16.

[22] *Otsuka Y., Onoma F., Shiokawa K., Ogawa T., Yamamoto M., Fukao S.* Simultaneous observations of nighttime medium-scale traveling ionospheric disturbances and E region field-aligned irregularities at midlatitude // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. № A6. P. A06317.1–A06317.9.

[23] *Ogawa T., Yamamoto M., Fukao S.* Middle and upper atmosphere radar observations of turbulence and movement of midlatitude sporadic E irregularities // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100. № A7. P. 12173–12188.

[24] *Ogawa T., Otsuka Y., Onoma F., Shiokawa K., Yamamoto M.* The first coordinated observations of mid-latitude E region quasi-periodic radar echoes and lower thermospheric 557.7-nm airglow // *Ann. Geophysics*. 2005. V. 23. № 7. P. 2391–2399.

[25] *Михайлова Л.А., Орданович А.Е.* Когерентные структуры в пограничном слое атмосферы // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1991. Т. 27. С. 593–613.

[26] *Lilly D.K.* On the instability of Ekman boundary flow. // *J. Atmos. Sci.* 1966. V.23. P. 481–494.

[27] *Rosenberg N.* Dynamic model of ionospheric wind profiles // *J. Geophys. Res.* 1968. V. 73. № 15. P. 4965–4968.

[28] *Чхетиани О.Г.* О спиральной структуре экмановского пограничного слоя // *Физика атмосферы и океана*. 2001. Т. 37. № 5. С. 614–620.

[29] *Копров Б.М., Копров В.М., Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* Измерение турбулентной спиральности и ее спектра в пограничном слое атмосферы // *ДАН*. 2005. Т. 403 (5). С. 627–630.

- [30] *Etling D.* Some aspects of helicity in atmospheric flows. // *Beitr. Phys. Atmosph.* 1985. V. 58. P. 88–100
- [31] *Хантадзе А.Г.* Об изменении скорости и направлении ветра с высотой в турбулентной электропроводящей атмосфере // *Геомагнетизм и аэронавигация.* 1968. Т. 8. № 2. С. 236–249.
- [32] *Докучаев В.П.* О влиянии магнитного поля Земли на ветры в ионосфере // *Изв. АН СССР. Сер. Геофизическая.* 1959. № 5. С. 783–787.
- [33] *Chu Y.H. et al.* First measurements of neutral wind and turbulence in the mesosphere and lower thermosphere over Taiwan with chemical release experiment // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. P. A02301.
- [34] *Venkateswara Rao, N., Patra, A.K., Rao S.V.B.* Some new aspects of low-latitude E-region QP echoes revealed by Gadanki radar: Are they due to Kelvin-Helmholtz instability or gravity waves? // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. P. A03309.
- [35] *Пономарев В.М., Ханаев А.А., Чхетиани О.Г.* Роль спиральности в формировании вторичных структур в экмановском пограничном слое // *Изв. АН. Физика атмосферы и океана.* 2003. Т. 39. № 4. С. 435–444.
- [36] *Чхетиани О.Г., Шалимов С.Л.* Спиральность в верхней атмосфере и неустойчивости экмановского типа // *ДАН.* 2010. Т. 431. № 1. С. 113–118.
- [37] *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. 314 с.
- [38] *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: R&C Dynamics, 2002. 847 с.
- [39] *Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В.* Нелинейная динамика крупномасштабных вихревых структур в турбулентном экмановском слое // *Механика жидкости и газа.* 2007. Т. 42. № 4. С. 72–82.
- [40] *Larsen M.F.* Winds and shears in the mesosphere and lower thermosphere: Results from four decades of chemical release wind measurements // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. № A8. 3ю 1215. SIA 28-1–28-29.
- [41] *Hocking W.K.* The dynamical parameters of turbulence theory as they apply to middle atmosphere studies // *Earth Planets Space.* 1999. V. 51. № 7/8. P. 525–541.
- [42] *Fritts D.C., Bizon C., Werne J.A., Meyer C.K.* Layering accompanying turbulence generation due to shear instability and gravity-wave breaking // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108. № D8. 8452. 13 p.
- [43] *Shalimov S., Ogawa T., Otsuka Y.* On the gravity wave-driven instability of E layer at mid-latitude // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2009. V. 71. № 17/18. P. 1943–1947.
- [44] *Larsen M.F.* A shear instability seeding mechanism for quasiperiodic radar echoes // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 105. № A11. P. 24931–24940.
- [45] *Bernhardt P.A.* The modulation of sporadic-E layers by Kelvin-Helmholtz billows in the neutral atmosphere // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2002. V. 64. № 12–14. P. 1487–1504.
- [46] *Hurd L., Larsen M., Liu A.* Overturning instability in the mesosphere and lower thermosphere: analysis of instability conditions in lidar data // *Ann. Geophysics.* 2009. V. 27. № 7. P. 2937–2945.
- [47] *Shalimov S., Yamamoto M.* Influence of mid-latitude sporadic E layer patches upon the F region plasma density // *J. Geophys. Res.* 2010. V. 115. P. A05309.1–A05309.7.

#### 4.4. Диффузия и вертикальный транспорт ионов и атомов металлов в области термосферы нижней мезосферы

*О.Г. Чхетиани<sup>1,2</sup>, С.Л. Шалимов<sup>3,1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>2</sup>*Институт космических исследований РАН*

<sup>3</sup>*Институт физики земли им. О.Ю. Шмидта РАН*

##### Введение

В последние годы получены новые экспериментальные результаты по динамике нижней ионосферы (т.е. в области перехода от мезосферы к нижней термосфере, высоты 90–115 км) [1–5], которые указывают на то, что данная область является уникальным местом формирования структур различного типа. Среда на этих высотах представляет собой слабоионизованную плазму, погруженную в геомагнитное поле. Согласно эксперименту, несмотря на турбулизованное состояние как нейтральной, так и плазменной компонент, в указанной области часто присутствуют (как в нейтральной, так и в плазменной компоненте) упорядоченные (квазипериодические) и вихревые структуры (роллы) с горизонтальной осью ориентированной под углом к зональному направлению.

В отношении квазипериодичности упомянутые структуры аналогичны давно известным так называемым квазипериодическим (QP) радиоотражениям от E области ионосферы, которые регистрируют посредством когерентных радаров [6, 7]. Использование интерферометрических радаров [6], позволяющее строить 3-мерные изображения движения и ориентации ионосферных неоднородностей показало, что упомянутые QP радиоотражения, в свою очередь, ассоциируются со слоями Es, нестабильность которых и обуславливает развитие упорядоченных (квазипериодических) и вихревых структур (роллов) с горизонтальной осью, ориентированной под углом к зональному направлению [1, 2, 6]. Эти структурные образования имеют пространственные масштабы по вертикали порядка 5–6 км, горизонтальные – порядка нескольких десятков км и времена жизни 1–3 часа.

Характерно, что наблюдаемые на высотах перехода от мезосферы к термосфере профили ветра, демонстрируют хорошо развитую спираль годографа вектора скорости [8, 9], аналогичную хорошо известной экмановской спирали, имеющей место в атмосферном пограничном слое (АПС) при условиях близких к нейтральным [10]. Течения такого типа, как известно, неустойчивы к образованию периодических структур валикового типа.

##### 1. Линейный и нелинейный механизмы образования вихревых структур в переходной области

Согласно линейной теории, в течениях экмановского типа существуют две неустойчивых ветви [11]. Первая – длинноволновая с горизонтальным безразмерным волновым числом  $\sim 0.3$  и критическим числом Рейнольдса  $\sim 55$  (так называемая параллельная неустойчивость). Число Рейнольдса экмановского слоя определяется как  $Re = (U h_E / K) = U / (K \Omega)^{1/2}$ , где  $U$  – скорость геострофического ветра. В качестве масштаба обезразмеривания выступает толщина экмановского

слоя, определяемая как  $h_E = (K / \Omega)^{1/2}$  ( $K$  – турбулентная вязкость,  $\Omega$  – параметр Кориолиса). Энергия возмущений данной неустойчивости извлекается из геострофической компоненты ветра. Структуры, образующиеся в ходе развития этой неустойчивости, повернуты на  $23^\circ$  по часовой стрелке [11] относительно направления геострофического ветра. Вторая неустойчивая ветвь – это неустойчивость с горизонтальным волновым  $\sim 0.5$  и критическим числом Рейнольдса  $\sim 120$ , связанная с присутствием точки перегиба на профиле агеострофической компоненты ветра и наблюдается в условиях как нейтрального, устойчивого, так и слабо-неустойчивого пограничных слоёв. Структуры этой ветви повернуты на  $7^\circ$  против часовой стрелки относительно направления геострофического ветра. Развитая валиковая циркуляция в АПС устойчива [12, 13], и ее вихри обеспечивают до 50% всего тепло-массопереноса [14]. Значительное влияние на развитие вторичных вихревых структур и их динамику оказывает спиральность профиля ветра и обусловленная ею спиральность турбулентности АПС [15, 16].

Наличие экмановского профиля ветра на высотах мезосферы-термосферы также определенно указывает и здесь на отличную от нуля спиральность течения. Для измеренных профилей скорости [4, 9] величины спиральности оказываются равными  $0.1-1 \text{ м/с}^{-2}$  [17]. Турбулентная вязкость оценивается по разрушению внутренних волн и равна  $100-1000 \text{ м}^2/\text{с}$  [18]. Моделирование развитие турбулентности в условиях мезосферы [19] показывает, что неустойчивость сдвиговых течений (в работе рассматривалась лишь неустойчивость Кельвина-Гельмгольца) более существенна и имеет большие динамические эффекты, чем процессы разрушения ВГВ. Число Рейнольдса при указанных выше величинах физических параметров лежит в диапазоне  $200-1500$ , что выше его критических уровней.

Таким образом, при формировании профиля скорости экмановского типа в слое E создаются условия для возникновения периодических вытянутых валиковых структур [17]. Для типичного профиля ветра на высотах мезосферы-термосферы получается наблюдаемая в эксперименте ориентация образующихся здесь крупномасштабных структур в нейтральной (а, следовательно, и в плазменной, из-за большой частоты ион-нейтральных столкновений) компоненте.

Было проведено численное исследование нелинейных режимов вторичных вихревых структур [16]. Расчеты при числах Рейнольдса близких к критическим для сдвиговой неустойчивости и неустойчивости с точкой перегиба на профиле основного течения воспроизводят периодическую структуру циркуляционных движений. Введение в модель турбулентных напряжений, учитывающих турбулентную спиральность меняет картину валиковой циркуляции особенно для сдвиговой неустойчивости: появляется многомасштабность циркуляции. При сильной нелинейности пространственная периодичность вторичного течения нарушается, и возможно формирование структур, близких к уединенным.

Эти экспериментальные и аналитические исследования указывают на то, что нижняя ионосфера также может быть выделенной с точки зрения транспортных характеристик.

## 2. Динамика и химия атомов металла в переходной области

Атомы металла (Fe, Na, Ca и др.) попадают в нижнюю ионосферу в результате процесса абляции метеороидов. Проявляют же они себя в виде слоев (так называ-

емых спорадических нейтральных слоев Ns), с максимумами концентраций, расположенными в диапазоне высот 80-105 км. Ионы металлов образуются в результате ионизации соответствующих атомов и проявляются также как спорадические слои (спорадические слои E или Es) на высотах 90–140 км [20]. Медленная рекомбинация ионов (около 10 часов на высоте порядка 100 км) обеспечивает их присутствие и в ночной ионосфере. Как ионы, так и атомы металлов служат своеобразным трассером нейтральных движений в E области ионосферы при наблюдениях посредством радаров и лидаров соответственно. Движения в нейтральной компоненте (в первую очередь – это наиболее мощные термические приливы), плотность которой на много порядков превосходит плотность плазмы, вовлекают ионы в своё движение (это возможно в нижней ионосфере, поскольку ионы, в отличие от электронов, здесь не замагничены). Однако, если ионы движутся поперек геомагнитного поля, возникает сила Лоренца. Если представить, как это обычно делали в двумерных моделях, спираль Экмана термического прилива в виде шира ветра (ветрового сдвига), то совместное действие шира и силы Лоренца приводит к формированию слоев металлических ионов в ночной нижней ионосфере [21]. Именно исследование этих слоев Es посредством радиозондов и когерентных радаров позволило обнаружить плазменные квазипериодические и вихревые структуры в нижней ионосфере (см., например, [1, 5]).

Согласно наблюдениям, как правило, слои Ns наблюдаются в непосредственной связи со слоями Es [22]. В соответствии с общей схемой процессов в области МНТ [20], слои Ns могут быть сформированы из слоёв Es после образования молекулярных ионов или ионных кластеров с последующей реакцией диссоциативной рекомбинации. Эти процессы ионно-молекулярных реакций сильно зависят от высоты и, естественно, различны для каждого сорта атомов.

Например, схема ионно-молекулярных реакций, показанная на рис. 1, позволяет объяснить процесс формирования слоев Na из слоев  $\text{Na}^+$  [23].

Продвигаясь вниз, вслед за фазой термического прилива, ионы металлов в составе спорадических слоёв E попадают на высоты около 100 км.

При этом взаимодействие  $\text{Na}^+$  с  $\text{N}_2$  приводит к образованию слабо связанных ионных кластеров (например,  $\text{Na}\cdot\text{N}_2^+$ ). Однако, выше 100 км эти кластеры, реагируя с атомами O, приводят снова к образованию  $\text{Na}^+$ . На высотах ниже 100 км происходит переключение лиганда за счет реакций с  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ , что приводит к образованию стабильных ионных кластеров (например,  $\text{Na}\cdot\text{CO}_2^+$ , устойчивых к взаимодействию с атомами O), которые после реакции диссоциативной рекомбинации могут достаточно быстро производить атомы Na [23].

Таким образом, если следить за полным содержанием числа атомов Na в атмосферном столбе единичного сечения в течение суток, можно иногда зарегистрировать внезапный рост их концентрации, обусловленный совместным вкладом фотохимии и термического прилива. Однако здесь мы не рассматриваем эти внезапные увеличения полного содержания атомов Na в столбе, предполагая, что число их в среднем за день остается приблизительно постоянным (что соответствует эксперименту [24]) и равным  $5\cdot 10^9$  атомов/см<sup>2</sup> [25].

Согласно наблюдениям [26], максимум концентрации атомов Na находится вблизи высоты 90 км (далее речь пойдет только об атомах Na, поскольку именно этот элемент и процессы, связанные с ним, изучены наиболее полно). Выше 90 км доминируют химические процессы, в которых атомы Na ионизируются в основ-

ном в результате перезарядки с основными ионами  $\text{NO}^+$  и  $\text{O}_2^+$  и в меньшей степени за счет фотоионизации. В свою очередь, ионы  $\text{Na}^+$  нейтрализуются посредством образования кластерных ионов с их последующей диссоциативной рекомбинацией. На высотах ниже 90 км атомы Na конвертируются в  $\text{NaHCO}_3$  посредством серии реакций, которые начинаются с реакции окисления Na озоном  $\text{O}_3$ . Однако, как было недавно установлено [27], время жизни  $\text{NaHCO}_3$  в процессе фотолиза на высотах МНТ всего лишь несколько часов, и после его распада атомы Na снова высвобождаются. Таким образом, в течение дня ниже 90 км должно было бы наблюдаться заметное увеличение атомов Na (как результат фотолиза  $\text{NaHCO}_3$ ), чего, однако, не наблюдают. Одно из объяснений этого факта – быстрое удаление  $\text{NaHCO}_3$  из области его образования (75–85 км). Механизмы этого удаления до конца не ясны. Один из них – удаление  $\text{NaHCO}_3$  за счет его полимеризации в димеры и поглощение содержащих Na соединений пылевыми частицами [25]. Однако такой механизм позволяет свести концы с концами только при условии, что поток Na в атмосферу в результате абляции составляет  $8 \cdot 10^3$  атомов/см<sup>2</sup>с, что соответствует глобальному поступлению массы метеороидов 12 т/день.

Между тем средний поток массы метеороидов известен с большой неопределенностью. Так, до 90-х годов прошлого века оценки потока массы по измерениям с помощью метеорных радаров давали величину около 44 т/день (по всей Земле) [28]. Учет недостатков этого метода регистрации (зеркальное отражение от метеорного следа на одной длине волны, откуда масса и скорость метеороида определяются косвенно) привело к пересмотру оценок, которые были увеличены в 2–3 раза [29]. По измерению содержания иридия в осадках океанического дна поток массы был оценен величиной 240 т/день [30]. Однако недавние измерения содержания иридия и платины в кернах полярного льда привели к выводу о потоке массы  $40 \pm 16$  т/день [31], а измерения сверхмагнетизма Fe космического происхождения в кернах льда дают оценку  $35 \pm 10$  т/день [32].

Недавно с помощью детектора (Long Duration Exposure Facility, LDEF), установленного на спутнике и регистрирующего в течение нескольких лет ударные кратеры, обусловленные малыми частицами, была получена оценка потока массы в интервале 80–130 т/день [33]. Анализ частиц стратосферного аэрозоля показал, что 50% частиц в нижней стратосфере содержат от 0.5 до 1 весовых % метеорного железа по массе, что давало оценку потока массы между 20 и 100 т/день [34]. Прямые наблюдения с помощью радиотелескопа в Аресибо (непосредственные наблюдения облака плазмы при вторжении частицы в атмосферу) [Mathews 35] приводили к более умеренной оценке потока массы – около 10 т/день.

Таким образом, поток массы метеороидов, согласно наблюдениям, варьируется в достаточно широком диапазоне (от 10 до 240 т/день). Следовательно, при сохранении полного содержания атомов металла (Na) в столбе единичного сечения, диффузионный поток (или коэффициент диффузии), обеспечивающий баланс полного содержания, также может меняться в широком диапазоне. Можно полагать поэтому, что при больших потоках массы метеороидов необходим дополнительный эффективный вертикальный транспорт, например, за счет турбулентной диффузии и/или диффузии, обусловленной развитием вихревых структур (они, как отмечено в параграфе 2, развиваются и на указанных высотах вследствие неустойчивостей экмановского типа).

Для расчетов обычно используют одномерные модели, в которых химические процессы с участием атомов и ионов металлов описываются квазистационарными уравнениями. Кроме того, такие модели содержат следующие предположения: абляция метеороидов является главным источником металла в мезосфере; химические процессы в газовой фазе происходят за время меньшее, чем характерное время вертикального транспорта; химические циклы металлов замкнуты, т.е. компоненты реакций циркулируют между собой, и их сток в верхнюю мезосферу отсутствует [20].

Уравнение непрерывности для  $i$ -той компоненты содержащей металл  $M$  с концентрацией  $n_i$  имеют вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \Phi_i = P_i + I_i - L_i, \quad (1)$$

где в правой части уравнения присутствуют слагаемые, отвечающие темпу производства химической компоненты, скорости поступления из-за процесса абляции и темп потерь компоненты соответственно. В левой части уравнения  $\Phi_i$  – вертикальный поток. Суммируя по всем компонентам, содержащим металл  $M$ , получим

$$\frac{\partial n(M)}{\partial t} = \sum_i (I_i - \nabla \Phi_i) = I(M) - \nabla \Phi(M), \quad (2)$$

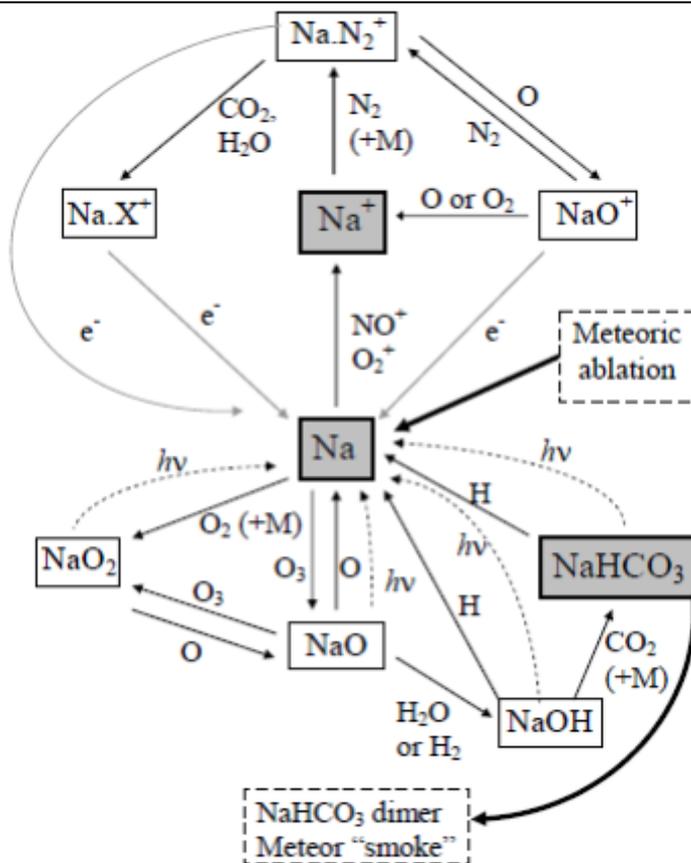
где  $n(M)$ ,  $I(M)$ ,  $\Phi(M)$  – полная концентрация металла  $M$ , полная скорость инъекции и полный поток всех компонент соответственно.

В квазистационарном состоянии и предположении, что вплоть до высоты турбопаузы (105 км) действует один и тот же коэффициент диффузии, из (2) получим

$$\Phi(M) = -K \left[ \frac{\partial n(M)}{\partial z} + n(M) \cdot \left( \frac{1}{H} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right], \quad (3)$$

где  $K$ ,  $H$ ,  $T$  – вертикальный коэффициент диффузии, характерный масштаб атмосферы и температура соответственно. Поскольку поток  $\Phi(M)$  равен проинтегрированному по высоте среднему по времени темпу инъекции, уравнение (3) может быть решено и получен вертикальный профиль  $n(M)$ . Концентрации компонент, содержащих атом металла  $M$ , могут теперь быть получены в предположении о квазистационарности реакций, показанных на рис. 1. При этом необходимы также профили малых составляющих атмосферы, принимающих участие в химических превращениях атомов и ионов металла:  $O_3$ ,  $O$ ,  $H$ ,  $H_2$ ,  $H_2O$ ,  $CO_2$ , а также заряженных компонент  $NO^+$ ,  $O_2^+$  и электроны. Информация о них извлекается обычно из измерений или других моделей.

Чувствительность полного содержания атомов  $Na$  к потоку массы и коэффициенту диффузии была проверена на нестационарной модели слоя  $Na$  [25], в которой численно были решены уравнения непрерывности для основных компонент ( $Na$ ,  $Na^+$ ,  $NaHCO_3$ ), а остальные компоненты, участвующие в химическом цикле реакций, находились в стационарной состоянии. Результат показан на рис. 2. Из рис. 2. видно, что полное содержание  $Na$  в единичном столбе (принимаемое равным  $5 \cdot 10^9$  атомов/см<sup>2</sup>) может быть обусловлено набором двух параметров (потока массы метеороидов и коэффициента диффузии). В частности, величине потока метеороидов 20 т/день соответствует  $K_{zz} = 3 \cdot 10$  м<sup>2</sup>/с, что близко к оценкам, следующим из параметризации вклада импульса ВГВ на этих высотах [36].

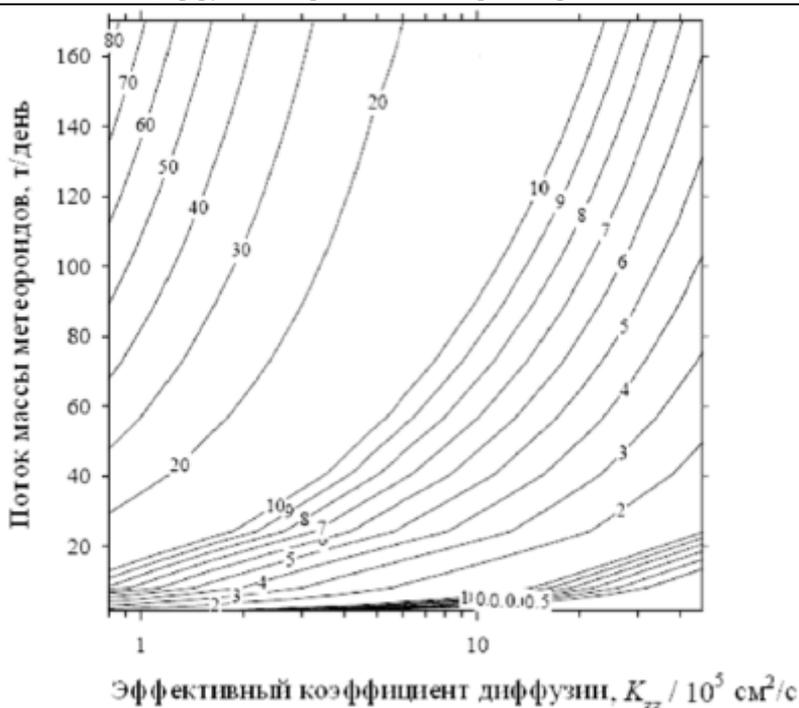


**Рис. 1.** Схема: химия Na в верхней мезосфере – нижней термосфере [Plane, 2004]. Линиями показаны реакции с измеренными коэффициентами скоростей реакций. Пунктирными линиями отмечены реакции фотодиссоциации. Серые линии отмечают реакции диссоциативной рекомбинации с измеренными коэффициентами скоростей реакций

Если поток массы взять равным 40–50 т/день [28], то ему будет соответствовать коэффициент диффузии  $K_{zz} = 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ , что согласуется с оценками по скорости диссипации энергии ВГВ в области МНТ [37]. В то же время, величине потока 100 т/день соответствует  $K_{zz} = 3 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ , что может быть обусловлено дополнительным переносом (например, посредством роллов).

### 3. Механизм рециркуляции и поддержания определенной концентрации атомов металла, обусловленный присутствием вихревых структур

Оценим возможный вклад роллов в диффузионный поток. Как уже было отмечено, на высотах МНТ имеет место как турбулизация среды, так и развитие когерентных структур. В качестве механизма воспроизводства турбулентности в области МНТ часто предполагают использовать процессы разрушения внутренних волн. На этой основе построены большинство оценок турбулентной диссипации, характерных масштабов и профилей турбулентной диффузии. Наблюдаемые



**Рис. 2.** Зависимость средней дневной концентрации Na в единичном столбе (в единицах  $10^9$  атомов/см<sup>2</sup>) от глобальной скорости поступления метеороидов (распределение их масс и скоростей взято по измерениям прибора LDEF – Long Duration Exposure Facility, установленном на спутнике) и среднего эффективного коэффициента диффузии между высотами 80 и 90 км. Типичная концентрация атомов Na в единичном столбе равна  $5 \cdot 10^9$  атомов/см<sup>2</sup> (для широт  $40^\circ$  N в зимний сезон) [Plane, 2004]

сильные сдвиги скорости ветра, подверженные действию силы Кориолиса, позволяют сделать вывод, что классические механизмы турбулентности из-за действия гидродинамических неустойчивостей с последующим каскадом также могут иметь место. Определенные подтверждения этому находят как в наблюдениях спектров турбулентности близких к колмогоровским  $-5/3$ , так и в результатах численного моделирования [19].

Исходя из наблюдаемых профилей скорости в рамках представления типа Колмогорова-Прандтля нетрудно получить профили турбулентной вязкости

$$K(z) \approx c \left( \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} l^2 \quad (4)$$

Здесь  $c$  – коэффициент порядка единицы,  $U$ ,  $V$  – зональная и меридиональная компоненты скорости,  $l$  – длина перемешивания. Длина перемешивания имеет значения порядка внешнего масштаба турбулентности. На масштабах существенно меньших этой длины турбулентность можно считать однородной. Из данных наблюдений следует, что длину перемешивания можно оценивать как масштаб, ниже которого наблюдается область колмогоровского скейлинга. В условиях

МНТ, исходя, например, из данных [38, 39] для длины перемешивания можно принять оценку порядка 100 м (для сравнения укажем, что длина перемешивания для условий атмосферного пограничного слоя (АПС) достигает 30 м). Далее, исходя из данных о градиентах вертикальных компонент скорости ветра на высотах МНТ получим для  $K \approx 100\text{--}500 \text{ м}^2/\text{с}$ .

Близкие по порядку величины величины турбулентной вязкости получаются при предположении о реализации квазистационарных профилей экмановского типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( K(z) \left( \frac{\partial U}{\partial z} - g \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) + 2\Omega(V - V_G) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( K(z) \left( \frac{\partial V}{\partial z} + g \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right) + 2\Omega(U - U_G) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $g$  – параметр турбулентной спиральности,  $U_G$ ,  $V_G$  – скорости ветра на верхней границе,  $\Omega$  – вертикальная компонента параметра Кориолиса. Турбулентная диффузия пропорциональна турбулентной вязкости  $D = K / \text{Pr}$  (турбулентное число Прандтля  $\text{Pr} \approx 0.7$ ).

Неустойчивости течений с экмановскими профилями приводят к образованию горизонтально ориентированных валиковых циркуляционных структур [17]. Таким образом, на обычный диффузионный перенос накладывается перенос в поле периодических вихревых ячеек. Как известно, в этом случае наблюдается интенсификация диффузионного процесса. Детальный физический разбор этого явления приводится в [40], а хороший и обширный обзор можно найти в [41].

Для пространственно-периодического в горизонтальном направлении течения при отсутствии средненаправленного движения эффективная диффузия имеет вид [42, 43]

$$D_{\perp}^{\text{eff}} \approx D \text{Pe}^{1/2}. \quad (6)$$

Здесь  $\text{Pe} = UL / D$  – число Пекле,  $D$  – фоновая (в данном случае турбулентная диффузия),  $U$ ,  $L$  – масштабы скорости и пространственного периода течения. Эффективность здесь понимается в смысле описания диффузии в горизонтальном направлении на масштабах много больших периода циркуляционного движения в структурах, т.е. после пространственного усреднения. Для условий МНТ это будут масштабы от 100 км.

В качестве характерного пространственного масштаба в экмановских слоях можно использовать толщину слоя Экмана  $h_E = (K / \Omega)^{1/2}$ , которому и будет близок период вторичных структур  $L$ . Характерный масштаб компонент скорости, участвующих в циркуляционном движении  $U \approx \alpha G$  ( $\alpha \approx 0.05$ ,  $G = (U_G^2 + V_G^2)^{1/2}$ ) [16]. Тогда имеем

$$D_{\perp}^{\text{eff}} \approx \alpha^{1/2} \text{Pr}^{-1/2} \Omega^{-1/4} K^{3/4} G^{1/2}. \quad (7)$$

Для  $\text{Pr} = 0.7$ ,  $\Omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ ,  $G \approx 30 \text{ м/с}$ , получим  $D_{\perp}^{\text{eff}} \approx 16 K^{3/4} \text{ м}^2/\text{с}$ . При сравнительно небольших величинах турбулентной вязкости  $K = 50\text{--}100 \text{ м}^2/\text{с}$  эффективная диффузия в горизонтальном направлении будет  $D_{\perp}^{\text{eff}} = 300\text{--}500 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для вертикальной диффузии оценку получаем из предположения о том, что за то время  $\tau$ , за которое частица продиффундирует в горизонтальном направлении на расстояние порядка горизонтального масштаба ролла, она пересечет и слой  $H$  со структурами в вертикальном направлении. Тогда  $H^2 \approx D_z^{\text{eff}} \tau$  и  $L^2 \approx D_{\perp}^{\text{eff}} \tau$ , так что  $D_z^{\text{eff}} \approx (H / L)^2 D_{\perp}^{\text{eff}}$ . Соотношение  $H / L$  можно оценить из теории устойчивости

экмановского слоя [11], согласно которой обезразмеренное на вертикальный масштаб горизонтальное волновое число неустойчивой моды находится в диапазоне 0.3–0.5, откуда  $D_z^{eff} \approx (0.1-0.3) D_{\perp}^{eff}$ . При указанных небольших величинах турбулентной вязкости  $K = 50-100 \text{ м}^2/\text{с}$  и скорости ветра  $G \approx 30 \text{ м/с}$  получаем для эффективной вертикальной диффузии  $D_z^{eff} \approx 30-150 \text{ м}^2/\text{с}$ , что сопоставимо или превосходит величины турбулентной диффузии. Таким образом, учет когерентных структур, возникающих в области МНТ вследствие гидродинамических неустойчивостей для распределений скоростей экмановского типа, увеличивает скорость вертикального диффузионного перемешивания по меньшей мере в 2 раза.

## 5. Численное моделирование

Движение в атмосферном пограничном слое описывается уравнениями в приближении Буссинеска. Такой подход использовался для исследования ролловых структур в работах [16, 44, 45].

Наблюдаемые упорядоченные вихри (роллы) как правило, повернуты на некоторый угол по отношению к направлению среднего течения (геострофического или градиентного ветра). Выберем систему координат ориентированную таким образом, чтобы ось  $X$  была направлена вдоль продольной оси ролла. Будем полагать однородность течения вдоль этого направления. В этом случае все переменные зависят от двух пространственных координат: высоты  $Z$  и горизонтальной координаты  $Y$ , направленной поперек оси ролла. При трехмерной постановке задачи угол поворота роллов уже будет получаться в ходе самого решения проблемы. Здесь же отметим, что при численном моделировании угол выбирается, как правило, близкий к тому значению, при котором инкремент роста возмущений достигает максимума при данных числах Рейнольдса.

Система нелинейных уравнений, описывающая поведение вторичных вихревых структур – роллов, содержит все три составляющие вектора скорости, что является необходимым условием при изучении спиральных течений. Гравитационным оседанием атомов металлов на рассматриваемых масштабах можно пренебрегать и рассматривать их, как пассивную примесь.

В качестве масштабов длины, скорости, времени выберем толщину экмановского слоя  $D = (K/f)^{1/2}$ , скорость геострофического ветра  $G = (U_G^2 + V_G^2)^{1/2}$  ( $U_G$ ,  $V_G$  – геострофическая и агеострофическая компоненты) и  $1/f$ , где  $f = \Omega \cdot \sin(\Theta)$ ,  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $\Theta$  – широта.

Ролловые структуры описываются в безразмерном виде системой уравнений:

$$\text{Re} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle \right) \quad (8)$$

$$= \Delta u - g \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\text{Re} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} - \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle \right) \quad (9)$$

$$= \Delta \phi + g \frac{\partial}{\partial z} \Delta u - 2 \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\text{Pr} \cdot \text{Re} \cdot \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} - \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\rangle \right) = \Delta \theta \quad (10)$$

$$\varphi = -\Delta \Psi. \quad (11)$$

Здесь  $(u, v, w)$  – продольная (направленная вдоль ролла (ось X)), поперечная и вертикальная компоненты скорости ролла,  $U(z), V(z)$  составляющие скорости среднего течения.  $\Psi$  – функция тока,  $\varphi$  – проекция завихренности на ось X,  $\theta$  –

температура роллов,  $\langle a \cdot b \rangle = \frac{\int_0^{y_{\max}} a(z) \cdot b(z) dy}{y_{\max}}$  – оператор осреднения по координате Y.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Параметр  $g$  характеризует спиральность в АПС. Здесь для аппроксимации турбулентных напряжений используется модифицированная гипотеза вихревой вязкости [12, 16, 46], учитывающая влияние турбулентной спиральности на их структуру. В приближении постоянных коэффициентов и опущенными градиентными членами, перенормирующими давление, их можно представить в (размерном) виде

$$\frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_j} = -K \Delta \langle v \rangle_i - K_H \lambda_j \frac{\partial \text{curl}_i \langle v \rangle}{\partial x_j} \cdot \langle v \rangle \quad (u, v, w), \quad \lambda = \{0, 0, 1\} \quad (12)$$

где  $v^i$  – турбулентное поле скорости,  $K$  – турбулентная вязкость,  $K_H$  – "вторая" вязкость, пропорциональная турбулентной спиральности. Два коэффициента вязкости позволяют согласовать турбулентные потоки энергии и спиральности с их диссипацией. Здесь представлена простейшая форма замыкания, учитывающая выделенное направление, создаваемое вектором вращения Земли. Отношение  $g = K_H / K \approx chl_e < 1$ . Учет зависимости турбулентных коэффициентов от профиля средней скорости [12, 16, 46] показывает непосредственную связь параметра  $g$  с распределением средней спиральности в атмосферном пограничном слое. Здесь  $h = v^i \text{curl } v^i$  – плотность турбулентной спиральности,  $e = (v^i)^2 / 2$  – плотность энергии турбулентного движения,  $l$  – длина пути перемешивания,  $c \sim 1$  – эмпирический коэффициент. Для АПС согласно оценкам, полученным на основе анализа данных для компонент поля скорости, значение параметра  $g$  находится в интервале  $(-0.1, 0.3)$  [16].

$\text{Re} = G \cdot D / K$  – число Рейнольдса, определенное по турбулентной вязкости  $K$ .  $\text{Pr}$  – турбулентное число Прандтля (1~1.2). В настоящей работе с целью исследования основных эффектов мы рассматриваем упрощённую версию модели с постоянными коэффициентами турбулентной вязкости и диффузии. В полной модели турбулентные коэффициенты переноса определяются из профилей средней скорости и температуры на каждом расчётном шаге.

Для системы уравнений, описывающей ролловые структуры, рассматриваются нулевые условия на нижней границе ( $z = 0$ ):  $u = 0, w = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$  и

условия отсутствия трения на верхней границе ( $z = \infty$ ):  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0, w = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . На верхней и нижней границах концентрация  $\theta$  равна нулю. По направлению  $Y$  ставятся периодические граничные условия.

Вертикальная структура горизонтально-однородного пограничного слоя атмосферы описывается системой уравнений:

$$\text{Re} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - g \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2 \cdot (V - U(z_{\max})), \quad (13)$$

$$\text{Re} \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right\rangle \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + g \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2 \cdot (U - V(z_{\max})). \quad (14)$$

На нижней границе и верхней границах для компонент горизонтальной скорости ставятся ненулевые значения, близкие к наблюдаемым в области МНТ.

Системы уравнений, реализующие численную модель движений в верхней атмосфере, решались методом конечных разностей.

Ролловые структуры в пограничном слое описываются системой уравнений, включающей уравнения для продольной составляющей скорости  $u$ , завихренности  $\phi$ , возмущения концентрации  $\theta$ , а также для функции тока  $\Psi$ .

Рассмотрим модельное уравнение переноса с конвективным и диффузионным членами:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial z} = k \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

Здесь  $f$  – одна из искоемых функций  $u, \phi, \theta$ .  $k$  – обобщенный коэффициент диффузии.

Параболические уравнения переноса и эллиптическое уравнение Пуассона для функции тока рассматриваются в отдельности, так как методы их решения различны.

Для аппроксимации уравнений переноса применялась явная схема с направленными против потока разностями, записанная следующим образом [47]:

$$f_t + \frac{u + |u|}{2} f_{\bar{y}} + \frac{u - |u|}{2} f_y + \frac{v + |v|}{2} f_{\bar{z}} + \frac{v - |v|}{2} f_z = k (f_{\bar{y}y} + f_{\bar{z}z}) \quad (16)$$

В разностном уравнении (16) используются следующие обозначения:

$f_y, f_z$  – аппроксимация первых пространственных производных односторонними разностями вперед;  $f_{\bar{y}}, f_{\bar{z}}$  – аппроксимация первых пространственных производных односторонними разностями назад;  $f_{\bar{y}y}, f_{\bar{z}z}$  – аппроксимация вторых пространственных производных;  $f_t$  – аппроксимация производной по времени односторонней разностью вперед.

После приведения подобных членов получим разностное уравнение:

$$f_t + u \cdot f_{o_y} + v \cdot f_{o_z} = \left( k + \frac{h_y |u|}{2} \right) \cdot f_{\bar{y}y} + \left( k + \frac{h_z |v|}{2} \right) \cdot f_{\bar{z}z} \quad (17)$$

Здесь  $f_o$  и  $f_o$  – аппроксимации первых пространственных производных центральными разностями,  $h_y, h_z$  – шаги пространственной сетки в направлении Y и Z соответственно.

Явная схема с направленными разностями известна своим стабилизирующим влиянием [48]. Она обладает искусственной схемной вязкостью, что демонстрируется коэффициентами схемной вязкости  $\frac{h_y|u|}{2}$  и  $\frac{h_z|v|}{2}$  при вторых пространственных производных. Счетная вязкость обычно сильно подавляет эффекты гидродинамической неустойчивости.

Условие устойчивости накладывает следующее ограничение на шаг по времени:

$$\tau \leq \left( 2k \cdot \left( \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) + \frac{|u|}{h_y} + \frac{|v|}{h_z} \right)^{-1} \quad (18)$$

Следует отметить, что для решения метеорологических задач, в которых рассматривается уравнение для вихря, часто используется схема Аракавы [49], обладающая как преимуществами (сохранение кинетической энергии), так и недостатками. Схема чувствительна к неустойчивости, связанной с расчленением решения по временным шагам.

Для решения уравнения Пуассона применялся итерационный метод последовательной верхней релаксации [50] в предположении, что значения завихренности на (n+1) временном слое известны, а значения функции тока подлежат определению.

При записи итерационного процесса индексом m обозначается номер итерации, а индексом n – номер временного слоя. Разрешая конечно-разностный аналог уравнения Пуассона относительно функции тока  $\Psi_{i,j}$ , получим:

$$\tilde{\Psi}_{i,j} = C_1 \cdot \Psi_{i,j}^m + C_2 \cdot \Psi_{i-1,j}^{m+1} + C_3 \cdot (\Psi_{i,j-1}^m + \Psi_{i,j+1}^m) + C_4 \cdot (\omega_v)_{i,j}^{n+} \quad (18)$$

Итерации осуществляются по формуле:

$$\Psi_{i,j}^{m+1} = \Psi_{i,j}^m + \alpha \cdot (\tilde{\Psi}_{i,j} - \Psi_{i,j}^m).$$

$\alpha$  – параметр верхней релаксации ( $1 < \alpha < 2$ ). Итерационный процесс продолжаем

пока  $\frac{|\tilde{\Psi}_{i,j} - \Psi_{i,j}^m|}{\max_{i,j} |\Psi_{i,j}|} > \delta$ . Здесь  $\delta$  – заданная точность. Необходимое число итераций

порядка  $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ . После окончания итераций считаем, что найдено значение функции тока на (n+1) временном слое.

Среднее течение в пограничном слое описывается системой уравнений, включающей одномерные по координате Z уравнения для составляющих скорости геострофического ветра и уравнение для средней температуры T. Модельным уравнением для средних скоростей и температуры является уравнение вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (19)$$

Для аппроксимации этих уравнений используется условно устойчивая явная схема. Условие устойчивости накладывает ограничение на шаг по времени:

$$\tau \leq \frac{h_z^2}{4 \cdot k}. \quad (20)$$

Расчетная область представляет собой прямоугольник, ориентированный по направлениям  $Y$  и  $Z$ . Длина стороны в направлении  $Y$  в несколько раз превышает высоту расчетной области, которая заведомо превышает высоту пограничного слоя, определяемого экмановским масштабом, связанным со значениями турбулентной вязкости.

Рассмотрим реализацию граничных условий. На вертикальных границах расчетной области для функций  $u$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$  задавались условия периодичности:  $f(t, y, z) = f(t, y + l, z)$ . Для их реализации применялось расширение расчетной области в направлении  $Y$  на один шаг  $h_y$  пространственной сетки. По соответствующим конечно-разностным уравнениям производились вычисления во внутренних узлах расчетной области. После чего выполнялись пересылки:  $f_{i, N_y + 1} := f_{i, 1}$ ;  $f_{i, 0} := f_{i, N_y}$ .

При итерировании уравнения Пуассона пересылки производились после каждой итерации. На этапе вычисления во внутренних узлах расчетной области значения функций при  $Y = 0$  и  $Y = l + h_y$  использовались в качестве граничных значений на предыдущем  $n$ -м временном слое.

На нижней границе расчетной области ( $Z = 0$ ) задавались нулевые условия:

$$u = 0, w = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \text{ Для концентрации также условие } \theta = 0. \text{ В}$$

двухполюсовом подходе, использующем вихрь и функцию тока, основная трудность связана с удовлетворением условий вязкого прилипания на твердых границах. Погрешность решения существенно зависит от аппроксимации завихренности на твердой границе. При численной реализации значение функции тока на нижней границе можно положить равным нулю. Вычисление завихренности  $\varphi$  на твердой границе ( $Z = 0$ ) осуществлялось по формуле Тома:  $\varphi_{0,j} = -\frac{2}{h_z^2} \cdot \Psi_{1,j}$ , использующей значение функции тока во внутренних узлах расчетной области.

На верхней границе расчетной области ( $Z = \infty$ ) задавались условия:  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0, w = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \theta = 0$ . При численной реализации значения функции тока  $\Psi$  и завихренности  $\varphi$  можно положить равными нулю.

Реализация граничных условий для системы уравнений, описывающей среднее течение, не имеет особенностей.

Организацию вычислений можно представить в виде следующего алгоритма:

1. В начальный момент времени  $t = 0$  для функций  $u$ ,  $\Psi$ ,  $\theta$  задаются нулевые начальные условия. Для завихренности  $\varphi$  задается возмущение в центре расчетной области. Для составляющих скорости среднего течения задаются начальные профили, соответствующие модифицированному экмановскому профилю скорости [12, 51].

2. Рассчитываются значения  $u$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  во внутренних узлах расчетной области.

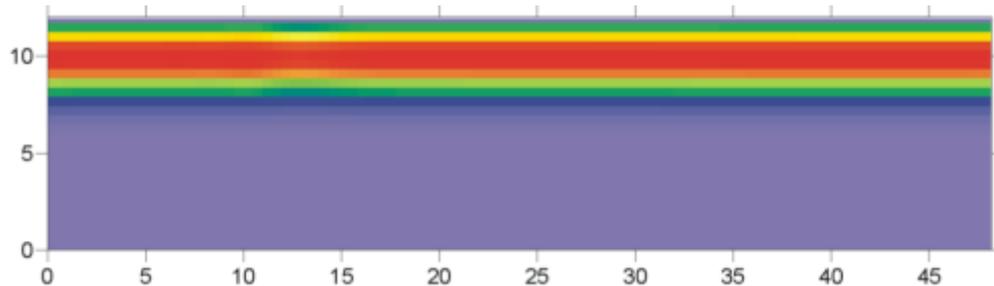


Рис. 3. 1.4 часа физического времени

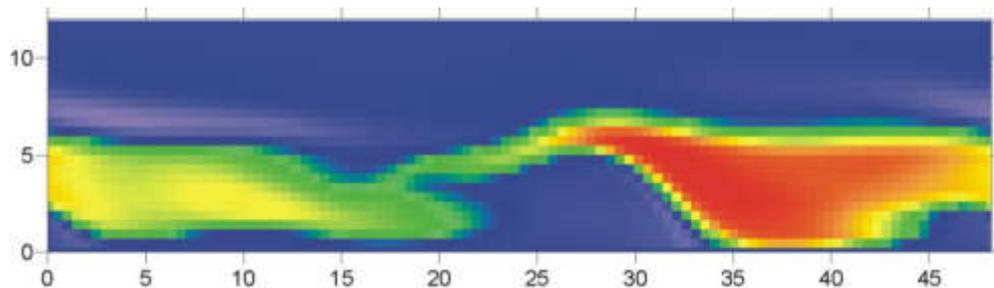


Рис. 4. 9 часов физического времени. Уже развились структуры и стали захватывать атомы металлов. Часть атомов металлов достигла нижней границы

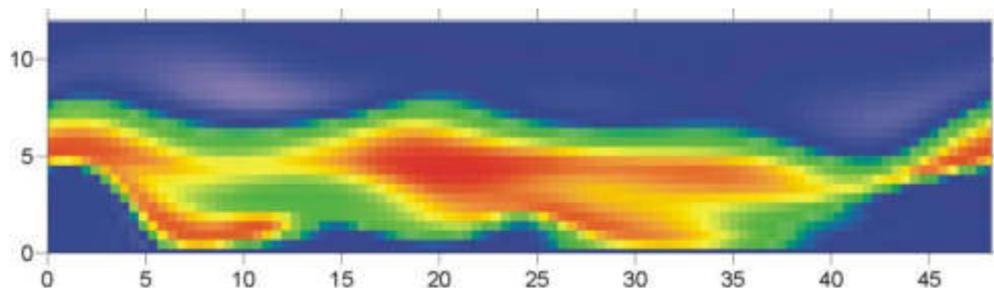


Рис. 5. 13 часов физического времени

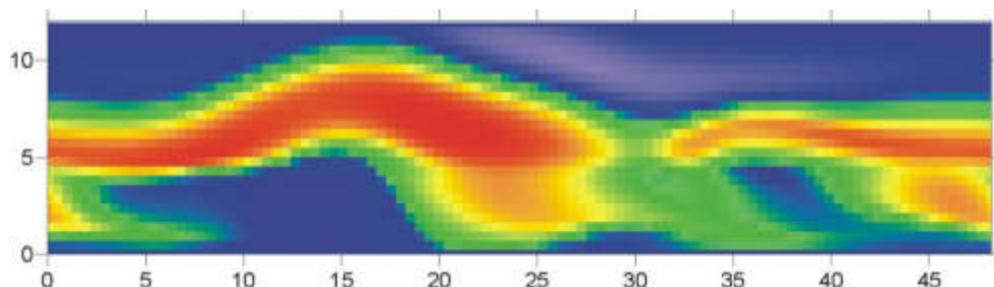


Рис. 6. 16 часов

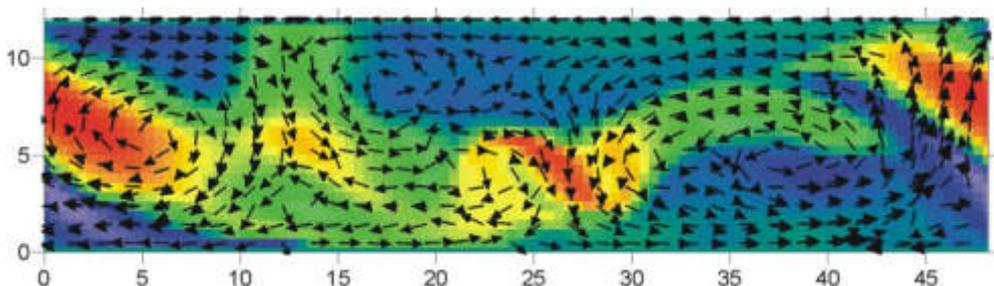


Рис. 7. Концентрация при  $Re = 500$  через 11 часов

Проводятся итерации для определения функции тока  $\Psi$  на  $(n+1)$  временном слое с использованием уже вычисленных во внутренних узлах значений завихренности  $\phi$  на новом временном слое.

4. Рассчитываются новые граничные значения завихренности с использованием функции тока во внутренних точках расчетной области.

5. Рассчитываются характеристики среднего течения  $U(z)$ ,  $V(z)$ .

6. Осуществляется переход к следующему временному шагу (пункт 2).

При численном моделировании задавались следующие параметры начального распределения концентрации атомов металлов.

Приведем примеры расчетов эволюции слоя атомов металлов, возникшем на верхней границе расчетной области при числе Рейнольдса 200, когда уже развиваются вторичные периодические циркуляционные структуры.

Для начального распределения концентрации брался гауссов профиль локализацией вблизи верхней границы расчетной области ( $z = 10$ ).

Вторичные циркуляционные движения возникали вследствие условий для скоростей на верхней и нижней границах, приводящих в невозмущенном состоянии к модифицированной экмановской скорости:

$$\begin{aligned} u &= e^{\Lambda_1 z} (\beta \cos(\alpha - \Lambda_1 z) - \cos(\phi - \Lambda_1 z)) + \cos(\phi), \\ v &= e^{-\Lambda_2 z} (\beta \sin(\alpha - \Lambda_2 z) - \sin(\phi - \Lambda_2 z)) + \sin(\phi), \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $\beta$  определяет значения скорости на нижней границе, могущие быть в данном случае отличными от 0. Угол  $\phi$  определяет направление ветра на нижней границе.

Интересно сопоставить картину распределения концентраций атомов металлов с циркуляционными движениями. Картина циркуляций в вертикальной плоскости наложена на концентрацию через 11 физических часов при числе Рейнольдса 500.

Аналогичная картина при числе Рейнольдса 250.

### Заключение

Приведенные оценки показывают, что при сравнительно небольших коэффициентах турбулентной вязкости эффективная скорость перемешивания может удваиваться, если в процессе участвуют когерентные структуры, причем  $D_z^{eff} \sim K^{3/4}$ . Соответственно, это меняет представление о потоке массы метеороидов, вы-

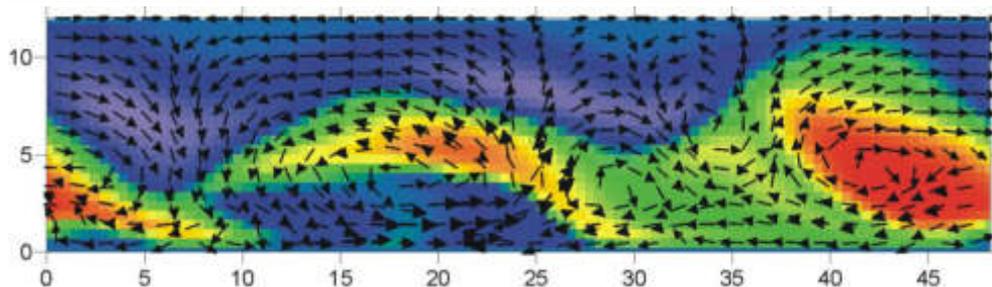


Рис. 8. Концентрация при  $Re = 250$  через 22 часа

падающих на Землю. Если в [20] был сделан вывод о выпадении 20 т/сут (что, согласно рис. 1, соответствует коэффициенту турбулентной диффузии около  $40 \text{ м}^2/\text{с}$ ), то наши оценки при эффективном коэффициенте диффузии порядка  $200 \text{ м}^2/\text{с}$  приводят к величине около 60 т/сут. Следовательно, развитие когерентных структур необходимо учитывать в моделях транспорта атомов металла в верхней атмосфере. Сами когерентные структуры в верхней атмосфере с одной стороны, удерживают атомы металлов в циркуляционных ячейках, с другой стороны при этом эффективно перемешивают их и доставляют на более низкие высоты.

### Литература

- [1] *Larsen et al.* Observations of overturning in the upper mesosphere and lower thermosphere // *J. Geophys. Res.* 2004. V. 109. D02S04.
- [2] *Larsen et al.* Imaging coherent scatter radar, incoherent scatter radar, and optical observations of quasiperiodic structures associated with sporadic E layers // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. Issue A6. CiteID A06321.
- [3] *Bishop et al.* Sequential observations of the local neutral wind field structure associated with E region plasma layers // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110. A04309.
- [4] *Chu et al.* First measurements of neutral wind and turbulence in the mesosphere and lower thermosphere over Taiwan with chemical release experiment // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. A02301.
- [5] *Hysell D.L., Larsen M.F., Zhou Q.H.* Common volume coherent and incoherent scatter radar observations of mid-latitude sporadic E layers and QP echoes // *Ann. Geophys.* 2004. V. 22. P. 3277.
- [6] *Yamamoto M., Fukao S., Woodman R.F., Ogawa T., Tsuda T., Kato S.* Mid-latitude E region field-aligned irregularities observed with the MU radar // *J. Geophys. Res.* 1991. V. 96. № A9. P. 15943–15949.
- [7] *Haldoupis C., Bourdillon A., Kamburelis A., Hussey G.C., Koehler J.A.* 50 MHz continuous wave interferometer observations of the unstable midlatitude E region ionosphere // *Ann. Geophysics.* 2003. V. 21. № 7. P. 1589–01600.
- [8] *Rosenberg N.* Dynamic model of ionospheric wind profiles // *J. Geophys. Res.* 1968. V. 7. № 15. P. 4965-4968.
- [9] *Larsen M.F.* Winds and shears in the mesosphere and lower thermosphere: Results from four decades of chemical release wind measurements // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. № A8. P. 1215. SIA 28-1–28-29.
- [10] *Браун Р.А.* Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 150 с.

- [11] Lilly D.K. On the instability of Ekman boundary flow // J. Atm. Sci. 1966. V. 2. P. 481–494.
- [12] Михайлова Л.А., Орданович А.Е. Когерентные структуры в пограничном слое атмосферы // ФАО. 1991. Т. 27. С. 59.
- [13] Faller A.J., Kaylor R. Instability of the Ekman spiral with application to the planetary boundary layer // Phys. Fluids. 1967. V. 9. P. 212.
- [14] Chou S.H., Ferguson M.P. Heat fluxes and roll circulation over the western gulf stream during an intense cold air outbreak // Bound. Layer Meteor. 1991. V. 65. P. 215.
- [15] Чхетиани О.Г. О спиральной структуре экмановского пограничного слоя // Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. № 5. С. 614–620.
- [16] Пономарев В.М., Чхетиани О.Г., Шестакова Л.В. Нелинейная динамика крупномасштабных вихревых структур в турбулентном экмановском слое // Механика жидкости и газа. 2007. № 4. С. 72–82.
- [17] Чхетиани О.Г., Шалимов С.Л. Спиральность в верхней атмосфере и неустойчивости экмановского типа // Докл. РАН. 2010. Т. 431. № 1. С. 113–118.
- [18] Hocking W.K. The dynamical parameters of turbulence theory as they apply to middle atmosphere studies // Earth Planets Space. 1999. V. 51 № 7/8. P. 525–541.
- [19] Fritts D.C. et al. Layering accompanying turbulence generation due to shear instability and gravity-wave breaking // J. Geophys. Res. 200. V. 108. D8, 8452. 13 p.
- [20] Plane J.M. Atmospheric chemistry of meteoric metals // Chem. Rev. 2003. V. 103 (12). P. 4963–40984.
- [21] Kelley M.C. The Earth's ionosphere: Plasma Physics and Electrodynamics. San Diego: Academic Publ. Comp., 1989. 485 p.
- [22] Alpers M., Heffner J., von Zahn U. Sporadic Fe and E layers at polar, middle and low latitudes // J. Geophys. Res. 1994. V. 99 (A8). P. 14971–14985.
- [23] Cox R.M., Plane J.M. An ion-molecule mechanism for the formation of neutral sporadic Na layers // J. Geophys. Res. 1998. V. 103(D6). P. 6349–6359.
- [24] Clemesha B.R., Simonich D.M., Batista P.P., Kirchhoff V. The Diurnal-Variation of Atmospheric Sodium // J. Geophys. Res. 1982. V. 87. P. 181–186.
- [25] Plane J.M. A time-resolved model of the mesospheric Na layer: constraints on the meteor input function // Atm. Chem. Phys. 2004. V. 4. P. 627–638.
- [26] Gerding M. et al. Atmospheric Ca and Ca<sup>+</sup> layers' Midlatitude observations and modeling // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. P. 27131–27146.
- [27] Self D.E., Plane J.M.C. Absolute photolysis cross-sections for NaHCO<sub>3</sub>, NaOH, NaO, NaO<sub>2</sub> and NaO<sub>3</sub>: implications for sodium chemistry in the upper mesosphere // Phys. Chem. Chem. Phys. 2002. V. 4 (1). P. 16–23.
- [28] Hughes D.W. Meteors // Cosmic Dust / Ed. by McDonnell J.A.M. London: Wiley, 1978. P. 123–185.
- [29] Hughes D.W. Meteors and cosmic dust // Endeavour. 1997. V. 21(1). P. 31–35.
- [30] Wasson J.T., Kyte F.T. On the Influx of Small Comets into the Earths Atmosphere, 2. Interpretation – Comment // Geophys. Res. Lett. 1987. V. 14. P. 779–780.
- [31] Gabrielli P. et al. Meteoric smoke fallout over the Holocene epoch revealed by iridium and platinum in Greenland ice // Nature. 2004. V. 432. P. 1011–1014.
- [32] Lanci L. et al. Meteoric smoke concentration in the Vostok ice core estimated from superparamagnetic relaxation and some consequences for estimates of Earth accretion rate // Geophys. Res. Lett. 2007. V. 34. L10803.
- [33] McBride N., Green S.F., McDonnell J.A.M. Meteoroids and small sized debris in Low Earth Orbit and at 1 au: Results of recent modeling // Adv. Space Res. 1999. V. 23. P. 73–82.

- [34] *Cziczo D.J., Thomson D.S., Murphy D.M.* Ablation, flux, and atmospheric implications of meteors inferred from stratospheric aerosol // *Science*. 2001. V. 291. P. 1772–1775.
- [35] *Mathews J.D., Janches D., Meisel D.D., Zhou Q.H.* The micrometeoroid mass flux into the upper atmosphere: Arecibo results and a comparison with prior estimates // *Geophys. Res. Lett.* 2001. V. 28. P. 1929–1932.
- [36] *Chabrilat S., Kockarts G., Fonteyn D., Brasseur G.* Impact of molecular diffusion on the CO<sub>2</sub> distribution and the temperature in the mesosphere // *Geophys. Res. Lett.* 2002. V. 29. P. 1729.
- [37] *Hocking W.* Turbulence in the region 80–120 km // *Adv. Space Res.* 1990. V. 10. P. 153–161.
- [38] *Thrane E.V., Grandal B.* Observation of fine scale structure in the mesosphere and lower thermosphere // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1981. V. 43. № 3. P. 179–189.
- [39] *Thrane E.V. et al.* Small scale structure and turbulence in the mesosphere and lower thermosphere at high latitudes in winter // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1987. V. 49. № 7/8. P. 751–762.
- [40] *Чукбар К.В.* Лекции по явлениям переноса в плазме. Долгопрудный: ИД Интеллект, 2008. 257 с.
- [41] *Majda A.J., Kramer P.R.* Simplified models for turbulent diffusion: Theory, numerical modelling, and physical phenomena // *Physics Reports*. 1999. V. 314. P. 237–574.
- [42] *Осипенко М.В., Погуце О.П., Чудин Н.В.* Диффузия плазмы на решетке вихрей // *Физика плазмы*. 1987. Т. 13. С. 953–960.
- [43] *Rosenbluth M.N. et al.* Effective diffusion in laminar convective flows // *Phys. Fluids*. 1987. V. 30 (9). P. 2636–2647.
- [44] *Орданович А.Е.* Математическое моделирование «облачных» улиц в пограничном слое атмосферы // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1988. № 24. С. 922–931.
- [45] *Ginis I., Khain A.P., Morozovsky E.* Effects of large eddies on the structure of the marine boundary layer under strong wind conditions // *J. Atmos. Sci.* 2004. № 64. P. 3049–3063.
- [46] *Mason P., Sykes R.* A two-dimensional numerical study of horizontal roll vortices in the neutral atmospheric boundary layer // *Quart. J. R. Met. Soc.* 1980. V. 106. P. 351–366.
- [47] *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.
- [48] *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
- [49] *Arakawa A.* Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow // *J. Computational Physics*. 1997. V. 135. P. 103–114.
- [50] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
- [51] *Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* Полуэмпирическая модель пограничного слоя атмосферы с параметризацией влияния турбулентной спиральности // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2005. Т. 41, № 4. С. 464–479.

## 4.5. Горизонтальный перенос ионов и атомов металлов в нижней ионосфере

*С.Л. Шалимов<sup>1,2,3</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики земли им. О.Ю. Шмидта РАН*

<sup>2</sup>*Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН*

<sup>3</sup>*Институт космических исследований РАН*

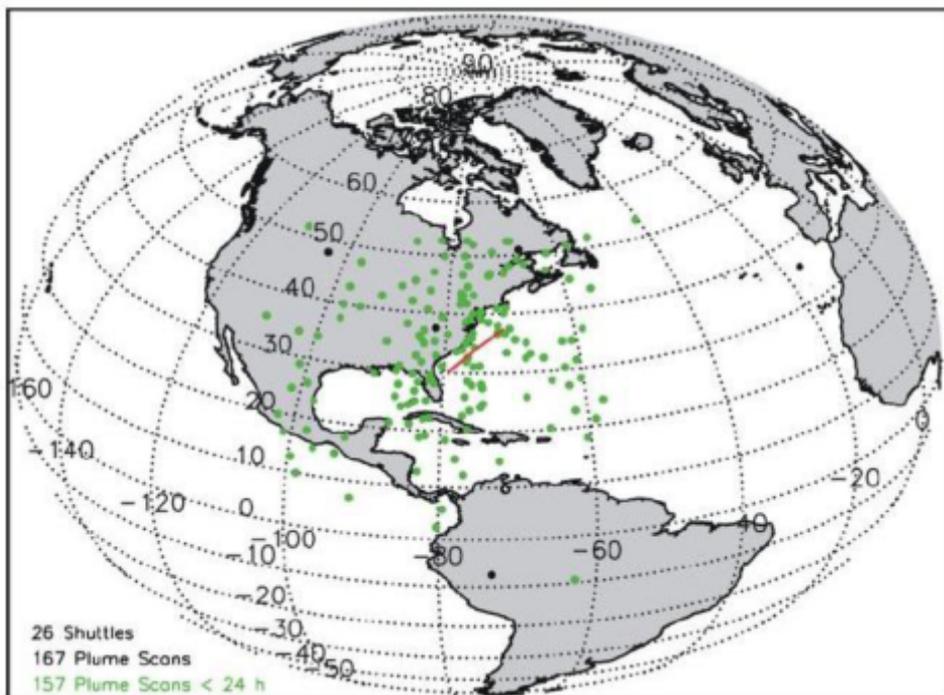
Выброс продуктов сгорания ракетных двигателей сопровождается достаточно сильным, но локальным воздействием на нижнюю, среднюю и верхнюю атмосферу, что четко проявляется в оптических явлениях и химическом воздействии. Однако продукты выброса могут оказывать влияние на окружающую среду также на значительном удалении от участка разгона ракет.

В серии первых публикаций на эту тему [1–3] были описаны неожиданные наблюдения плюмов (и эффектов, ими обусловленных), образованных продуктами выброса ракетных двигателей (в частности, водяного пара, OH, Fe) и зарегистрированных в полярной верхней мезосфере – нижней термосфере севернее (Арктика) и южнее (Антарктика) места старта челнока шаттл (мыс Канаверал), спустя сутки–двое после запуска. Удивление вызывала скорость доставки продуктов выброса в полярные области, которая по оценкам в среднем была 30–40 м/с, что в несколько раз превышает меридиональные скорости ветра по известным циркуляционным и климатологическим моделям [4, 5].

С начала 80-х годов до 2011 г. шаттлы были наиболее крупным космическим транспортным средством (STS, Space Transport System). Во время типичного запуска три его основных двигателя работают приблизительно 8.5 мин: за первые 4 мин из этого времени шаттл достигает высоты около 100 км при наклонной дальности 200 км, остальное время – движение по горизонтальной дуге между высотами 100 и 115 км с результирующей наклонной дальностью  $10^3$  км. При этом в нижнюю ионосферу попадает около 350 т водяного пара, который в результате фотолиза приводит к появлению OH и H, а абляция двигателей – к появлению атомов металла.

В настоящее время накоплено достаточное количество наблюдений, указывающих на быстрый транспорт плюмов от места инъекции в ионосферу с их одновременным расплыванием. Основные результаты получены с использованием двух инструментов – SABER (Sounding of the Atmosphere using Broadband Emission Radiometry), установленного на спутнике TIMED (Thermosphere, Ionosphere, Mesosphere Energetics and Dynamics), и SMR (Sub-Millimeter Radiometer), установленного на спутнике Odin. Посредством этих инструментов, чувствительных к водяному пару, но не предназначенных специально для регистрации плюмов, наблюдали 27 событий при сканировании более 600 лимбов за период 2002–2011 гг. [6] Часть плюмов, среди которых наиболее поразительные, была зарегистрирована посредством инструмента GUVI (Global UltraViolet Imager), установленного на спутнике TIMED, а также MLS (Microwave Limb Sounder), установленного на спутнике Aura [3, 6, 7].

SABER был предназначен для наблюдения инфракрасного излучения в диапазоне 1.27–15 мкм молекулами, входящими в состав верхней атмосферы (CO<sub>2</sub>, O<sub>3</sub>, NO, OH, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O). Излучение водяного пара вблизи 6.7 мкм при сканировании

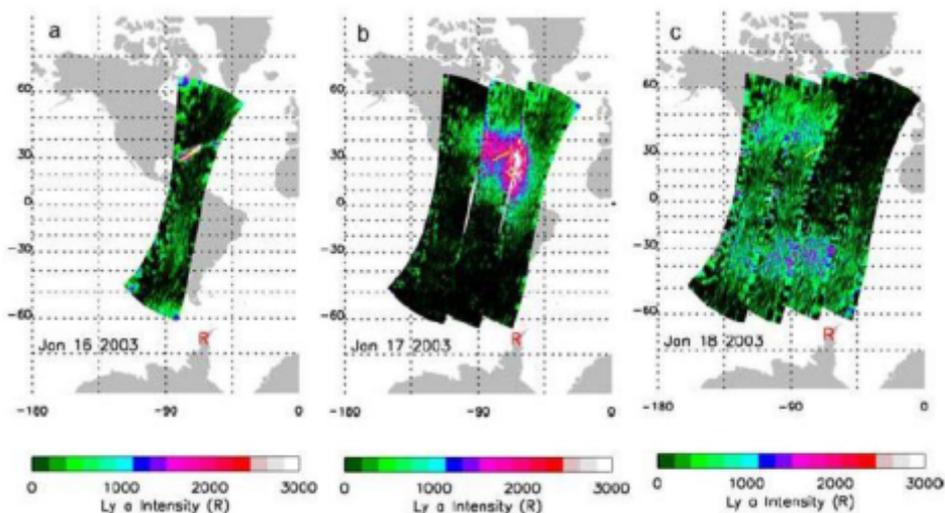


**Рис. 1.** Карта положения плюмов, зарегистрированных SABER. Красная линия – проекция траектории шаттла (с высот 100–115 км) на поверхность земли; плюмы, зарегистрированные менее чем через 24 ч после старта показаны зелеными точками, а после 24 ч – черными [6]

167 лимбов позволило зарегистрировать 26 плюмов, причем 94% наблюдений было сделано менее, чем через 24 ч после запуска шаттла. На рис. 1 показана карта плюмов, зарегистрированных посредством SABER за период 2002–2011 гг., из которой, в частности, следует, что за 24 ч меридиональный транспорт может достигать 43°.

В отличие от SABER, инструмент GUVI – спектрометр, сканирующий в далеком ультрафиолете (5 каналов от 115 до 180 нм) земной диск поперек траектории спутника. Основные эмиссии в этом диапазоне включают H (Lyman  $\alpha$ ), O (130.4, 135.6) и две полосы N<sub>2</sub> (LBH). На рис. 2 показан результат наблюдений посредством GUVI Lyman  $\alpha$  плюма после запуска 16.01.2003 шаттла STS-107 (более известного, как «Columbia») в разные моменты времени после старта [3]. На рис.2б показаны три, а на рис. 2с – четыре орбиты, где GUVI регистрирует плюм, спустя 1–1.2 и 1.9–2.2 дня после старта соответственно. На этих рисунках видно диффузионное расплывание плюма и шир, показывающий движение части плюма на северо-запад, но в большей степени на юг.

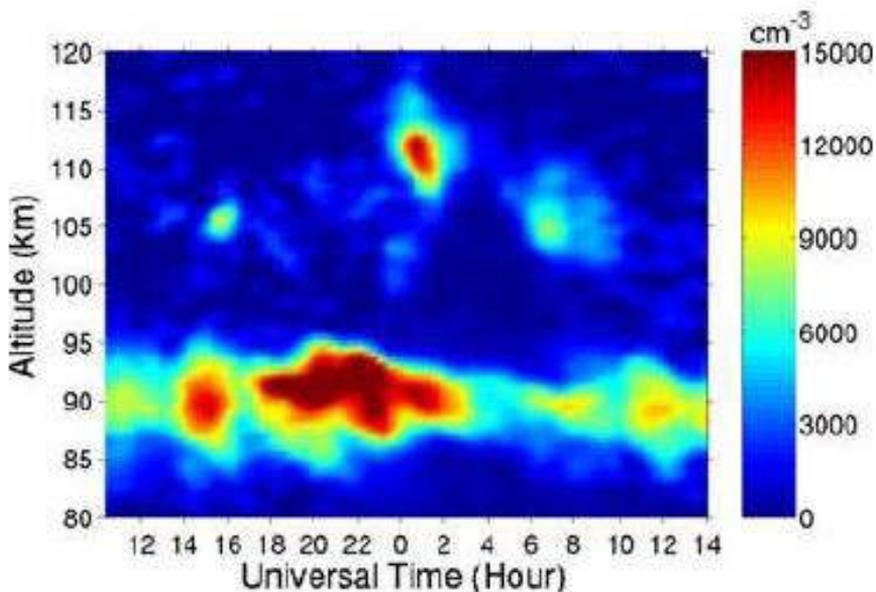
Средняя скорость такого транспорта на юг – около 75 м/с, а средняя скорость по всем трем фрагментам – около 44 м/с, что в несколько раз больше известных скоростей ветров в верхней атмосфере, определяемых по измерениям со спутников [4].



**Рис. 2.** Результаты наблюдений посредством GUVI Lyman  $\alpha$ : яркость показана цветовым кодом (статистическая неопределенность  $\pm 500$  Рл). (а) Плюм шаттла, спустя 1.8 ч после старта: проекция траектории шаттла на участке разгона до высоты 112 км с концом на северо-востоке показана желтым, а белый – соседний с ней эмиссионный след, (б) 1.0–1.2 дня после старта: большая часть выброса движется на юг, (с) 1.9–2.2 после старта: основная часть плюма в южном полушарии на широте  $35^\circ$ . Буквой “R” обозначена точка наблюдения посредством лидара в Roter a [3]

Кроме того, на рис. 2 буквой R отмечена станция Roter a ( $67.6^\circ$  Ю.Ш.), где производились лидарные наблюдения. На рис. 3 показаны результаты наблюдений концентрации атомов Fe в мезосфере – нижней термосфере 19–20 января 2003 г. через 2.8–4 дня после старта STS-107. Присутствие максимума концентрации Fe вблизи высоты 90 км общеизвестно – это следствие абляции метеороидов, вторгающихся в земную атмосферу [8]. Вместе с тем можно отметить три нетипичных особенности концентрации в интервале высот 104–113 км. В контексте наблюдений GUVI эти особенности, естественный источник которых неизвестен, можно атрибутировать с результатом абляции двигателей STS-107 и последующим транспортом продуктов в точку наблюдений. Такое заключение соответствует наблюдаемому интервалу высот особенностей (на этих высотах и происходит абляция), а также скорости транспорта плюма, отмеченной на рис.2. Кроме того, дополнительную информацию позволяют получить пиковые величины наблюдаемых особенностей концентрации Fe, которые находятся в диапазоне  $5 \cdot 10^3$ – $1.5 \cdot 10^4$   $\text{см}^{-3}$  (рис. 3). Для расчета модельной ситуации предполагалось, что в начальный момент в плюм водяного пара (с концентрацией  $1.5 \cdot 10^{12}$   $\text{см}^{-3}$ ) однородно инжектируются атомы Fe в виде цилиндра радиуса 1.7 км, длиной  $10^3$  км и концентрацией  $10^6$   $\text{см}^{-3}$ . Было показано [3], что тогда к моменту наблюдения на ст. Roter a (т.е. через 81 ч после старта) диффузия и химические реакции уменьшат концентрацию Fe до  $7 \cdot 10^3$   $\text{см}^{-3}$ , что согласуется с наблюдаемыми величинами.

Присутствие паров воды в данном случае снижает концентрации  $\text{NO}^+$ ,  $\text{O}_2^+$  и, следовательно, роль реакции переноса заряда, которая слишком быстро уменьшает концентрацию Fe. При этом концентрация паров воды снижается на 27%.



**Рис. 3.** Лидарные измерения концентрации атомов Fe над ст. Ротера, Антарктика, 19–20 января 2003 г. с пространственным разрешением 1 км по вертикали и временным разрешением 1 ч. Максимальная концентрация вблизи 112 км равна  $1.5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$  ( $\pm 200\text{--}300 \text{ см}^{-3}$ ). Естественные источники Fe выше 100 км неизвестны [3]

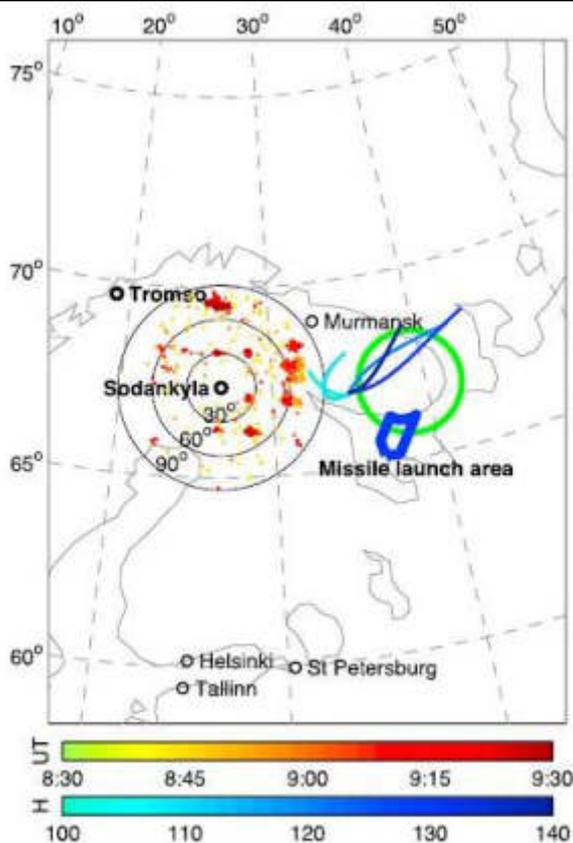
В свою очередь, высокая концентрация паров воды плюма повышает точку замерзания приблизительно на 10 К (до 148 К на высоте 92 км) [9]. Соответственно, одновременно измеряемая лидаром на ст. Ротера температура (143–160 К) [10] указывала на возможность формирования ледяных частиц. И, действительно, полярные мезосферные облака (РМС, Polar Mesospheric Clouds), известные также как серебристые облака, наблюдались тем же лидаром при перемещении плюма.

Следует отметить, что кроме упомянутого, описаны еще три события наблюдений РМС, обусловленные быстрым транспортом продуктов ракетного топлива в нижней ионосфере в меридиональном [2, 11] и зональном [12] направлениях в полярных областях.

Прежде, чем перейти к вопросу о механизмах транспорта, остановимся на последнем из этих событий, где посредством ионозонда и метеорного радара удалось зарегистрировать уникальное воздействие на нижнюю ионосферу продуктов разрушения ракеты «Булава», запущенной 09.12.2009.

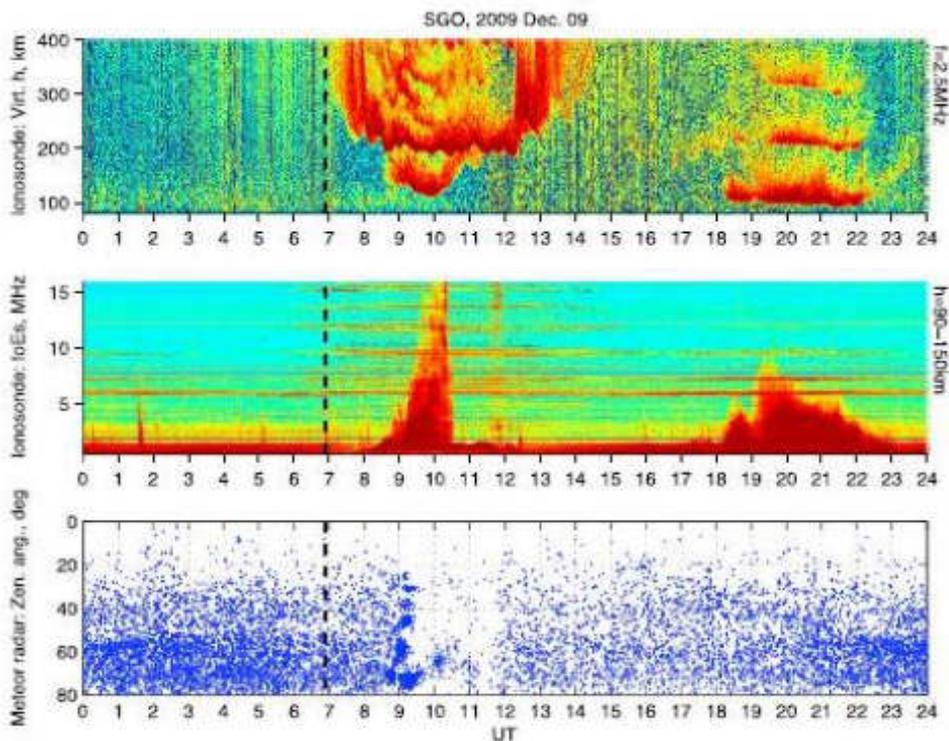
«Булава» – 36-тонная трехступенчатая твердотопливная баллистическая ракета, во время тестового испытания была запущена из акватории Белого моря, но из-за технического сбоя во второй ступени взорвалась над Кольским полуостровом на высотах 200–250 км приблизительно в 07 UT.

Моделью начального развития подобных явлений может служить приближение сильного взрыва в газовой среде. Поскольку давление в камере сгорания ракеты ( $\sim 10 \text{ МПа}$ ) значительно выше давления окружающего газа ( $\sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ Па}$  на высоте около 250 км), можно применить автомодельное решение для скорости



**Рис. 4.** На карте региона синей замкнутой линией отмечено место пуска ракеты в акватории Белого моря. Зелёный круг отмечает область свечения. Цветными линиями обозначено направление ветра на разных высотах, согласно модели горизонтальных ветров HWM07. Цветными точками (от желтых до коричневых) вблизи Sodankylä отмечены объекты, зарегистрированные метеорным радаром 08:30–09:30 UT: цвет точек указывает время регистрации, а удаленность от центра – зенитный угол [12]

движения сферически симметричной ударной волны, имеющее вид [13]:  $v = (2/5)(E/\rho)^{1/5} t^{-3/5}$ , где  $E$  – энергия взрыва,  $\rho$  – начальная плотность газа. Для  $E \approx 2 \cdot 10^8$  Дж (при  $P \approx 10$  МПа и объеме  $V \approx 20$  м<sup>3</sup>) и  $\rho \sim 10^{-10}$  кг/м<sup>3</sup> получим оценку скорости  $2 \cdot 10^3 \cdot t^{-3/5}$  м/с. Следовательно, если энергия ударной волны значительно больше кинетической энергии диспергированных частиц, их скорость в первые секунды может достигать  $2 \cdot 10^3$  м/с. Эта оценка согласуется со скоростью разлета продуктов взрыва по оптическим наблюдениям [14]. При этом продукты взрыва сосредоточены в слое за ударной волной, и за время менее 1 мин оказываются распределенными по области с радиусом 100 км, достигая, в частности, высот нижней ионосферы (100–140 км). В следующие 2–3 ч продукты взрыва продолжают распространение и достигают точки наблюдения – SGO (Sodankylä Geophysical Observatory, Finland), которая расположена приблизительно в 500 км западнее точки взрыва, и в нижней ионосфере которой были зарегистрированы эффекты, обусловленные взрывом. Схематическая карта региона и этого события показана на рис. 4.



**Рис. 5.** Данные ионозонда и метеорного радара за целый день 09.12.2009. Верхняя панель – действующая высота на частоте ионозонда  $f = 2.5$  МГц. Средняя панель – критическая частота  $f_bE_s$  для высот 90–150 км. Нижняя панель – зенитный угол зарегистрированных объектов. Цвет (от голубого до красного) на верхней и средней панелях – интенсивность (dB) отраженного сигнала ионозонда. Вертикальная штриховая линия – момент взрыва ракеты [12]

В наблюдениях были использованы ионозонд (одно измерение в минуту) и метеорный радар. Наряду со стандартными ионограммами, измерения ионозонда были представлены с помощью цветового кода в виде 1) зависимости интенсивности отраженного сигнала (на фиксированной частоте) от времени и действующей высоты (так называемый Height-Time-Intensity, HTI plot) – для мониторинга действующей высоты E и F слоёв и 2) зависимости интенсивности отраженного сигнала (в фиксированном интервале высот) от времени и частоты (Frequency-Time-Intensity, FTI plot) – для мониторинга критической частоты регулярного и спорадического слоёв E. На рис. 5 дан пример такого представления данных для временного интервала предполагаемого прихода плюма продуктов взрыва ракеты в область наблюдения.

Как видно из рис. 5, необычные эффекты зарегистрированы ионозондом в 09 UT, т.е. через 2 ч после оптических эффектов над Кольским полуостровом, и продолжались до 12 UT. На рис. 5 (верхняя панель) отчетливо видно, что возникший в 09 UT на высоте около 150 км спорадический слой (или плюм) движется к ионозонду, а после 10 UT удаляется от него (отсюда U-образная форма радиоотражения с течением времени), причем критическая частота слоя  $f_bE_s$  (плотность слоя) увеличивается по крайней мере до 16 МГц – до максимальной частоты для дан-

ного ионозонда (рис. 5, средняя панель, эти же эффекты демонстрируют и ионограммы, см. [12]). Кажущаяся скорость дрейфа слоя до 10 UT и после – около 10 м/с и 40–50 м/с соответственно.

Происхождение долгоживущего спорадического слоя вполне объяснимо: в твердых топливах ракетных двигателей, в качестве присадок к топливу, повышающих устойчивость горения в небольших количествах добавляют Al, Li и другие компоненты [14]. В процессе их окисления различными компонентами продуктов сгорания и атмосферы, такими как  $N_2O$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $CO_2$ ,  $NO_2$ ,  $NO$  и др. образуется закись алюминия  $AlO$ , которая в продуктах сгорания непосредственно не содержится. Присутствие указанных атомов металла и их соединений подтверждается спектрами характерного «бирюзового» свечения плюма, образовавшегося в месте пролета ракеты, из-за резонансного рассеяния солнечного света [14]. Освещенность солнцем обеспечивала и ионизацию атомов, т.е. производство долгоживущих ионов металла. Отметим, что пуск ракеты “Булава” из акватории Белого моря имел место во время восхода Солнца, так что область пролета ракеты выше ~30 км была освещена солнечным светом.

На рис. 5 (нижняя панель) показана регистрация сигналов метеорным радаром в SGO (All-Sky Interferometric Radar, SKiYMET). Радар излучает сферическую волну на частоте 36.9 МГц и зондирует интервал высот 70–110 км. Каждая точка фиксирует вторжение микрометеороида, но около 09 UT радар под разными зенитными углами регистрирует необычные долгоживущие кластеры, после чего до 12 UT сигналы практически отсутствуют. В это же время, около 09 UT, ионозонд показывает, что критическая частота плюма, отражающего радиоволны, заведомо ниже 16 МГц. Следовательно, плазма ионизованных продуктов взрыва (включающая металлические ионы), локализованная выше 90 км, недостаточно плотна, чтобы отражать радиоволны радара. Соответственно, метеорный радар может регистрировать береговое радиоотражение от метровых плазменных неоднородностей в мезосфере. Присутствие таких неоднородностей в обычных условиях турбулентной мезосферы трудно объяснить, поскольку вязкий колмогоровский масштаб здесь порядка десяти метров. Однако наличие заряженной пыли, обусловленной продуктами взрыва, может изменить ситуацию, поскольку в такой плазме значительно уменьшается коэффициент аномальной диффузии  $D_A$  (см. например, [15]). Это приводит к тому, что число Шмидта  $S = \nu / D_A$ , где  $\nu$  – вязкость нейтрального газа, становится больше единицы. В этих условиях пассивный скаляр (плазма) может иметь неоднородности на масштабах меньше, чем у нейтрального газа [16].

Отметим, что долгоживущие неоднородности в ионосфере и мезосфере метеорный радар воспринимает как шум. Действительно, уровень шума в интервале 09–12 UT вырос на порядок [12]. Соответственно, отношение сигнал/шум уменьшилось. В этих условиях сигнал от вторгающихся метеороидов становится трудно различимым. Этим можно объяснить отсутствие регистрации метеороидов после 09 UT.

Как следует из рис. 5 (верхняя панель), около 10 UT, т.е. через 3 ч после взрыва ракеты плюм оказался на ближайшем расстоянии от ионозонда в SGO, а плотность плюма продолжала расти и достигла максимальной величины еще через полчаса. Оценивая расстояние от области взрыва до области зондирования в 300–

350 км, можно получить, что скорость горизонтального транспорта плюма была 20–30 м/с на высотах нижней ионосферы.

Этот и изложенные выше результаты наземных и спутниковых измерений приводят к следующему основному вопросу: каков механизм быстрого транспорта плюмов (образованных выбросами ракетных двигателей), позволяющий им перемещаться со скоростями значительно большими известных из климатологических [4] и циркуляционных [5] моделей?

В работе [17] была рассмотрена численная модель «вихревого ветра» (eddy wind), где кроме основного ветра учитывали его возмущения, обусловленные в основном планетарными и внутренними волнами. Было показано, что такой подход существенно расширяет возможности объяснения меридионального транспорта плюмов. Следуя этой идее, в работе [18] термосферная динамика была рассмотрена с учетом зональных джетов и квази 2-х дневных планетарных волн, что позволило интерпретировать быстрый меридиональный и зональный транспорт плюмов. Отметим, однако, что сезонная зависимость интенсификации планетарных волн не позволяет использовать их для объяснения транспорта во все сезоны.

Альтернативный механизм был предложен в работе [19], где рассматривали двумерную турбулентность как причину не только транспорта, но и распыливания плюмов в нижней ионосфере. Однако Meier et al. [17, 20] показал, что по крайней мере горизонтальное распыливание водородных плюмов (возникающих при фотоллизе водяного пара ракетного выброса) может быть объяснено диффузией, если допустить быстрый перенос атомов H на большие высоты, где диффузия значительно быстрее.

Идея турбулентного транспорта, высказанная в работе [19], основывается на оценках классических работ [21–23] о расхождении жидких элементов на расстояние большее первоначального, но меньшее основного масштаба турбулентности. В частности, в инерционном интервале относительное расхождение изменяется как

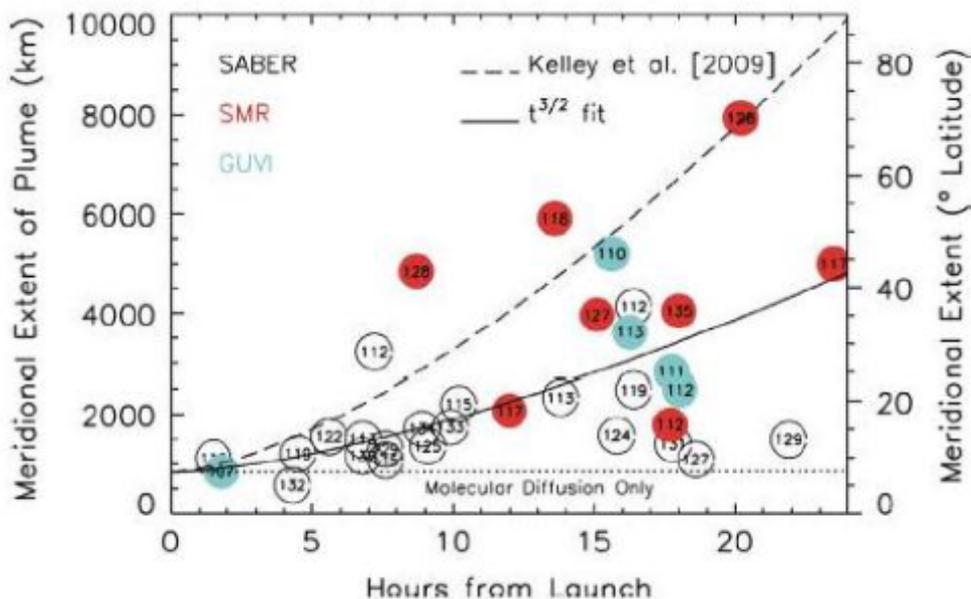
$$\langle r^2(t) \rangle = c \varepsilon t^3$$

где  $c$  – константа порядка единицы,  $\varepsilon$  – скорость диссипации энергии, равная вводу энергии в инерционный интервал со стороны основного масштаба. Оценить  $\varepsilon$  можно следующим образом [23]:  $\varepsilon = (\Delta u)^2 (\Delta u / l)$ , где  $\Delta u$ ,  $l$  – крупномасштабная вихревая скорость и основной масштаб соответственно.

В частности, для эксперимента [12], полагая  $\Delta u = 20$  м/с, что в несколько раз меньше фонового ветра в термосфере, достигающего иногда 100 м/с [24], а для  $\Delta u / l$  используя измеренную в инерционном интервале величину  $1.6 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  [19], из последнего соотношения для  $r \approx 300$  км (расстояние от западной границы области взрыва ракеты до области зондирования ионозонда SGO), получим  $t \approx 3.5$  ч, что согласуется с наблюдаемым зональным транспортом основного плюма, образованного в результате взрыва, в интервале 07–10:30 UT.

Отметим также, что, как следует из рис. 4, направления ветров в области взрыва как построенные по модели HWM07 [5], так и измеренные метеорным радаром в SGO [12], не способствовали переносу плюма на запад.

Сводный график наблюдений меридионального транспорта плюмов после запуска шаттлов показан на рис. 6 по измерениям SABER, SMR, GUVI, где дана зависимость расстояния плюма (после его образования) вдоль меридиана от вре-



**Рис. 6.** Расстояние вдоль меридиана, определяемое с использованием SABER, SMR, GUVI по минимальной и максимальной широте расположения плюма от шаттлов. Номер шаттла указан в кружке. Кривая распыления, описываемая диффузионным механизмом показана точками (начальная меридиональная протяженность принята равной 830 км). Пунктиром и сплошной линиями показаны зависимости, пропорциональные  $t^{3/2}$  [6]

мени [6]. Видно, что диффузионный транспорт может играть роль только в первые несколько часов, после чего он определяется другим механизмом. Наилучшее соответствие с данными демонстрирует выражение

$$\langle d(t) \rangle = C_0 + 2(C_1 t^3)^{1/2},$$

где  $d$  – расстояние вдоль меридиана,  $C_0$ ,  $C_1$  – постоянные, которое обобщает формулу для транспорта крупномасштабной турбулентностью, но в отличие от неё содержит постоянную  $C_0$ , которая описывает протяженность плюма вдоль меридиана в начальный момент времени при его формировании в интервале высот 100–115 км (принятая величина – около 830 км). При этом  $C_1 = 0.0062$ , что как нетрудно видеть из последнего выражения, дает коэффициент перед  $t^{3/2}$  равный приблизительно 0.2. Этот коэффициент совпадает с тем, который следует из оценки  $\varepsilon$  в работе [19].

Таким образом, данные наблюдений показывают, что, несмотря на значительный разброс скоростей транспорта от одного события к другому, крупномасштабные процессы переноса в нижней ионосфере как в меридиональном, так и в зональном направлении могут быть описаны в рамках представлений о турбулентном состоянии ветров в верхней мезосфере – нижней термосфере. На этом пути необходимы новые эксперименты, но уже сейчас понятно, что выбросы продуктов сгорания топлива при стартах ракет могут оказывать глобальное воздействие на верхнюю атмосферу, и их можно использовать для исследования циркуляционных процессов в этой области.

## Литература

- [1] *Stevens M.H., Englert C.R., Gumbel J.* OH observations of space shuttle exhaust // *Geophys. Res. Lett.* 2002. V. 29. No 10. P. 1378.
- [2] *Stevens M.H., Gumbel J., Englert C.R., Grossmann K.U., Rapp M., Hartogh P.* Polar mesospheric clouds formed from space shuttle exhaust // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30. No 10. P. 1546.
- [3] *Stevens M.H., Meier R.R., Chu X., DeLand, M.T., Plane J.M.C.* Antarctic mesospheric clouds formed from space shuttle exhaust // *Geophys. Res. Lett.* 2005. V. 32. L13810.
- [4] *McLandress C. et al.* Combined mesosphere/thermosphere winds using WINDII and HRDI data from the Upper Atmosphere Research Satellite // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101 (D6). P. 10441–10453.
- [5] *Drob D.P. et al.* An empirical model of the Earth's horizontal wind fields: HWM07 // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. A12304.
- [6] *Stevens M.H., Lossow S., Siskind D.E., Meier R.R., Randall C.E., Russell J.M., Urban J., Murtagh D.* Space shuttle exhaust plumes in the lower thermosphere: Advective transport and diffusive spreading // *J. Atm. Sol.-Ter. Phys.* 2014. V. 108. P. 50–60.
- [7] *Meier R.R., Plane J.M.C., Stevens M.H., Paxton L.J., Christensen B., Crowley G.* Can molecular diffusion explain Space Shuttle plume spreading? // *Geophys. Res. Lett.* 2010. V. 37. L08101.
- [8] *Plane J.M.C.* Atmospheric chemistry of meteoric metals // *Chem. Rev.* 2003. V. 103. P. 4963–4984.
- [9] *Mauersberger K., Krankowsky D.* Vapor pressure above ice at temperatures below 170 K // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30(3). P. 1121.
- [10] *Chu X. et al.* Lidar observations of polar mesospheric clouds at Rothera, Antarctica (67.5\_S, 68.0\_W) // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L02114.
- [11] *Kelley M.C., Nicolls M.J., Varney R.H., Collins R.L., Doe R., Plane J.M.C., Thayer, J., Taylor M., Thurairajah B., Mizutani K.* Radar, lidar, and optical observations in the polar summer mesosphere shortly after a space shuttle launch // *J. Geophys. Res. Space Phys.* 2010. V. 115. A05304.
- [12] *Kozlovsky A., Shalimov S., Lukianova R., Lester M.* Ionospheric effects of the missile destruction on 9 December 2009 // *J. Geophys. Res. Space Physics.* 2014. V. 119(5). P. 3873–3882.
- [13] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 430 с.
- [14] *Платов Ю.В., Черноус С.А., Алматов В.В.* Особенности оптических явлений, связанных с запусками твердотопливных баллистических ракет // *Геомагнетизм и аэронавигация.* 2013. Т. 53. № 2. С. 209–214.
- [15] *Шалимов С.Л., Козловский А.* О диффузионном расплывании неоднородностей в запылённой плазме ионосферы // *Физика плазмы.* 2015. Т. 41. № 8. С. 702–707.
- [16] *Batchelor G.* The application of similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 1950. V. 76. P. 133–146.
- [17] *Liu H.-L.* On the large wind shear and fast meridional transport above the mesopause // *Geophys. Res. Lett.* 2007. V. 34. L08815.
- [18] *Yue J., Liu H.-L., Meier R.R., Chang L., Gu S.-Y., Russell III J.* On the fast zonal transport of the STS-121 space shuttle exhaust plume in the lower thermosphere // *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* 2013. V. 94. P. 19–27.
- [19] *Kelley M.C., Seyler C.E., Larsen M.F.* Two-dimensional turbulence, space shuttle plume transport in the thermosphere, and a possible relation to the Great Siberian Impact Event // *Geophys. Res. Lett.* 2009. V. 36. L14103.

4.5. Горизонтальный перенос ионов и атомов металлов в нижней ионосфере

[20] *Meier R.R., Stevens M.H., Plane J.M.C., Emmert J.T., Crowley G., Azeem I., Paxton L.J., Christensen A.B.* A study of space shuttle plumes in the lower thermosphere // *J. Geophys. Res.* 2011. V. 116. A12322.

[21] *Richardson L.F.* Atmospheric diffusion shown in a distance-neighbor graph // *Proc. R. Soc. London A.* 1926. V. 110. P. 709–737.

[22] *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.* 1941. Т. 5. № 4. С. 453–466.

[23] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* *Механика сплошных сред.* ОГИЗ. Гостехиздат, 1944. 624 с.

[24] *Larsen M.F.* Winds and shears in the mesosphere and lower thermosphere: Results from four decades of chemical release wind measurements // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. P. 1215.

**Научное издание**

**ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ  
И ОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ  
В АТМОСФЕРЕ**

**Под редакцией О.Г. Чхетиани, М.Е. Горбунова,  
С.Н. Куличкова, И.А. Репиной**

*Дизайн и компьютерная верстка А.Н. Кураленко-Балакирев*

ООО «Издательство ГЕОС»  
129315, Москва, 1-й Амбулаторный пр-д, 7/3-114.  
Тел./факс: (495) 959-35-16, (499) 152-19-14, 8-926-222-30-91.  
E-mail: geos-books@yandex.ru, www.geos-books.ru

ООО ИПК «Панорама»  
Подписано к печати 28.08.2017.  
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 54,0. Тираж 130 экз.

Отпечатано в полном соответствии с представленным электронным оригинал-макетом в ОАО «Альянс «Югполиграфиздат», ООО ИПК «Панорама»  
400001, г. Волгоград, ул. КИМ, 6